BTS ÉLECTROTECHNIQUE · 1re ET 2e ANNÉES

Physique appliquée

Comprendre, s'entraîner, réussir l'épreuve.



17 chapitres
tout le programme des deux années

Exercices
corrigés pas à pas

Annales
2008 – 2026, classées par chapitre

+ 27 TP virtuels
simulateurs, podcasts, QCM en ligne

JULIEN GUÉRET

Professeur agrégé de physique-chimie

BTS ÉLECTROTECHNIQUE · 1re ET 2e ANNÉES

Physique appliquée

Cours, essentiel, exercices corrigés et sujets de type BTS

Julien Guéret

Professeur agrégé de physique-chimie
Lycée Jean Jaurès, Argenteuil



Physique appliquée – BTS Électrotechnique
Version de travail – octobre 2026

© 2026 Julien Guéret. Tous les schémas, figures et corrigés de cet ouvrage ont été réalisés par l'auteur.

Les exercices et les sujets type BTS de cet ouvrage sont inédits. Les sujets officiels des sessions passées, avec leurs corrigés, sont disponibles sur le site compagnon.

Site compagnon : physique-bts-ett.com – fiches interactives, QCM, TP virtuels, podcasts, annales corrigées et polycopié numérique.

Composition : XeLaTeX, polices Latin Modern.

Avant-propos

La physique appliquée tient une place centrale dans la formation du technicien supérieur en électrotechnique : elle donne les outils pour comprendre ce qui se passe dans une armoire, un moteur, un transformateur ou un variateur, et pour dimensionner une installation. C'est aussi une épreuve qui pèse lourd à l'examen.

Cet ouvrage est né d'une plateforme de ressources numériques construite au fil des années avec mes étudiants de BTS Électrotechnique. Il en reprend le cœur sous une forme que l'on peut annoter, emporter et réviser sans écran : un cours structuré, une synthèse des formules par chapitre (« L'essentiel »), des exercices progressifs corrigés pas à pas et des sujets originaux de type BTS.

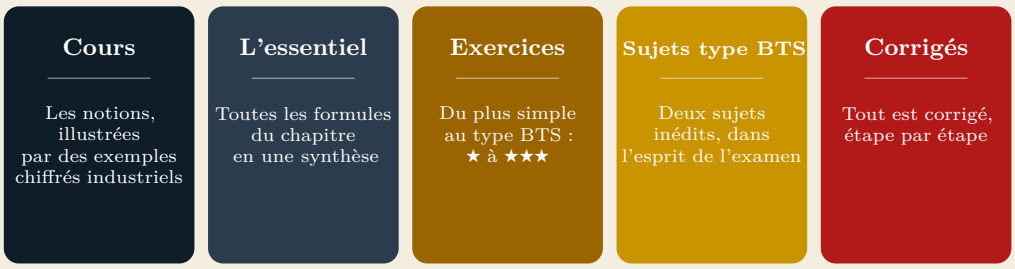
Il a été conçu pour un usage autonome. Chaque notion est introduite simplement, illustrée par un exemple chiffré tiré du monde industriel, puis consolidée par des exercices classés par difficulté. Les corrigés ne se contentent pas de donner les résultats : ils détaillent le raisonnement, les lois utilisées, les applications numériques et les pièges à éviter.

Le livre ne remplace pas la pratique. C'est pourquoi chaque chapitre renvoie, par des QR codes, vers le site compagnon : fiches interactives, simulateurs, TP virtuels notés, QCM d'auto-évaluation et podcasts. Le papier pour comprendre et s'entraîner, l'écran pour manipuler et vérifier.

Je remercie mes étudiants du lycée Jean Jaurès d'Argenteuil, dont les questions, les erreurs et les réussites ont façonné chacune de ces pages.

Julien Guéret

Dans chaque chapitre



Des QR codes renvoient tout au long du livre vers les fiches interactives, simulateurs, TP virtuels et podcasts du site **physique-bts-ett.com**.

Sommaire

1 Électricité de base 1

1.1 Grandeurs électriques et lois de Kirchhoff . . . 2
1.2 Loi d'Ohm, effet Joule et résistances équivalentes . . . 4
1.3 Pont diviseur de tension . . . 6
1.4 Modèle de Thévenin . . . 7
1.5 Signaux sinusoïdaux . . . 8
1.6 Impédances . . . 10
1.7 Puissances en régime sinusoïdal . . . 11

2 Systèmes triphasés équilibrés 37

2.1 Le réseau triphasé . . . 38
2.2 Tensions composées . . . 40
2.3 Récepteurs triphasés équilibrés . . . 41
2.4 Puissances en triphasé . . . 45
2.5 Mesure des puissances . . . 46
2.6 Théorème de Boucherot en triphasé . . . 47
2.7 Relèvement du facteur de puissance . . . 48

3 Transformateur monophasé 73

3.1 Constitution et principe . . . 74
3.2 Le transformateur parfait . . . 75
3.3 Grandeurs nominales et plaque signalétique . . . 77
3.4 Le transformateur réel . . . 78
3.5 Essais à vide et en court-circuit . . . 80
3.6 Chute de tension en charge . . . 82
3.7 Pertes et rendement . . . 83

4 Transformateur triphasé 107

4.1 Constitution . . . 108
4.2 Couplages et désignation . . . 109
4.3 Rapports de transformation . . . 110
4.4 Indice horaire . . . 111
4.5 Schéma équivalent par phase . . . 113
4.6 Puissance nominale et essais . . . 114
4.7 Chute de tension . . . 117
4.8 Rendement . . . 117
4.9 Plaque signalétique et transformateur de distribution . . . 118
4.10 Mise en parallèle de transformateurs . . . 119

5 Qualité de l'énergie électrique 147

5.1 Signaux périodiques et série de Fourier . . . 148
5.2 Valeur efficace et taux de distorsion . . . 150
5.3 Charges non linéaires . . . 151
5.4 Puissances en régime non sinusoïdal . . . 153
5.5 Effets des harmoniques . . . 154
5.6 Remèdes : réduire et filtrer les harmoniques . . . 156
5.7 Creux de tension, flicker et autres perturbations . . . 158
5.8 Normes de qualité de l'énergie . . . 160

6 Convertisseurs électromécaniques 183

6.1 Généralités sur les machines tournantes . . . 184
6.2 Machine à courant continu (MCC) . . . 187
6.3 Machine asynchrone (MAS) . . . 189
6.4 Machine synchrone (MS) . . . 194

7 Électromagnétisme 229

7.1 Champ électrique . . . 230
7.2 Champ magnétique . . . 231
7.3 Excitation magnétique et théorème d'Ampère . . . 233
7.4 Matériaux ferromagnétiques . . . 234
7.5 Circuits magnétiques . . . 236
7.6 Force de Laplace . . . 237
7.7 Induction électromagnétique . . . 238
7.8 Inductance . . . 240
7.9 Électroaimant et applications . . . 241

8 Électronique de puissance 263

8.1 Les convertisseurs statiques . . . 264
8.2 Les interrupteurs électroniques . . . 265
8.3 Valeur moyenne et valeur efficace . . . 267
8.4 Le redressement non commandé . . . 268
8.5 Le redressement commandé . . . 270
8.6 Le hacheur . . . 272
8.7 L'onduleur . . . 274
8.8 Le gradateur . . . 277
8.9 Pertes et refroidissement . . . 278
8.10 Le variateur de vitesse . . . 279

9 Mécanique des fluides 305

9.1 Fluides, masse volumique et pression . . . 306
9.2 Débits et conservation du débit . . . 308
9.3 Fluide parfait en mouvement : relation de Bernoulli . . . 310
9.4 Fluide réel : viscosité, régimes d'écoulement, pertes de charge . . . 312
9.5 Machines hydrauliques : Bernoulli généralisée . . . 314

10 Mécanique du solide **341**

10.1 Forces et actions mécaniques . . . 342
10.2 Moment d'une force et couple . . . 344
10.3 Mouvements de translation et de rotation . . . 345
10.4 Principe fondamental de la dynamique . . . 347
10.5 Énergie, travail et puissance . . . 348
10.6 Transmission de mouvement . . . 350
10.7 Grandeurs ramenées à l'arbre du moteur . . . 352
10.8 Charges entraînées et point de fonctionnement . . . 353

11 Un peu de chimie et de thermodynamique **381**

11.1 Oxydoréduction et piles électrochimiques . . . 382
11.2 Modèle électrique d'un générateur électrochimique . . . 384
11.3 Capacité et énergie stockée . . . 386
11.4 Combustion . . . 388
11.5 Pouvoir calorifique d'un combustible . . . 389
11.6 Température et chaleur . . . 390
11.7 Énergie interne et capacité thermique . . . 391
11.8 Changements d'état . . . 393
11.9 Bilans thermiques (calorimétrie) . . . 394
11.10 Pompe à chaleur et machine frigorifique . . . 395

12 Transferts thermiques **419**

12.1 Chaleur, température et flux thermique . . . 420
12.2 Conduction . . . 421
12.3 Convection . . . 424
12.4 Rayonnement thermique . . . 425
12.5 Résistances thermiques en série et en parallèle . . . 426
12.6 Refroidissement des composants et des machines . . . 428
12.7 Bilan thermique d'une armoire électrique . . . 429
12.8 Isolation d'un bâtiment . . . 431
12.9 Régime transitoire : constante de temps thermique . . . 431

13 Photométrie et éclairagisme **455**

13.1 La lumière et l'œil . . . 456
13.2 Les grandeurs photométriques . . . 457
13.3 Éclairement produit par une source ponctuelle . . . 460
13.4 Couleur de la lumière . . . 462
13.5 Les sources lumineuses . . . 463
13.6 Exigences normatives et vérification . . . 464
13.7 La méthode des flux . . . 465
13.8 La méthode point par point . . . 467
13.9 Bilan énergétique d'une rénovation d'éclairage . . . 468

14 Chaîne de mesure 491

14.1 Architecture d'une chaîne de mesure . . . 492
14.2 Les capteurs . . . 493
14.3 Capteurs usuels . . . 496
14.4 Conditionnement du signal . . . 499
14.5 Transmission de la mesure . . . 502
14.6 Conversion analogique-numérique . . . 504
14.7 Une chaîne complète : le pesage industriel . . . 506

15 Systèmes linéaires et fonction de transfert 529

15.1 Systèmes linéaires . . . 530
15.2 Mise en équation . . . 531
15.3 Fonction de transfert . . . 532
15.4 Systèmes du premier ordre . . . 533
15.5 Systèmes du deuxième ordre . . . 535
15.6 Réponse fréquentielle et filtres . . . 538

16 Régulation et asservissement 565

16.1 Régulation et asservissement . . . 566
16.2 Schémas blocs et fonctions de transfert . . . 569
16.3 Performances d'une boucle fermée . . . 572
16.4 Stabilité d'une boucle fermée . . . 575
16.5 Les correcteurs . . . 576
16.6 Réglage d'un correcteur : la méthode de Broïda . . . 578
16.7 Exemples industriels . . . 580

17 Mesure et incertitudes 605

17.1 Le vocabulaire de la mesure . . . 606
17.2 Incertitude de type A : série de mesures . . . 608
17.3 Incertitude de type B : mesure unique . . . 609
17.4 Composition des incertitudes . . . 612
17.5 Écrire un résultat de mesure . . . 614
17.6 Comparer à une valeur de référence . . . 615
17.7 Régression linéaire . . . 617
17.8 Synthèse : mesures sur un moteur monophasé . . . 619

Annexes

Réussir l'épreuve E4 642

Les annales du BTS chapitre par chapitre 645

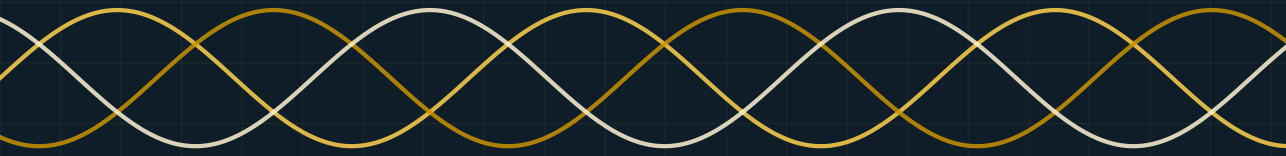
Index 650

CHAPITRE

1

Électricité de base

Régime continu et régime sinusoïdal monophasé



Dans ce chapitre

- Grandeurs électriques et lois de Kirchhoff
- Loi d'Ohm, effet Joule, résistances équivalentes
- Pont diviseur et modèle de Thévenin
- Signaux sinusoïdaux, déphasage, Fresnel
- Impédances des dipôles R, L, C
- Puissances, théorème de Boucherot

Objectifs

- ✓ Appliquer les lois des mailles et des nœuds
- ✓ Réduire un réseau, utiliser un pont diviseur et un modèle de Thévenin
- ✓ Exploiter un oscillogramme et tracer un diagramme de Fresnel
- ✓ Calculer une impédance, des puissances et un condensateur de relèvement

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 1

Cours — Chapitre 1

1.1 Grandeurs électriques et lois de Kirchhoff

En **régime continu**, les tensions et les intensités ne dépendent pas du temps : on les note avec des lettres majuscules U, I. Toutes les lois de ce paragraphe restent vraies à chaque instant en régime variable (avec $u(t)$ et $i(t)$).

Tension et intensité

D

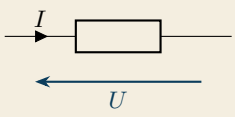
Définition **Tension** U : différence de potentiel électrique entre deux points. Unité : le volt (V). Elle se mesure avec un voltmètre branché **en dérivation**.
Intensité I : débit des charges électriques par seconde. Unité : l'ampère (A). Elle se mesure avec un ampèremètre branché **en série**.

\+

Potentiel et charge électrique – hors programme La tension entre deux points A et B est la différence de leurs potentiels électriques : $U_{AB} = V_A - V_B$. L'intensité est la charge Δq (en coulombs, C) qui traverse une section du conducteur pendant la durée Δt, divisée par cette durée : $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

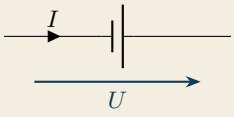
On représente une tension par une flèche et une intensité par une flèche sur le fil. Pour un dipôle, deux conventions sont possibles :

Convention récepteur



flèches de U et de I de sens opposés

Convention générateur

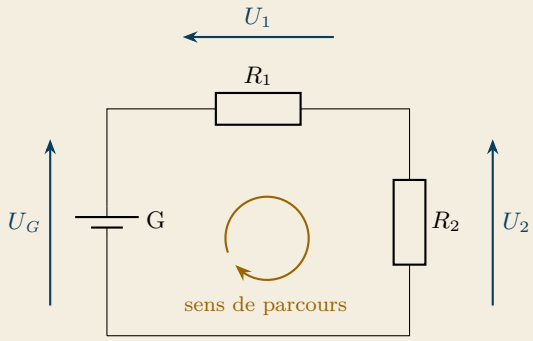


flèches de U et de I dans le même sens

Loi des mailles

★

À retenir · Loi des mailles Sur une **maille** (boucle fermée du circuit), la somme algébrique des tensions est nulle. On choisit un sens de parcours : une tension dont la flèche est dans le sens de parcours est comptée $+$, sinon elle est comptée $-$.



En parcourant la maille dans le sens horaire : $U_G - U_1 - U_2 = 0$, d'où $U_2 = U_G - U_1$.

Ex **Exemple** Avec $U_G = 5\,\text{V}$ et $U_1 = 400\,\text{mV} = 0{,}4\,\text{V}$: $U_2 = 5 - 0{,}4 = 4{,}6\,\text{V}$.

✗ **Piège classique** Ne pas mélanger mV et V dans un même calcul. Une tension négative n'est pas une erreur : elle signifie que le sens réel est opposé à la flèche choisie.

Loi des nœuds

★ **À retenir · Loi des nœuds** En un **nœud** (point où se rejoignent au moins trois fils), la somme des intensités des courants qui arrivent est égale à la somme des intensités des courants qui partent : $\sum I_{arrivant} = \sum I_{partant}$.

Ex **Exemple** Un courant $I_G = 4{,}2\,\text{A}$ arrive au nœud et se partage entre deux branches ; on mesure $I_2 = 0{,}13\,\text{A}$ dans l'une d'elles. Dans l'autre : $I_1 = I_G - I_2 = 4{,}2 - 0{,}13 = 4{,}07\,\text{A}$.

Puissance et énergie

★ **À retenir**

$$P = U \times I \qquad E = P \times \Delta t$$

P en watts (W) ; E en joules (J) si Δt est en secondes, en wattheures (W · h) si Δt est en heures : $1\,\text{W} \cdot \text{h} = 3\,600\,\text{J}$.

Ex **Exemple : projecteur de chantier sur batterie** Le projecteur est alimenté sous $U = 12\,\text{V}$, absorbe $I = 5\,\text{A}$ et reste allumé $\Delta t = 2\,\text{h}$.

$$P = 12 \times 5 = 60\,\text{W} \qquad E = 60 \times 2 = 120\,\text{W} \cdot \text{h} = 120 \times 3\,600 = 432\,\text{kJ}$$

1.2 Loi d'Ohm, effet Joule et résistances équivalentes

Loi d'Ohm et effet Joule

★ **À retenir** Pour un conducteur ohmique de résistance R (en Ω), en convention récepteur :

$$U = R \times I \qquad P = R \times I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Quand un courant traverse un conducteur, les électrons qui se déplacent entrent en collision avec les atomes du matériau : l'énergie électrique est transformée en chaleur. C'est l'**effet Joule**. Il est **utile** dans un radiateur, un four, une bouilloire ou un fusible ; il est **gênant** dans les câbles, les moteurs et les transformateurs, où il crée des pertes (pertes Joule ou pertes cuivre) (voir § 3.7).

Ex **Exemple** $R = 10\,\Omega$ parcourue par $I = 2\,\text{A}$: $P = 10 \times 2^2 = 40\,\text{W}$. Les pertes varient comme I^2 : doubler le courant multiplie les pertes par 4. C'est pourquoi l'énergie est transportée sous haute tension, avec un courant plus faible.

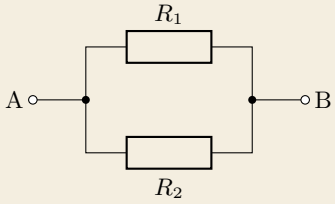
\+ **Résistance d'un câble et chute de tension en ligne** – hors programme Un conducteur de longueur ℓ et de section S a pour résistance $R = \rho \frac{\ell}{S}$, où ρ est la résistivité du matériau (cuivre : $\rho \approx 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \text{m}$, soit environ $0{,}017\,\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$). Dans une ligne à deux conducteurs, le courant fait l'aller et le retour : ℓ vaut deux fois la longueur de la ligne. La loi d'Ohm donne alors la chute de tension dans la ligne, $\Delta U = R_L \times I$, et l'effet Joule ses pertes, $R_L\, I^2$.

Résistance équivalente

D **Définition** La **résistance équivalente** R_{eq} d'une association est la résistance unique qui, placée entre les mêmes bornes A et B, absorbe le même courant sous la même tension.



en série : même courant



en parallèle : même tension

À retenir

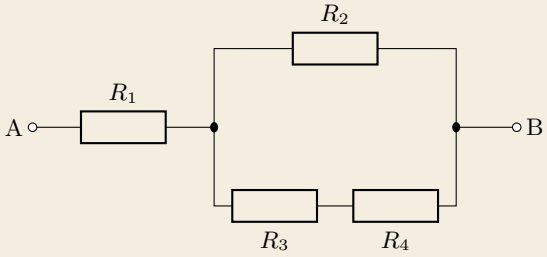
$$\text{Série : } R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

$$\text{Parallèle : } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$\text{Deux résistances en parallèle : } R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{« produit sur somme »})$$

n résistances identiques R : $n\,R$ en série, R/n en parallèle.

Méthode : réduire un réseau de résistances



1. On repère les deux bornes A et B entre lesquelles on cherche R_{eq}.
2. On cherche un groupe **clairement en série** (aucune dérivation entre elles) ou **clairement en parallèle** (mêmes deux nœuds aux extrémités) et on le remplace par sa résistance équivalente.
3. On redessine le schéma simplifié et on recommence jusqu'à obtenir une seule résistance.

Exemple Avec $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 150\,\Omega$ et $R_4 = 50\,\Omega$:

$$R_{34} = 150 + 50 = 200\,\Omega$$

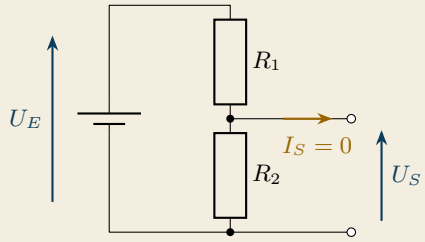
$$R_{234} = \frac{200 \times 200}{200 + 200} = 100\,\Omega$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{234} = 200\,\Omega$$

Piège classique « Produit sur somme » ne vaut que pour **deux** résistances. Avec la formule des inverses, ne pas oublier d'inverser le résultat. Contrôle rapide : en parallèle, R_{eq} est plus petite que la plus petite des résistances ; en série, plus grande que la plus grande.

1.3 Pont diviseur de tension

Deux résistances en série alimentées sous une tension U_E : on prélève la tension U_S aux bornes de l'une d'elles, plus petite que U_E.



★ **À retenir · Pont diviseur à vide**

$$U_S = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times U_E$$

Au numérateur : la résistance aux bornes de laquelle on cherche la tension. **Validité** : aucun courant n'est prélevé en sortie ($I_S = 0$).

Démonstration. À vide, R_1 et R_2 sont en série, parcourues par le même courant $I = U_E/(R_1 + R_2)$; donc

$$U_S = R_2 \times I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_E.$$

Effet d'une charge. Si l'on branche une charge R_C en sortie, elle se retrouve **en parallèle** sur R_2. On remplace R_2 par R_{2C} :

$$R_{2C} = \frac{R_2 R_C}{R_2 + R_C} \qquad U_S = \frac{R_{2C}}{R_1 + R_{2C}} \times U_E$$

et comme $R_{2C} < R_2$, U_S diminue quand on charge le pont.

Ex **Exemple** $U_E = 12\,\text{V}$, $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$: à vide, $U_S = \frac{2}{3} \times 12 = 8\,\text{V}$. Avec $R_C = 2\,\text{k}\Omega$: $R_{2C} = 1\,\text{k}\Omega$ et $U_S = \frac{1}{2} \times 12 = 6\,\text{V}$.

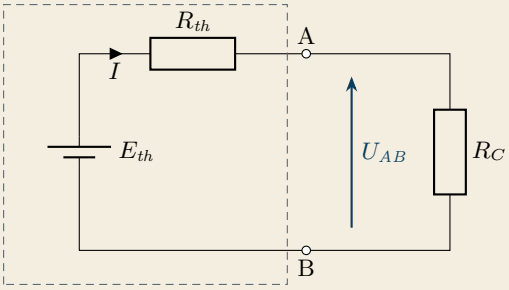
✗ **Piège classique** Appliquer la formule du pont diviseur alors qu'une charge est branchée. Il faut d'abord regrouper R_2 et R_C en parallèle, ou utiliser le modèle de Thévenin.

\+ **Quand peut-on négliger la charge ?** – hors programme La formule à vide reste une bonne approximation si $R_C \gg R_2$: avec R_C au moins 10 fois plus grande que R_2, l'erreur commise sur U_S reste inférieure à 10 %.

1.4 Modèle de Thévenin

D

Théorème de Thévenin Vu entre deux bornes A et B, tout réseau linéaire (sources et résistances) est équivalent à un générateur de tension idéal de force électromotrice E_{th} en série avec une résistance R_{th}.



générateur de Thévenin

★

À retenir

$$U_{AB} = E_{th} - R_{th} \times I \qquad I = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_C}$$

Méthode de détermination.

1. On débranche la charge placée entre A et B.
2. E_{th} est la **tension à vide** entre A et B (souvent calculée par un pont diviseur, ou mesurée au voltmètre).
3. On **éteint les sources** (source de tension idéale remplacée par un **fil**, source de courant idéale par un **circuit ouvert**) et on calcule la résistance vue entre A et B : c'est R_{th}.
4. On dessine le générateur de Thévenin, on rebranche la charge et on calcule I puis U_{AB}.

Ex

Exemple Charge $R_C = 2\,\text{k}\Omega$ alimentée par le pont précédent ($E = 12\,\text{V}$, $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$) :

$$E_{th} = \frac{2}{1+2} \times 12 = 8\,\text{V} \qquad R_{th} = \frac{1 \times 2}{1+2} \approx 667\,\Omega$$

$$I = \frac{8}{667 + 2\,000} = 3{,}0\,\text{mA} \qquad U_{AB} = 6{,}0\,\text{V}$$

On retrouve le résultat du pont chargé : le modèle permet de changer de charge sans tout recalculer.

En ligne : simulateurs du pont diviseur chargé et de la caractéristique du générateur de Thévenin : faites varier la charge et observez U et I.

✗ **Piège classique** Calculer E_{th} avec la charge branchée (il faut la tension **à vide**) ; éteindre une source de tension en la remplaçant par un circuit ouvert au lieu d'un fil.

\+ **Courant de court-circuit** – hors programme Si l'on relie A et B par un fil ($R_C = 0$), le générateur débite son **courant de court-circuit** $I_{cc} = \frac{E_{th}}{R_{th}}$, d'autant plus intense que R_{th} est faible : plusieurs centaines d'ampères pour une batterie d'accumulateurs (voir § 11.2), d'où la nécessité d'un fusible.

1.5 Signaux sinusoïdaux

En **régime sinusoïdal**, tensions et intensités varient dans le temps : on les note en minuscules, $u(t)$ et $i(t)$. Le réseau de distribution fournit une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz.

★ **À retenir**

$$u(t) = U_{max}\sin(\omega t + \Phi_u) = U\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \Phi_u)$$

$$i(t) = I_{max}\sin(\omega t + \Phi_i) = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \Phi_i)$$

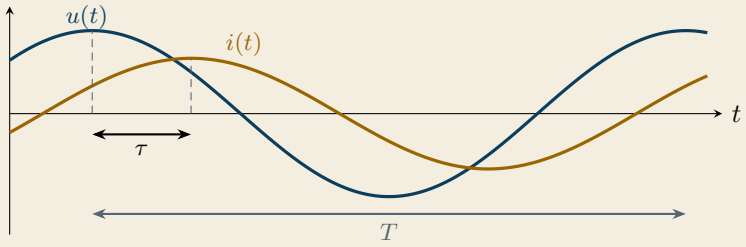
$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \qquad I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

U_{max} : valeur maximale (amplitude, en V) ; U : **valeur efficace**, celle qu'affiche un voltmètre en position AC (voir § 5.2) ; ω : pulsation ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ; Φ_u : phase à l'origine ; T : période (s) ; f : fréquence (Hz). Valeur crête à crête : $U_{cc} = 2\,U_{max}$.

Ex **Exemple : le réseau de distribution** $f = 50\,\text{Hz}$, donc $T = 20\,\text{ms}$ et $\omega = 2\pi \times 50 \approx 314\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. $U = 230\,\text{V}$, donc $U_{max} = 230\sqrt{2} \approx 325\,\text{V}$.

Déphasage



★ **À retenir**

$$\Phi = \Phi_u - \Phi_i \qquad |\Phi| = 2\pi \times \frac{\tau}{T} \text{ (en rad)}$$

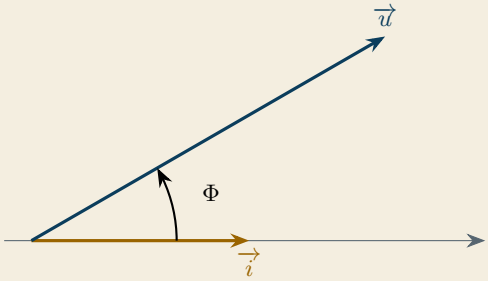
$$\text{ou} \qquad |\Phi| = 360 \times \frac{\tau}{T} \text{ (en degrés)}$$

τ : décalage temporel entre les deux signaux, **toujours positif**. Le signe de Φ se lit sur les courbes : $\Phi > 0$ si $u(t)$ est **en avance** sur $i(t)$ (elle passe la première par son maximum), $\Phi < 0$ si elle est en retard.

Sur la figure, $u(t)$ atteint son maximum avant $i(t)$: u est en avance, $\Phi > 0$ (charge inductive).

Représentation de Fresnel

À chaque grandeur sinusoïdale de même fréquence, on associe un **vecteur** : sa longueur est proportionnelle à la valeur efficace, son angle avec l'axe horizontal est la phase à l'origine.



$i(t)$ origine des phases
$\Phi = +30°$: charge inductive
angle orienté de $\vec{i}$ vers $\vec{u}$

Méthode. On trace à l'horizontale le signal pris comme origine des phases, avec une échelle choisie ; on trace le second en tenant compte du déphasage (au rapporteur) et de son échelle. L'angle Φ est **toujours orienté de $\vec{i}$ vers $\vec{u}$** et compté positivement dans le sens trigonométrique. La loi des mailles se traduit par une **somme de vecteurs** : si $u = u_1 + u_2$, alors $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ (mais en général $U \neq U_1 + U_2$).

Ex **Exemple** $I = 4\,\text{A}$, $U = 4{,}5\,\text{V}$ et $\Phi = -30°$, $i(t)$ origine des phases ; échelles : 1 cm pour 2 A et 1 cm pour 1,5 V. On trace $\vec{i}$ à l'horizontale (2 cm), puis $\vec{u}$ (3 cm) tourné de 30° dans le sens horaire ($\Phi < 0$: dipôle capacitif).

1.6 Impédances

Impédance complexe

D

Définition On associe à chaque grandeur sinusoïdale un nombre complexe $\underline{u} = [U\,;\Phi_u]$ (module : valeur efficace ; argument : phase). Un dipôle linéaire est caractérisé par son **impédance complexe** :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + jX \qquad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \Phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

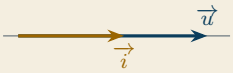
R : résistance, X : réactance (en Ω). En valeurs efficaces : $U = Z \times I$ (loi d'Ohm généralisée).

Si $X = 0$, le dipôle est **résistif** (u et i en phase) ; si $X > 0$, il est **inductif** (u en avance sur i) ; si $X < 0$, il est **capacitif** (u en retard sur i).

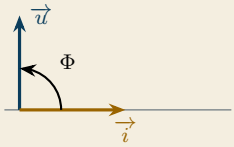
Les trois dipôles élémentaires

	Résistance	**Inductance**	**Condensateur**
Relation u–i	$u = R\,i$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Impédance $\underline{Z}$	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_L} = jL\omega$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$
Module Z	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \dfrac{1}{C\omega}$
Déphasage Φ	$0°$	$+90°$	$-90°$
Puissance active P	$R\,I^2 = \dfrac{U^2}{R}$	0	0
Puissance réactive Q	0	$L\omega\,I^2 = \dfrac{U^2}{L\omega}$	$-C\omega\,U^2 = -\dfrac{I^2}{C\omega}$

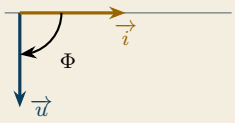
R



L



C



✗

Piège classique Ne pas oublier le signe de l'impédance du condensateur : $\underline{Z_C} = -j\,\frac{1}{C\omega}$ et $Q_C = -C\omega\,U^2 < 0$, alors que son module $Z_C = \frac{1}{C\omega}$ est positif. Un condensateur fournit de la puissance réactive, une inductance en absorbe.

Circuits série

★ **À retenir** En série, les impédances complexes s'ajoutent : $\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \dots$ On regroupe parties réelles et imaginaires, puis on calcule module et déphasage.

$$\text{RLC série : } \underline{Z_{eq}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Phi_{eq} = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

RL série : faire $C \to \infty$ (terme $\frac{1}{C\omega}$ nul) ; RC série : faire $L = 0$.

Ex **Exemple : bobine réelle** Une bobine ($R = 10\,\Omega$, $L = 35\,\text{mH}$) sous $U = 50\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$: $L\omega = 0{,}035 \times 314 \approx 11{,}0\,\Omega$.

$$Z = \sqrt{10^2 + 11^2} \approx 14{,}9\,\Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{50}{14{,}9} \approx 3{,}36\,\text{A}$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{11}{10}\right) \approx 47{,}7^\circ$$

1.7 Puissances en régime sinusoïdal

★ **À retenir**

$$P = U\,I\cos(\Phi)\ \text{(W)} \qquad Q = U\,I\sin(\Phi)\ \text{(VAR)}$$

$$S = U\,I = \sqrt{P^2 + Q^2}\ \text{(VA)} \qquad f_p = \cos(\Phi) = \frac{P}{S}$$

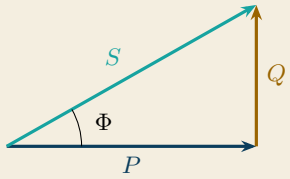
Ex **Exemple** Sous $U = 230\,\text{V}$, un récepteur absorbe $I = 10\,\text{A}$ avec $\Phi = 30^\circ$:

$$P = 230 \times 10 \times \cos(30^\circ) \approx 1\,992\,\text{W} \qquad Q = 230 \times 10 \times \sin(30^\circ) = 1\,150\,\text{VAR}$$

$$S = 2\,300\,\text{VA}$$

✗ **Piège classique** Régler la calculatrice dans la bonne unité d'angle : $\cos(30)$ en degrés, $\cos(\pi/6)$ en radians ($30^\circ \approx 0{,}524\,\text{rad}$).

Puissance active P : puissance convertie (chaleur, travail mécanique). Parmi R, L, C idéaux, seule R en absorbe ; un moteur en convertit une partie en travail, le reste en pertes. **Puissance réactive** Q : échangée avec les bobines ($Q > 0$) et les condensateurs ($Q < 0$) ; $Q = P\tan(\Phi)$. **Puissance apparente** S : sert à dimensionner câbles, transformateurs et protections.



triangle des puissances

Théorème de Boucherot

★ **À retenir · Théorème de Boucherot** Dans une installation, les puissances **actives** s'additionnent et les puissances **réactives** s'additionnent (algébriquement) ; on en déduit la puissance apparente totale. Les puissances apparentes, elles, ne s'additionnent pas.

$$P_{tot} = \sum P_i \qquad Q_{tot} = \sum Q_i$$

$$S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2}$$

Ex **Exemple : un atelier**

Récepteur	P (W)	Q (VAR)
Moteur 1	2 200	1 650
Moteur 2	1 500	1 300
4 radiateurs de 750 W	3 000	0
Installation	6 700	2 950

$$S_{tot} = \sqrt{6\,700^2 + 2\,950^2} \approx 7\,321\ \text{VA} \qquad f_p = \frac{6\,700}{7\,321} \approx 0{,}92$$

Relever le facteur de puissance

Un mauvais facteur de puissance oblige à surdimensionner l'installation (courant plus fort pour la même puissance active) et peut être facturé. On ajoute un **condensateur** en parallèle : il ne consomme pas de puissance active mais fournit de la puissance réactive ($Q_c < 0$) (voir § 2.7).

★ **À retenir**

$$Q_c = P\left(\tan(\Phi') - \tan(\Phi)\right) \qquad C = \frac{-Q_c}{\omega\, U^2}$$

Φ : déphasage avant correction ; Φ' : déphasage souhaité ; U : tension efficace aux bornes du condensateur.

Ex

Exemple $P = 150\,\text{W}$, $f_p = 0{,}55$ sous $U = 122\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$; on vise $f_p' = 0{,}95$.

$$Q_c = 150 \times \big(\tan(\arccos(0{,}95)) - \tan(\arccos(0{,}55))\big)$$

$$Q_c = 150 \times (0{,}329 - 1{,}518) \approx -178\,\text{VAR}$$

$$C = \frac{178}{314 \times 122^2} \approx 38\,\mu\text{F}$$

Pourquoi relever le facteur de puissance ?

À puissance active P égale, le courant en ligne vaut

$$I = \frac{P}{U\cos(\Phi)}$$

plus $\cos(\Phi)$ est faible, plus le courant est fort. Relever le facteur de puissance permet donc :

- de **réduire le courant** dans les câbles, donc les pertes par effet Joule ($R\,I^2$) et les chutes de tension ;
- de **libérer de la puissance** sur le transformateur et les protections, sans les changer ;
- d'**éviter les pénalités** : au-delà d'un certain seuil, le fournisseur facture l'énergie réactive consommée.

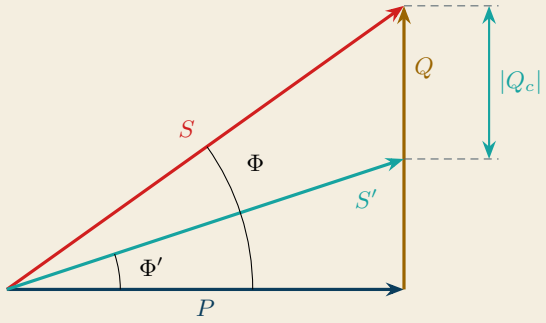
✎

Méthode en 4 étapes.

1. Faire le bilan des puissances de l'installation (Boucherot) : P, Q, puis $\tan(\Phi) = Q/P$.
2. Fixer l'objectif $\cos(\Phi')$ (en général 0,93 à 0,95) et en déduire $\tan(\Phi')$.
3. Calculer $Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi))$, puis la capacité :
$$C = \frac{-Q_c}{\omega\,U^2}$$
4. Vérifier le nouveau courant, plus faible que I :
$$I' = \frac{P}{U\cos(\Phi')}$$

Ex

Exemple : l'atelier précédent, sous $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$ **1.** $P = 6\,700\,\text{W}$ et $Q = 2\,950\,\text{VAR}$, donc $\tan(\Phi) = 2\,950/6\,700 \approx 0{,}440$; $\cos(\Phi) \approx 0{,}915$ et $I = S/U = 7\,321/230 \approx 31{,}8\,\text{A}$.
2. Objectif $\cos(\Phi') = 0{,}98$, d'où $\tan(\Phi') \approx 0{,}203$.
3. $Q_c = 6\,700 \times (0{,}203 - 0{,}440) \approx -1\,590\,\text{VAR}$ et $C = 1\,590/(314 \times 230^2) \approx 96\,\mu\text{F}$.
4. $I' = 6\,700/(230 \times 0{,}98) \approx 29{,}7\,\text{A}$: le courant en ligne baisse de 2,1 A pour la même puissance utile.



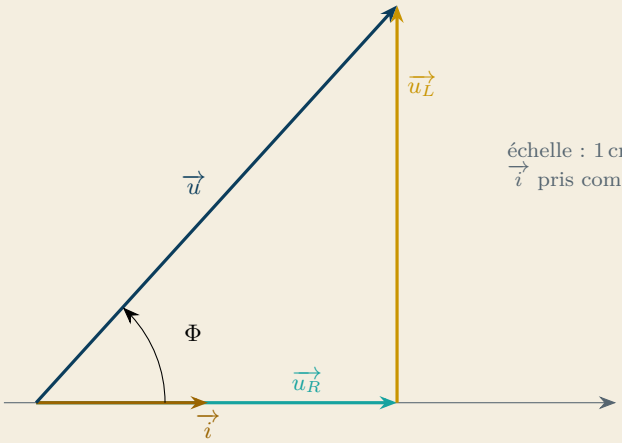
Le condensateur fournit $|Q_c|$: la puissance réactive demandée au réseau passe de Q à $Q' = Q + Q_c$, la puissance apparente de S à S'. La puissance active P ne change pas.

Méthode générale en régime sinusoïdal

Étudier un circuit en alternatif.

1. Repérer la fréquence et calculer la pulsation $\omega = 2\pi f$.
2. Calculer l'impédance de chaque dipôle : R, $L\omega$, $\frac{1}{C\omega}$.
3. Associer les impédances (en série : on ajoute les complexes, pas les modules), puis en déduire Z et Φ.
4. Calculer le courant $I = \frac{U}{Z}$, puis les tensions aux bornes de chaque dipôle.
5. Faire le bilan des puissances P, Q, S et vérifier : $P = R\,I^2$ et $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Piège classique : additionner des valeurs efficaces La loi des mailles s'écrit sur les valeurs instantanées ($u = u_R + u_L$) ou sur les vecteurs de Fresnel ($\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_R} + \overrightarrow{u_L}$), jamais sur les valeurs efficaces. Pour la bobine réelle de l'exemple du paragraphe « Circuits série » ($R = 10\,\Omega$, $L\omega \approx 11\,\Omega$, $I \approx 3{,}36\,\text{A}$) : $U_R = R\,I \approx 33{,}6\,\text{V}$ et $U_L = L\omega\,I \approx 37{,}0\,\text{V}$. Leur somme, 70,6 V, n'est pas égale à $U = 50\,\text{V}$: on retrouve bien $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \approx 50\,\text{V}$.



échelle : 1 cm pour 10 V
$\overrightarrow{i}$ pris comme origine des phases

L'essentiel

Chapitre 1

Régime continu

Loi d'Ohm	$U = R \times I$
Puissance électrique	$P = U \times I$
Effet Joule	$P = R \times I^2 = \dfrac{U^2}{R}$
Énergie	$E = P \times \Delta t \qquad 1\,\mathrm{W \cdot h} = 3\,600\,\mathrm{J}$
Loi des mailles	$\sum U_{sens\ de\ parcours} = \sum U_{sens\ inverse}$
Loi des nœuds	$\sum I_{arrivant} = \sum I_{partant}$
Résistances en série	$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$
Résistances en parallèle	$\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_n}$
Deux résistances en parallèle	$R_{eq} = \dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$
n résistances identiques	série : $n\,R \qquad$ parallèle : $\dfrac{R}{n}$
Pont diviseur à vide	$U_S = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \times U_E$
Générateur de Thévenin	$U_{AB} = E_{th} - R_{th} \times I$
Courant dans une charge R_C	$I = \dfrac{E_{th}}{R_{th} + R_C}$

Régime variable (sinusoïdal monophasé)

Tension sinusoïdale	$u(t) = U_{max}\sin(\omega t + \Phi_u)$
Valeurs efficaces	$U = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}} \qquad I = \dfrac{I_{max}}{\sqrt{2}}$
Fréquence, pulsation	$f = \dfrac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$
Déphasage	$\Phi = \Phi_u - \Phi_i$
Déphasage mesuré	$\lvert\Phi\rvert = 360 \times \dfrac{\tau}{T}\ (^\circ) = 2\pi \times \dfrac{\tau}{T}\ (\text{rad})$
Impédance	$\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + jX \qquad Z = \dfrac{U}{I}$
Module et déphasage	$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \Phi = \arctan\left(\dfrac{X}{R}\right)$
Résistance	$\underline{Z_R} = R \qquad \Phi = 0^\circ$
Inductance	$\underline{Z_L} = jL\omega \qquad Z_L = L\omega \qquad \Phi = +90^\circ$
Condensateur	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega} \qquad Z_C = \dfrac{1}{C\omega} \qquad \Phi = -90^\circ$
Dipôles en série	$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \dots$
RLC série	$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$
Puissance active	$P = U\,I\cos(\Phi) = R\,I^2$
Puissance réactive	$Q = U\,I\sin(\Phi) = P\tan(\Phi)$
Réactive d'une bobine, d'un condensateur	$Q_L = L\omega\,I^2 \qquad Q_C = -C\omega\,U^2$
Puissance apparente	$S = U\,I = \sqrt{P^2 + Q^2}$
Facteur de puissance	$f_p = \cos(\Phi) = \dfrac{P}{S}$
Théorème de Boucherot	$P_{tot} = \sum P_i \qquad Q_{tot} = \sum Q_i$
Relèvement de f_p	$Q_c = P\left(\tan(\Phi') - \tan(\Phi)\right) \qquad C = \dfrac{-Q_c}{\omega\,U^2}$

Exercices

Chapitre 1

Régime continu

Exercice 1.1 – Éclairage LED d'une armoire ★☆☆

Dans une usine d'embouteillage, les techniciens de maintenance se plaignent de mal voir à l'intérieur des armoires électriques. Le service maintenance installe dans chaque armoire un ruban de LED, alimenté par l'alimentation 24 V continu déjà présente. Avant d'équiper les 40 armoires du site, le responsable veut connaître la consommation et le coût d'un éclairage.

Sur l'armoire d'essai, le ruban est alimenté sous $U = 24\,\text{V}$ et une pince ampèremétrique indique $I = 0{,}75\,\text{A}$.

1. Calculer la puissance P absorbée par le ruban.
2. Calculer le rapport $R = U/I$ au point de fonctionnement mesuré.
3. L'éclairage reste allumé 10 h par jour. Calculer l'énergie consommée en une journée, en $\text{W}\cdot\text{h}$ puis en J.
4. L'atelier fonctionne 250 jours par an et le kilowattheure coûte 0,25 €. Calculer le coût annuel de cet éclairage pour une armoire, puis pour les 40 armoires.

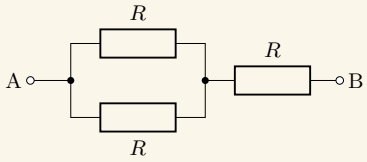
→ corrigé p. 26

Exercice 1.2 – Associer des résistances de décharge ★☆☆

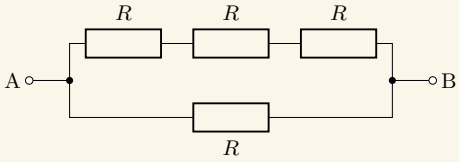
Après la coupure d'un variateur de vitesse, ses condensateurs restent chargés plusieurs minutes : c'est un danger pour le technicien qui intervient. Sur un banc de formation, on veut réaliser une « boîte de décharge » à partir du stock de l'atelier, qui ne contient que des résistances identiques de $R = 100\,\Omega$. Il faut savoir quelles valeurs on peut obtenir en les associant.

1. Calculer la résistance équivalente obtenue en les plaçant toutes les quatre en série, puis toutes les quatre en parallèle.
2. Calculer la résistance équivalente des deux montages ci-dessous.

(a)



(b)



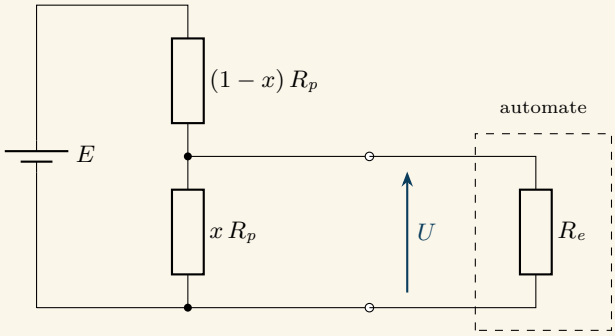
3. Le montage (a) est placé sous $U = 48\,\text{V}$. Calculer le courant I absorbé, la tension aux bornes des deux résistances en parallèle et le courant dans chacune d'elles. Vérifier la loi des nœuds.
4. Calculer la puissance totale dissipée dans le montage (a).

→ corrigé p. 26

Exercice 1.3 – Capteur de niveau potentiométrique ★★☆

Une station de traitement des eaux surveille le niveau de ses cuves de réactif. Sur une cuve ancienne, le niveau est mesuré par un flotteur relié mécaniquement au curseur d'un potentiomètre : quand le niveau monte, le curseur monte. La tension obtenue est lue par l'automate, qui déclenche le remplissage. Lors du remplacement de l'automate, les opérateurs constatent que le niveau affiché est faux : on cherche pourquoi.

Le potentiomètre a une résistance totale $R_p = 10\,\text{k}\Omega$, alimenté sous $E = 10\,\text{V}$. La fraction x (entre 0 et 1) indique la position du curseur : la partie basse du potentiomètre vaut $x\,R_p$, la partie haute $(1-x)\,R_p$. La tension U est envoyée sur l'entrée analogique d'un automate, de résistance d'entrée R_e.



I- Entrée de l'automate débranchée

1. Montrer que $U = x\,E$. Calculer U pour $x = 0{,}25$, $x = 0{,}5$ et $x = 0{,}75$.

2. Pourquoi dit-on que ce capteur est « linéaire » ?

II- Entrée de l'automate branchée ($R_e = 100\,\text{k}\Omega$)

3. Pour $x = 0{,}5$, calculer la résistance équivalente à $x\,R_p$ en parallèle avec R_e, puis la tension U. Calculer l'écart relatif avec la valeur à vide.

4. Reprendre le calcul avec une ancienne carte d'entrées de résistance $R_e = 10\,\text{k}\Omega$. Conclure : quelle condition doit vérifier R_e ?

→ corrigé p. 27

Exercice 1.4 – Batterie de démarrage d'un groupe électrogène ★★☆

Un hôpital dispose d'un groupe électrogène de secours qui doit démarrer en moins de 15 s en cas de coupure du réseau. Son moteur diesel est lancé par un démarreur électrique alimenté par une batterie 12 V. Chaque mois, le technicien teste la batterie : si elle est trop faible, le groupe risque de ne pas démarrer le jour où on en a besoin. On modélise la batterie par un générateur de Thévenin $(E_{th}\,;R_{th})$.

I- Identification du modèle

Batterie seule, un voltmètre indique $U_0 = 12{,}7\,\text{V}$. Lors d'un essai de décharge à $I_1 = 150\,\text{A}$, la tension à ses bornes vaut $U_1 = 11{,}2\,\text{V}$.

1. Justifier que $E_{th} = U_0$.
2. Écrire la relation entre U_1, E_{th}, R_{th} et I_1. En déduire R_{th}.
3. Faire $R = 0$ dans $I = E_{th}/(R_{th} + R)$ pour établir le courant de court-circuit I_{cc}, puis le calculer. Pourquoi manipuler les bornes avec précaution ?

II- Démarrage

Le démarreur, pendant le lancement, se comporte comme une résistance $R_d = 30\,\text{m}\Omega$; les câbles (aller et retour) ont une résistance totale $R_c = 4\,\text{m}\Omega$.

4. Dessiner le schéma équivalent du circuit de démarrage.
5. Calculer le courant de démarrage I, la tension aux bornes de la batterie et celle aux bornes du démarreur.
6. Calculer la puissance reçue par le démarreur, puis les pertes par effet Joule dans les câbles et dans la batterie.
7. En hiver, la résistance interne de la batterie double. Expliquer pourquoi le démarrage devient difficile.

→ corrigé p. 27

Exercice 1.5 – Bus 24 V le long d'un convoyeur ★★★

Une plateforme logistique allonge un convoyeur de tri : le nouveau tronçon de 40 m comporte des aiguillages pneumatiques commandés par des électrovannes, des capteurs de présence et un module d'entrées/sorties déporté qui dialogue avec l'automate. Tous ces récepteurs sont regroupés dans un coffret en bout de convoyeur, alimenté en 24 V continu depuis l'armoire par un câble à deux conducteurs posé dans le chemin de câbles. Le bureau d'études a prévu un câble de $1{,}5\,\text{mm}^2$. Lors des essais, certaines électrovannes ne s'ouvrent pas franchement et le module déporté redémarre de temps en temps. On vous demande de vérifier le dimensionnement.

Données

- Alimentation de l'armoire (modèle de Thévenin) : $E = 24{,}5\,\text{V}$, $R_s = 0{,}05\,\Omega$.
- Câble : longueur $L = 40\,\text{m}$, section $S = 1{,}5\,\text{mm}^2$ par conducteur, résistivité du cuivre $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m}$.
- Récepteurs : 6 électrovannes de 0,25 A, 10 capteurs de 20 mA, un module d'entrées/sorties déporté de 0,4 A.
- Au moment de leur ouverture, les électrovannes appellent pendant 50 ms un courant 4 fois plus grand que leur courant nominal.
- Cahier des charges : tension aux bornes du coffret d'au moins 22,8 V en fonctionnement normal, et d'au moins 20,4 V (24 V − 15 %) lors de l'ouverture simultanée des 6 électrovannes.

A- Le câble

1. Un conducteur de longueur ℓ et de section S a pour résistance $R = \rho\,\frac{\ell}{S}$. Calculer la résistance R_c du câble, en tenant compte de l'aller et du retour.

B- Fonctionnement normal

2. Par la loi des nœuds, calculer le courant I appelé par le coffret.

3. Dessiner le schéma équivalent (alimentation, câble, coffret) et calculer la tension U_f aux bornes du coffret. Le cahier des charges est-il respecté ?

4. Calculer la puissance perdue dans le câble.

C- Ouverture des électrovannes

5. Calculer le courant appelé lorsque les 6 électrovannes s'ouvrent ensemble, puis la tension aux bornes du coffret. Conclure.

D- Choix de la section

6. Calculer la résistance maximale du câble permettant de respecter le critère en fonctionnement normal, puis la section minimale correspondante.

7. On choisit la section normalisée $2{,}5\,\text{mm}^2$. Vérifier les deux critères du cahier des charges.

→ corrigé p. 28

Régime sinusoïdal

Exercice 1.6 – Lire l'expression de la tension du réseau ★☆☆

Un apprenti relève à l'oscilloscope la tension d'une prise de courant de l'atelier, à travers une sonde différentielle. Le logiciel de l'oscilloscope modélise le signal et affiche son expression mathématique : $u(t) = 325\sin(314\,t)$, avec u en volts et t en secondes. L'apprenti doit interpréter cette expression.

1. Donner la valeur maximale U_{max} et la pulsation ω.

2. Calculer la fréquence f, la période T et la valeur efficace U.

3. Quelle valeur affiche un voltmètre en position AC branché sur cette prise ? Et en position DC, où il mesure la valeur moyenne ?

4. Calculer la valeur de $u(t)$ à $t = 2\,\text{ms}$ et à $t = 5\,\text{ms}$. Que représente l'instant $t = 5\,\text{ms}$?

→ corrigé p. 30

Exercice 1.7 – Plaque signalétique d'une pompe ★☆☆

Un agriculteur installe une pompe d'irrigation alimentée par le réseau monophasé de sa ferme. Avant de choisir la protection et de prévoir sa facture, il relève la plaque signalétique du moteur : $230\,\text{V}$; $8\,\text{A}$; $50\,\text{Hz}$; $\cos(\Phi) = 0{,}8$.

1. Calculer la puissance apparente S et la puissance active P absorbées au régime nominal.

2. Calculer le déphasage Φ, puis la puissance réactive Q. Le moteur est-il inductif ou capacitif ?
3. Représenter le triangle des puissances (échelle : 1 cm pour 250 W, VAR ou VA).
4. La pompe fonctionne 7 h par jour. Calculer l'énergie active consommée chaque jour.

→ corrigé p. 30

Exercice 1.8 – Identifier la bobine d'un contacteur ★★☆

Dans un atelier de maintenance, on dispose d'un lot de contacteurs dont les bobines ont perdu leur marquage : on ne sait plus si elles sont prévues pour l'alternatif ou le continu, ni leur consommation. Pour les identifier, un technicien réalise deux essais sur l'une d'elles, qu'il modélise par une résistance R en série avec une inductance L.

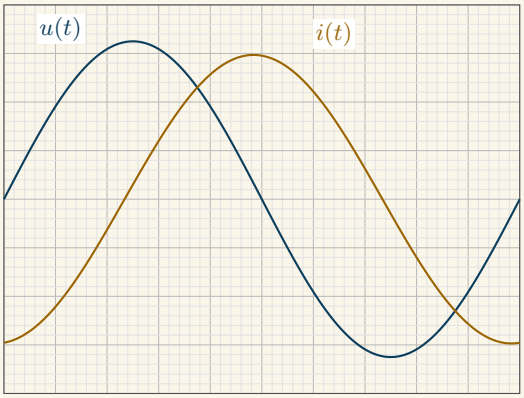
I- Mesure en continu

Sous une tension continue de 24 V, l'ampèremètre indique 0,436 A.

1. Pourquoi l'inductance n'intervient-elle pas en régime continu ? En déduire la valeur de R.
2. Que se passerait-il si l'on branchait par erreur cette bobine sur une tension **continue** de 230 V ?

II- Mesure en sinusoïdal

Sous $U = 230$ V, $f = 50$ Hz, le courant vaut $I = 0{,}42$ A. L'oscillogramme ci-dessous montre $u(t)$ (voie 1, sonde 1/100, 1 V/div) et $i(t)$ (voie 2, pince 1 V/A, 0,2 V/div) ; base de temps : 2 ms/div.



3. Vérifier sur l'oscillogramme la période, la valeur maximale de $u(t)$ et celle de $i(t)$.
4. Mesurer le décalage τ entre les deux signaux et en déduire le déphasage Φ. Le courant est-il en avance ou en retard ?
5. Calculer l'impédance Z de la bobine, sa réactance $X = L\omega$ et son inductance L. Retrouver Φ par le calcul.

6. Calculer les puissances P, Q et S absorbées par la bobine, et son facteur de puissance.

→ corrigé p. 30

Exercice 1.9 – Bilan de puissances d'un petit atelier ★★☆

Un artisan carrossier reçoit sa facture d'électricité : son fournisseur lui signale un mauvais facteur de puissance et l'incite à installer une compensation. L'atelier est alimenté sous $U = 230\,\text{V}$, $50\,\text{Hz}$; on étudie le cas le plus défavorable, où tous les appareils fonctionnent en même temps. L'atelier comporte :

- ▷ un compresseur : $P_1 = 3\,\text{kW}$, $\cos(\Phi_1) = 0{,}70$ (inductif) ;
- ▷ un éclairage LED : $P_2 = 600\,\text{W}$, $\cos(\Phi_2) = 0{,}90$ (inductif) ;
- ▷ des radiateurs : $P_3 = 1{,}5\,\text{kW}$.

1. Calculer la puissance réactive de chaque récepteur.
2. Par le théorème de Boucherot, calculer les puissances active, réactive et apparente de l'atelier, ainsi que son facteur de puissance.
3. Calculer l'intensité du courant en ligne.
4. Un élève additionne les puissances apparentes des trois récepteurs. Quel résultat obtient-il ? Pourquoi est-il faux ?
5. On veut relever le facteur de puissance à 0,95. Calculer la puissance réactive du condensateur à installer, sa capacité, puis le nouveau courant en ligne.

→ corrigé p. 31

Exercice 1.10 – Compensation d'un four à induction ★★★

Une fonderie coule des pièces en fonte dans un four à induction : une grosse bobine, parcourue par un courant alternatif, crée un champ magnétique variable qui chauffe le métal placé à l'intérieur. Ce type de four consomme énormément de puissance réactive. Depuis sa mise en service, la fonderie paie des pénalités d'énergie réactive et la ligne qui alimente le four chauffe anormalement. Le responsable maintenance vous demande d'étudier l'installation d'une batterie de condensateurs.

Données

- ▷ Four : monophasé, $U = 400\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$, puissance active $P = 20\,\text{kW}$, facteur de puissance $\cos(\Phi) = 0{,}25$.
- ▷ Ligne entre le tableau et le four : résistance totale $R_L = 0{,}1\,\Omega$.
- ▷ Le contrat d'énergie impose $\cos(\Phi) \geq 0{,}93$ pour ne pas payer de pénalités.

A- État des lieux

1. Calculer la puissance apparente S du four et l'intensité I en ligne.
2. Calculer Q. Pourquoi est-elle positive, vu la constitution du four ?

3. Calculer les pertes par effet Joule dans la ligne. Que représentent-elles par rapport à la puissance utile du four ?

B- Modèle électrique du four

On représente le four par une résistance R (le métal qui chauffe) en série avec une inductance L (la bobine).

4. Quel élément absorbe la puissance active ? En déduire R.

5. Quel élément absorbe la puissance réactive ? En déduire la réactance X, puis l'inductance L.

C- Compensation complète ($\cos(\Phi') = 1$)

On place une batterie de condensateurs en parallèle sur le four.

6. Quelle puissance réactive totale faut-il pour obtenir $\cos(\Phi') = 1$? En déduire la puissance réactive Q_c de la batterie, puis sa capacité C.

7. Calculer le nouveau courant I' dans la ligne et les nouvelles pertes. Commenter.

8. Construire le diagramme de Fresnel des courants du four, des condensateurs et de la ligne (u origine des phases ; 1 cm pour 25 A).

D- Solution retenue ($\cos(\Phi') = 0{,}93$)

9. Calculer la capacité nécessaire pour $\cos(\Phi') = 0{,}93$ et le courant en ligne.

10. Comparer les solutions C et D, puis rédiger en quelques lignes une recommandation pour le responsable maintenance.

→ corrigé p. 32

Sujets de type BTS

Chapitre 1

Sujet BTS 1.A – Éclairage autonome d'un abri voyageurs

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 45 minutes

Une communauté de communes équipe ses abris de bus d'un éclairage autonome : un panneau photovoltaïque charge le jour une batterie 12 V, qui alimente la nuit deux panneaux LED. On veut vérifier le dimensionnement de l'installation proposée par le fournisseur.

Données

- Deux panneaux LED 12 V de 15 W chacun, allumés 12 h par nuit en hiver.
- Batterie proposée : 12 V, capacité $C_{bat} = 100\,\text{A}\cdot\text{h}$; l'énergie stockée vaut $E_{bat} = U \times C_{bat}$ (en $\text{W}\cdot\text{h}$). Pour ne pas l'abîmer, on ne la décharge jamais à plus de 50 %. Le cahier des charges impose **3 nuits d'autonomie** sans soleil.
- Câble entre le coffret de la batterie et les panneaux LED : longueur 15 m, deux conducteurs en cuivre, $\rho = 0{,}017\,5\,\Omega\cdot\text{mm}^2/\text{m}$; résistance d'un

conducteur de longueur ℓ et de section S : $R = \rho \frac{\ell}{S}$. Chute de tension admise : 3 % de 12 V.

- ▷ Essais de la batterie : à vide, $U_0 = 12{,}8\,\text{V}$; en débitant 20 A, $U = 12{,}4\,\text{V}$.
- ▷ En hiver, le panneau photovoltaïque produit l'équivalent de 1,5 h par jour à sa puissance crête ; le rendement de la charge de la batterie vaut 0,85 (seuls 85 % de l'énergie produite par le panneau sont stockés).

Partie A – Besoin énergétique

A.1. Calculer la puissance absorbée par l'éclairage et le courant fourni par la batterie.

A.2. Calculer l'énergie consommée pendant une nuit d'hiver, en W · h.

Partie B – Batterie

B.1. Calculer l'énergie stockée dans la batterie proposée, puis l'énergie réellement utilisable.

B.2. Combien de nuits d'autonomie offre-t-elle ? Le cahier des charges est-il respecté ?

B.3. Calculer la capacité minimale (en A · h) permettant 3 nuits d'autonomie. Les capacités normalisées sont 100, 150, 200 et 250 A · h : laquelle choisir ?

Partie C – Câble

C.1. Calculer la résistance du câble de 2,5 mm^2 prévu par le fournisseur (aller et retour), puis la chute de tension. Est-elle acceptable ?

C.2. Déterminer la section minimale, puis choisir une section normalisée (2,5 mm^2, 4 mm^2, 6 mm^2) et vérifier la chute de tension.

Partie D – Modèle de la batterie

D.1. À partir des essais, déterminer le modèle de Thévenin $(E_{th}\,;R_{th})$ de la batterie.

D.2. Calculer la tension aux bornes de la batterie lorsqu'elle alimente l'éclairage.

D.3. Les bornes de la batterie sont accidentellement reliées par un fil, de résistance nulle. En faisant $R = 0$ dans $I = E_{th}/(R_{th} + R)$ (courant débité dans une charge R), établir l'expression du courant de court-circuit I_{cc}, puis le calculer. Justifier la présence d'un fusible au plus près de sa borne +.

Partie E – Panneau photovoltaïque

E.1. Quelle énergie le panneau doit-il produire chaque jour d'hiver pour recharger la batterie d'une nuit de consommation ?

E.2. En déduire la puissance crête minimale du panneau. Le fournisseur propose deux panneaux de 150 W crête : conclure.

→ corrigé p. 33

Sujet BTS 1.B – Ventilation d'un parking souterrain

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Un parking souterrain est ventilé par deux extracteurs identiques entraînés par des moteurs monophasés, et éclairé par des réglettes LED. Le tableau du parking est alimenté sous $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$, par un câble de $60\,\text{m}$. L'exploitant constate que son fournisseur lui facture de l'énergie réactive et veut améliorer l'installation.

Données

- Mesures sur un extracteur en fonctionnement nominal : wattmètre $P_v = 1{,}2\,\text{kW}$; ampèremètre $I_v = 7{,}5\,\text{A}$; voltmètre $U = 230\,\text{V}$.
- Éclairage : 40 réglettes LED de $36\,\text{W}$, facteur de puissance 0,92 (inductif).
- Câble d'alimentation : deux conducteurs en cuivre de $10\,\text{mm}^2$, longueur $60\,\text{m}$, $\rho = 0{,}017\,5\,\Omega\cdot\text{mm}^2/\text{m}$; sa réactance est négligée. Résistance d'un conducteur : $R = \rho\,\frac{\ell}{S}$.

Partie A – Étude d'un extracteur

A.1. Calculer la puissance apparente S_v, le facteur de puissance et le déphasage Φ_v d'un extracteur.

A.2. Calculer sa puissance réactive Q_v. Le moteur est-il inductif ou capacitif ?

A.3. On modélise le moteur par une résistance R en série avec une inductance L. Calculer R, la réactance X et L.

Partie B – Bilan de l'installation

B.1. Calculer les puissances active et réactive de l'éclairage.

B.2. À l'aide du théorème de Boucherot, calculer les puissances P, Q et S de l'installation (deux extracteurs et l'éclairage en fonctionnement), puis son facteur de puissance.

B.3. Calculer l'intensité I du courant dans le câble d'alimentation.

Partie C – Câble d'alimentation

C.1. Calculer la résistance totale R_L du câble (aller et retour).

C.2. Calculer les pertes par effet Joule dans le câble.

C.3. La chute de tension en ligne s'obtient, réactance négligée, par $\Delta U \approx R_L\,I\cos(\Phi)$. La calculer et l'exprimer en pourcentage de $230\,\text{V}$.

Partie D – Relèvement du facteur de puissance

Pour ne plus payer d'énergie réactive, il faut un facteur de puissance d'au moins 0,95. On installe une batterie de condensateurs en tête du tableau.

D.1. Calculer la puissance réactive que doit fournir la batterie de condensateurs, puis sa capacité C.

D.2. Calculer le nouveau courant en ligne I' et les nouvelles pertes dans le câble.

D.3. Tracer le diagramme de Fresnel des courants (tension u origine des phases ; échelle 1 cm pour 3 A) : courant I de l'installation, courant I_C dans les condensateurs, courant I' en ligne.

D.4. Rédiger, en quelques lignes, une conclusion pour l'exploitant.

→ corrigé p. 35

Corrigés

Chapitre 1

Régime continu

✓ Corrigé de l'exercice 1.1 – Éclairage LED d'une armoire

1. $P = U \times I = 24 \times 0{,}75$ soit $\boxed{P = 18\,\text{W}}$

2. Rapport : $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{24}{0{,}75}$ soit $\boxed{R = 32\,\Omega}$

3. $E = P \times \Delta t = 18 \times 10$ soit $\boxed{E = 180\,\text{W}\cdot\text{h}}$ et en joules ($\Delta t = 36\,000\,\text{s}$) : $E = 18 \times 36\,000 = 648\,000\,\text{J} = 648\,\text{kJ}$.

4. Énergie annuelle : $250 \times 0{,}180 = 45\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

Coût : $45 \times 0{,}25$ soit $\boxed{\text{coût} \approx 11{,}25\ €\ \text{par an}}$; 40 armoires : 450 € par an.

✎ **Méthode** Pour obtenir une énergie en kW · h, on exprime la puissance en kW et la durée en heures. Pour l'obtenir en joules, puissance en W et durée en secondes.

✓ Corrigé de l'exercice 1.2 – Associer des résistances de décharge

1. Série : $R_{eq} = 4R$ soit $\boxed{R_{eq} = 400\,\Omega}$; parallèle : $R_{eq} = \dfrac{R}{4}$ soit $\boxed{R_{eq} = 25\,\Omega}$

2. (a) Les deux résistances de gauche sont en parallèle : $\dfrac{R}{2} = 50\,\Omega$; cette association est en série avec la troisième :

$$R_{eq,a} = 50 + 100 \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{eq,a} = 150\,\Omega}$$

(b) La branche du haut comporte trois résistances en série ($3R = 300\,\Omega$), en parallèle avec la quatrième :

$$R_{eq,b} = \frac{300 \times 100}{300 + 100} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{eq,b} = 75\,\Omega}$$

3. $I = \dfrac{U}{R_{eq,a}} = \dfrac{48}{150}$ soit $\boxed{I = 0{,}32\,\text{A}}$

Tension aux bornes de l'association parallèle ($50\,\Omega$) : $U_{//} = 50 \times 0{,}32 = 16\,\text{V}$; chaque résistance est traversée par $16/100 = 0{,}16\,\text{A}$.

Loi des nœuds : $0{,}16 + 0{,}16 = 0{,}32\,\text{A} = I$ ✓. Contrôle par la loi des mailles : la résistance en série reçoit $100 \times 0{,}32 = 32\,\text{V}$ et $32 + 16 = 48\,\text{V}$ ✓.

4. $P = U \times I = 48 \times 0{,}32$ soit $\boxed{P = 15{,}4\,\text{W}}$

✓ Corrigé de l'exercice 1.3 – Capteur de niveau potentiométrique

I- Entrée débranchée

1. Aucun courant ne sort par le curseur : les deux parties du potentiomètre sont en série, parcourues par $I = \frac{E}{R_p}$. D'où $U = x\,R_p \times \frac{E}{R_p}$, soit $\boxed{U = x\,E}$ (pont diviseur à vide).
$x = 0{,}25 : U = 2{,}5\,\text{V}$; $x = 0{,}5 : U = 5\,\text{V}$; $x = 0{,}75 : U = 7{,}5\,\text{V}$.

2. U est proportionnelle à x, donc au niveau : la caractéristique $U = f(x)$ est une droite passant par l'origine. C'est la définition d'un capteur linéaire.

II- Entrée branchée

3. Pour $x = 0{,}5$: $x\,R_p = 5\,\text{k}\Omega$ en parallèle avec $R_e = 100\,\text{k}\Omega$:

$$R_{eq} = \frac{5 \times 100}{5 + 100} \approx 4{,}76\,\text{k}\Omega$$

$$U = \frac{4{,}76}{5 + 4{,}76} \times 10 \quad \text{soit} \quad \boxed{U \approx 4{,}88\,\text{V}}$$

Écart relatif : $\dfrac{4{,}88 - 5}{5} \approx -2{,}4\,\%$. L'automate lit une tension un peu trop faible.

4. Avec $R_e = 10\,\text{k}\Omega$: $R_{eq} = \dfrac{5 \times 10}{15} \approx 3{,}33\,\text{k}\Omega$ et $U = \dfrac{3{,}33}{5 + 3{,}33} \times 10 \approx 4{,}0\,\text{V}$, soit un écart de $-20\,\%$: la mesure est inutilisable.

Conclusion : la formule du pont à vide n'est valable que si la charge prélève très peu de courant, c'est-à-dire si $\boxed{R_e \gg R_p}$ (au moins 10 fois, idéalement 100 fois plus grande).

✓ Corrigé de l'exercice 1.4 – Batterie de démarrage d'un groupe électrogène

I- Identification du modèle

1. À vide, $I = 0$: la chute de tension $R_{th} \times I$ est nulle, donc $U_0 = E_{th}$, soit $\boxed{E_{th} = 12{,}7\,\text{V}}$

2. $U_1 = E_{th} - R_{th} \times I_1$, d'où

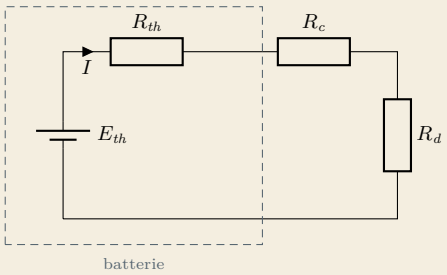
$$R_{th} = \frac{E_{th} - U_1}{I_1} = \frac{12{,}7 - 11{,}2}{150} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{th} = 0{,}010\,\Omega = 10\,\text{m}\Omega}$$

3. Pour une charge de résistance nulle ($R = 0$) : $I_{cc} = \dfrac{E_{th}}{R_{th}} = \dfrac{12{,}7}{0{,}010}$ soit $\boxed{I_{cc} \approx 1\,270\,\text{A}}$

Un court-circuit accidentel (clé posée sur les deux bornes) ferait circuler plus de 1 000 A : la clé rougit, la batterie peut exploser. On retire toujours la borne − en premier.

II- Démarrage

4. Le générateur $(E_{th}\,;R_{th})$ débite dans R_c et R_d en série :



5. Loi des mailles : $E_{th} = (R_{th} + R_c + R_d)\,I$, d'où

$$I = \frac{12{,}7}{0{,}010 + 0{,}004 + 0{,}030} = \frac{12{,}7}{0{,}044} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 289\,\text{A}}$$

$U_{bat} = E_{th} - R_{th}\,I = 12{,}7 - 0{,}010 \times 289 \approx 9{,}8\,\text{V}$; $U_d = R_d\,I = 0{,}030 \times 289 \approx 8{,}7\,\text{V}$.

6. $P_d = R_d\,I^2 = 0{,}030 \times 289^2 \approx 2{,}5\,\text{kW}$; câbles : $0{,}004 \times 289^2 \approx 333\,\text{W}$; batterie : $0{,}010 \times 289^2 \approx 833\,\text{W}$.

Vérification : $E_{th} \times I = 12{,}7 \times 288{,}6 \approx 3\,665\,\text{W} \approx 2\,499 + 333 + 833$ ✓.

7. Avec $R_{th} = 20\,\text{m}\Omega$: $I = \dfrac{12{,}7}{0{,}054} \approx 235\,\text{A}$, $U_d \approx 7{,}1\,\text{V}$ et $P_d \approx 1{,}66\,\text{kW}$: le démarreur dispose d'un tiers de puissance en moins, alors que l'huile froide rend le moteur plus dur à entraîner.

✓ Corrigé de l'exercice 1.5 – Bus 24 V le long d'un convoyeur

A- Le câble

1. $R = \rho\dfrac{\ell}{S}$ (formule donnée). Le courant fait l'aller et le retour : $\ell = 2L = 80\,\text{m}$.

$$R_c = 1{,}7\times10^{-8}\times\frac{80}{1{,}5\times10^{-6}} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_c \approx 0{,}907\,\Omega}$$

B- Fonctionnement normal

2. $I = 6\times0{,}25 + 10\times0{,}020 + 0{,}4 = 1{,}5 + 0{,}2 + 0{,}4$ soit $\boxed{I = 2{,}1\,\text{A}}$

3. Le schéma est une seule maille : E, R_s, R_c et le coffret parcourus par I.

$$U_f = E - (R_s + R_c)\,I = 24{,}5 - (0{,}05 + 0{,}907)\times 2{,}1 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_f \approx 22{,}5\,\text{V}}$$

$22{,}5\,\text{V} < 22{,}8\,\text{V}$: **le cahier des charges n'est pas respecté**.

4. $P_c = R_c\,I^2 = 0{,}907\times2{,}1^2 \approx 4{,}0\,\text{W}$.

C- Ouverture des électrovannes

5. $I_{pic} = 4\times1{,}5 + 0{,}2 + 0{,}4 = 6{,}6\,\text{A}$ et $U_f = 24{,}5 - 0{,}957\times6{,}6 \approx 18{,}2\,\text{V} < 20{,}4\,\text{V}$.

Les électrovannes risquent de ne pas s'ouvrir franchement et le module déporté peut redémarrer (chute de tension) : **la section** $1{,}5\,\text{mm}^2$ **est insuffisante**.

D- Choix de la section

6. $U_f \geq 22{,}8$ impose $(R_s + R_c)\,I \leq 24{,}5 - 22{,}8 = 1{,}7\,\text{V}$, soit $R_c \leq \dfrac{1{,}7}{2{,}1} - 0{,}05 \approx 0{,}760\,\Omega$.

$$S_{min} = \rho\frac{2L}{R_{c,max}} = 1{,}7\times10^{-8}\times\frac{80}{0{,}760} \quad \text{soit} \quad \boxed{S_{min} \approx 1{,}79\,\text{mm}^2}$$

7. Avec $2{,}5\,\text{mm}^2$: $R_c = 1{,}7\times10^{-8}\times\dfrac{80}{2{,}5\times10^{-6}} = 0{,}544\,\Omega$.

Fonctionnement normal : $U_f = 24{,}5 - 0{,}594\times2{,}1 \approx 23{,}3\,\text{V} \geq 22{,}8\,\text{V}$ ✓

Ouverture des électrovannes : $U_f = 24{,}5 - 0{,}594\times6{,}6 \approx 20{,}6\,\text{V} \geq 20{,}4\,\text{V}$ ✓ (de justesse).

Méthode Pour choisir la section d'un câble, on vérifie deux critères : l'échauffement (courant admissible) et la chute de tension. Sur une ligne longue en basse tension, c'est presque toujours la chute de tension qui impose la section.

Régime sinusoïdal

✓ Corrigé de l'exercice 1.6 – Lire l'expression de la tension du réseau

1. Par identification avec $u(t) = U_{max}\sin(\omega t)$: $\boxed{U_{max} = 325\,\text{V}}$ et $\boxed{\omega = 314\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$
2. $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{314}{2\pi} \approx 50\,\text{Hz}$; $T = \dfrac{1}{f} = 20\,\text{ms}$; $U = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{325}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{U \approx 230\,\text{V}}$
3. En position AC, le voltmètre affiche la valeur efficace : 230 V. En position DC, il affiche la valeur moyenne, nulle pour une sinusoïde : 0 V.
4. Calculatrice en **radians** : $u(2\,\text{ms}) = 325\sin(314\times 0{,}002) = 325\sin(0{,}628) \approx 191\,\text{V}$; $u(5\,\text{ms}) = 325\sin(1{,}57) \approx 325\,\text{V}$: à $t = T/4$, la tension passe par son maximum.

✓ Corrigé de l'exercice 1.7 – Plaque signalétique d'une pompe

1. $S = U\,I = 230\times 8$ soit $\boxed{S = 1\,840\,\text{VA}}$; $P = S\cos(\Phi) = 1\,840\times 0{,}8$ soit $\boxed{P = 1\,472\,\text{W}}$
2. $\Phi = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}9°$; $Q = S\sin(\Phi) = 1\,840\times 0{,}6$ soit $\boxed{Q = 1\,104\,\text{VAR}}$

   $Q > 0$: le moteur est **inductif** (ses bobinages absorbent de la puissance réactive).
3. $P \to 5{,}9\,\text{cm}$ à l'horizontale, $Q \to 4{,}4\,\text{cm}$ vers le haut, l'hypoténuse S mesure 7,4 cm et fait l'angle $\Phi \approx 37°$ avec P.
4. $E = P\times\Delta t = 1{,}472\times 7$ soit $\boxed{E \approx 10{,}3\,\text{kW}\cdot\text{h}}$

✓ Corrigé de l'exercice 1.8 – Identifier la bobine d'un contacteur

I- Mesure en continu

1. En continu, le courant est constant : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, la tension aux bornes de l'inductance est nulle (son impédance $Z_L = L\omega$ est nulle pour $\omega = 0$). Seule R limite le courant :

$$R = \frac{24}{0{,}436} \quad \text{soit} \quad \boxed{R \approx 55\,\Omega}$$

2. Sous 230 V continu : $I = 230/55 \approx 4{,}2\,\text{A}$, dix fois le courant normal, et $P = 230^2/55 \approx 960\,\text{W}$ au lieu de 10 W : la bobine brûle en quelques secondes. Une bobine prévue pour l'alternatif ne doit jamais être alimentée en continu.

II- Mesure en sinusoïdal

3. Une période occupe 10 divisions : $T = 10 \times 2 = 20\,\text{ms}$ ✓. $u(t)$: 3,25 div, soit $3{,}25 \times 1 \times 100 = 325\,\text{V} = 230\sqrt{2}$ ✓. $i(t)$: environ 3 div, soit $3 \times 0{,}2 = 0{,}6\,\text{V}$, donc $I_{max} \approx 0{,}6\,\text{A} = 0{,}42\sqrt{2}$ ✓.

4. $\tau \approx 2{,}35$ div $= 4{,}7\,\text{ms}$, d'où $|\Phi| = 360 \times 4{,}7/20 \approx 85°$. Le courant passe par son maximum **après** la tension : il est en retard, $\Phi > 0$ (charge inductive).

5. $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{230}{0{,}42} \approx 548\,\Omega$; $\quad X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{548^2 - 55^2} \approx 545\,\Omega$

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{545}{2\pi \times 50} \quad \text{soit} \quad \boxed{L \approx 1{,}73\,\text{H}}$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{545}{55}\right) \approx 84{,}2°$$

On retrouve la valeur mesurée à l'oscilloscope, aux erreurs de lecture près.

6. $P = R\,I^2 = 55 \times 0{,}42^2 \approx 9{,}7\,\text{W}$; $\quad Q = X\,I^2 = 545 \times 0{,}42^2 \approx 96\,\text{VAR}$; $\quad S = U\,I \approx 96{,}6\,\text{VA}$; $\quad f_p = \frac{P}{S} \approx 0{,}10$.

Une bobine de contacteur consomme surtout de la puissance réactive (pour créer le champ magnétique) et très peu de puissance active.

✓ Corrigé de l'exercice 1.9 – Bilan de puissances d'un petit atelier

1. $Q = P\tan(\Phi)$: $\quad Q_1 = 3\,000 \times \tan(\arccos(0{,}70)) \approx 3\,061\,\text{VAR}$; $\quad Q_2 = 600 \times \tan(\arccos(0{,}90)) \approx 291\,\text{VAR}$; $\quad Q_3 = 0$ (radiateurs résistifs).

2. Boucherot :

$$P = 3\,000 + 600 + 1\,500 = 5\,100\,\text{W} \qquad Q = 3\,061 + 291 + 0 \approx 3\,352\,\text{VAR}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{S \approx 6\,103\,\text{VA}}$$

$$f_p = \frac{P}{S} \approx 0{,}836$$

3. $I = \dfrac{S}{U} = \dfrac{6\,103}{230}$ soit $\boxed{I \approx 26{,}5\,\text{A}}$

4. $S_1 = 3\,000/0{,}7 \approx 4\,286$, $S_2 = 600/0{,}9 \approx 667$, $S_3 = 1\,500$: la somme donne $6\,452\,\text{VA}$, trop grande. Les puissances apparentes ne s'additionnent pas car les récepteurs n'ont pas le même déphasage : seules P et Q s'additionnent.

5. $Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi)) = 5\,100 \times (0{,}329 - 0{,}657) \approx -1\,675\,\text{VAR}$

$$C = \frac{-Q_c}{\omega\,U^2} = \frac{1\,675}{314 \times 230^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C \approx 101\,\mu\text{F}}$$

$$I' = \frac{P}{U\cos(\Phi')} = \frac{5\,100}{230 \times 0{,}95} \approx 23{,}3\,\text{A}$$

✓ Corrigé de l'exercice 1.10 – Compensation d'un four à induction

A- État des lieux

1. $S = \dfrac{P}{\cos(\Phi)} = \dfrac{20}{0{,}25}$ soit $\boxed{S = 80\,\text{kVA}}$;

$I = \dfrac{S}{U} = \dfrac{80\,000}{400}$ soit $\boxed{I = 200\,\text{A}}$

2. $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{80^2 - 20^2}$ soit $\boxed{Q \approx 77{,}5\,\text{kVAR}}$

$Q > 0$: le four est **inductif**. C'est logique : il est constitué d'une grosse bobine, qui absorbe de la puissance réactive pour créer le champ magnétique.

3. $P_L = R_L\, I^2 = 0{,}1 \times 200^2$ soit $\boxed{P_L = 4\,\text{kW}}$, c'est-à-dire 20 % de la puissance utile du four, perdus en chaleur dans la ligne : d'où son échauffement.

B- Modèle électrique du four

4. Seule la résistance absorbe de la puissance active (l'inductance n'en consomme pas). Elle est parcourue par I : $P = R\, I^2$, d'où

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{20\,000}{200^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{R = 0{,}5\,\Omega}$$

5. Seule l'inductance absorbe de la puissance réactive : $Q = X\, I^2$, d'où

$$X = \frac{Q}{I^2} = \frac{77\,460}{200^2} \approx 1{,}94\,\Omega \qquad L = \frac{X}{2\pi f} = \frac{1{,}94}{314} \quad \text{soit} \quad \boxed{L \approx 6{,}2\,\text{mH}}$$

C- Compensation complète

6. Pour $\cos(\Phi') = 1$, l'ensemble ne doit plus absorber de puissance réactive : $Q' = Q + Q_c = 0$, donc $Q_c = -Q \approx -77{,}5\,\text{kVAR}$.

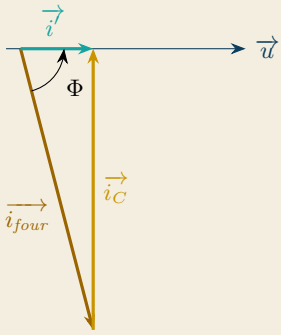
$$C = \frac{-Q_c}{\omega\, U^2} = \frac{77\,460}{314 \times 400^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C \approx 1\,542\,\mu\text{F}}$$

7. La ligne ne transporte plus que la puissance active :

$$I' = \frac{P}{U} = \frac{20\,000}{400} \quad \text{soit} \quad \boxed{I' = 50\,\text{A}}$$

Pertes : $P'_L = 0{,}1 \times 50^2 = 250\,\text{W}$. Le courant est divisé par 4 et les pertes par 16 : la ligne ne chauffe plus.

8. $\overrightarrow{i_{four}}$: 8 cm, en retard de 75,5° sur $\vec{u}$.
$\vec{i_C}$: $I_C = C\omega U \approx 194$ A, soit 7,75 cm, en avance de 90° sur $\vec{u}$.
Leur somme $\vec{i'} = \overrightarrow{i_{four}} + \vec{i_C}$: 2 cm, en phase avec $\vec{u}$: le facteur de puissance vaut 1.



D- Solution retenue

9. $Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi)) = 20\,000 \times (0{,}395 - 3{,}873) \approx -69{,}6$ kVAR

$$C = \frac{69\,600}{314 \times 400^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C \approx 1\,385\ \mu\text{F}}$$

$$I' = \frac{P}{U\cos(\Phi')} = \frac{20\,000}{400 \times 0{,}93} \approx 53{,}8\ \text{A}$$

10. La solution D demande environ 10 % de condensateurs en moins que la compensation complète, pour un courant à peine plus élevé (53,8 A au lieu de 50 A).

Recommandation : installer une batterie d'environ 1 400 µF (environ 70 kVAR) en parallèle sur le four. Les pénalités disparaissent, le courant en ligne passe de 200 A à 54 A et les pertes de 4 kW à moins de 300 W. Viser $\cos(\Phi) = 1$ coûterait plus cher pour un gain négligeable, avec un risque de surcompensation quand la charge du four varie.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 1.A – Éclairage autonome d'un abri voyageurs

Partie A – Besoin énergétique

A.1. $P = 2 \times 15 = 30$ W ; $I = \dfrac{P}{U} = \dfrac{30}{12}$ soit $\boxed{I = 2{,}5\ \text{A}}$

A.2. $E = P \times \Delta t = 30 \times 12$ soit $\boxed{E = 360\ \text{W} \cdot \text{h}}$ par nuit.

Partie B – Batterie

B.1. Énergie stockée : $E_{bat} = U \times C_{bat} = 12 \times 100 = 1\,200\,\text{W}\cdot\text{h}$; utilisable (50 %) : $\boxed{E_u = 600\,\text{W}\cdot\text{h}}$

B.2. $\dfrac{600}{360} \approx 1{,}7$ nuit : la batterie ne tient pas 3 nuits, **le cahier des charges n'est pas respecté**.

B.3. Énergie utilisable nécessaire : $3 \times 360 = 1\,080\,\text{W}\cdot\text{h}$, soit une énergie stockée de $1\,080/0{,}5 = 2\,160\,\text{W}\cdot\text{h}$.

$$C_{bat,min} = \frac{2\,160}{12} = 180\,\text{A}\cdot\text{h} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{batterie de } 200\,\text{A}\cdot\text{h}}$$

Partie C – Câble

C.1. Longueur parcourue par le courant : $2 \times 15 = 30\,\text{m}$.

$$R_c = \rho\frac{\ell}{S} = 0{,}017\,5 \times \frac{30}{2{,}5} = 0{,}21\,\Omega$$
$$\Delta U = R_c\, I = 0{,}21 \times 2{,}5 \approx 0{,}53\,\text{V}$$

soit $\dfrac{0{,}53}{12} \approx 4{,}4\,\% > 3\,\%$: **la chute de tension est trop forte**.

C.2. $\Delta U_{max} = 0{,}03 \times 12 = 0{,}36\,\text{V}$; il faut $\rho\dfrac{\ell}{S}\,I \le \Delta U_{max}$, soit

$$S \ge \frac{\rho\,\ell\,I}{\Delta U_{max}} = \frac{0{,}017\,5 \times 30 \times 2{,}5}{0{,}36} \approx 3{,}65\,\text{mm}^2$$
$$\Rightarrow \boxed{S = 4\,\text{mm}^2}$$

Vérification : $R_c = 0{,}017\,5 \times \dfrac{30}{4} \approx 0{,}131\,\Omega$, $\Delta U \approx 0{,}33\,\text{V}$, soit $2{,}7\,\%$ ✓.

Partie D – Modèle de la batterie

D.1. À vide, aucune chute de tension interne : $\boxed{E_{th} = 12{,}8\,\text{V}}$. En débit : $U = E_{th} - R_{th}\,I$, d'où

$$R_{th} = \frac{12{,}8 - 12{,}4}{20} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{th} = 0{,}02\,\Omega}$$

D.2. $U = 12{,}8 - 0{,}02 \times 2{,}5 = 12{,}75\,\text{V}$: la chute interne est négligeable pour ce faible courant.

D.3. Avec $R = 0$, $I = \dfrac{E_{th}}{R_{th} + R}$ devient $I_{cc} = \dfrac{E_{th}}{R_{th}} = \dfrac{12{,}8}{0{,}02}$ soit $\boxed{I_{cc} = 640\,\text{A}}$

Un court-circuit sur le câble ferait circuler plusieurs centaines d'ampères : le câble s'échaufferait jusqu'à l'incendie. Le fusible placé au plus près de la borne + protège **toute** la longueur du câble.

Partie E – Panneau photovoltaïque

E.1. Pour stocker $360\,\text{W}\cdot\text{h}$ avec un rendement de 0,85, le panneau doit produire $360/0{,}85 \approx 424\,\text{W}\cdot\text{h}$ par jour.

E.2. $P_c = \dfrac{424}{1{,}5} \approx 282\,\text{W}$ crête. Les deux panneaux de 150 W (300 W > 282 W) conviennent, avec une petite marge.

Bilan : le panneau convient, mais il faut une batterie de $200\,\text{A}\cdot\text{h}$ et un câble de $4\,\text{mm}^2$.

✓ Corrigé du sujet BTS 1.B – Ventilation d'un parking souterrain

Partie A – Étude d'un extracteur

A.1. $S_v = U\,I_v = 230 \times 7{,}5 = 1\,725\,\text{VA}$; $\cos(\Phi_v) = P_v/S_v = 1\,200/1\,725 \approx 0{,}696$; $\boxed{\Phi_v \approx 45{,}9°}$

A.2. $Q_v = \sqrt{S_v^2 - P_v^2} = \sqrt{1\,725^2 - 1\,200^2}$ soit $\boxed{Q_v \approx 1\,239\,\text{VAR}}$

$Q_v > 0$: le moteur est **inductif** (ses enroulements créent le champ magnétique).

A.3. La puissance active est absorbée par R seule, la puissance réactive par L seule :

$$R = \frac{P_v}{I_v^2} = \frac{1\,200}{7{,}5^2} \approx 21{,}3\,\Omega$$

$$X = \frac{Q_v}{I_v^2} \approx 22{,}0\,\Omega$$

$$L = \frac{X}{2\pi f} \approx 70\,\text{mH}$$

Contrôle : $Z = \sqrt{21{,}3^2 + 22^2} \approx 30{,}7\,\Omega = \dfrac{230}{7{,}5}$ ✓.

Partie B – Bilan de l'installation

B.1. $P_e = 40 \times 36 = 1\,440\,\text{W}$; $Q_e = P_e \tan(\arccos(0{,}92)) \approx 1\,440 \times 0{,}426 \approx 613\,\text{VAR}$.

B.2.

Récepteur	P (W)	Q (VAR)
2 extracteurs	2 400	2 478
Éclairage	1 440	613
Installation	3 840	3 091

$S = \sqrt{3\,840^2 + 3\,091^2}$ soit $\boxed{S \approx 4\,930\,\text{VA}}$;

$f_p = \dfrac{3\,840}{4\,930} \approx 0{,}78$ ($\Phi \approx 38{,}8°$).

B.3. $I = \dfrac{S}{U} = \dfrac{4\,930}{230}$ soit $\boxed{I \approx 21{,}4\,\text{A}}$

Partie C – Câble d'alimentation

C.1. $R_L = 0{,}017\,5 \times \dfrac{2 \times 60}{10}$ soit $\boxed{R_L = 0{,}21\,\Omega}$

C.2. $P_j = R_L\, I^2 = 0{,}21 \times 21{,}4^2 \approx 96\,\text{W}$, perdus en permanence.

C.3. $\Delta U \approx 0{,}21 \times 21{,}4 \times 0{,}78 \approx 3{,}5\,\text{V}$, soit 1,5 % de 230 V : acceptable.

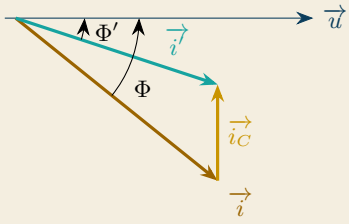
Partie D – Relèvement du facteur de puissance

D.1. $Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi)) = 3\,840 \times (0{,}329 - 0{,}805) \approx -1\,830\,\text{VAR}$

$$C = \frac{-Q_c}{\omega\, U^2} = \frac{1\,830}{314 \times 230^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C \approx 110\,\mu\text{F}}$$

D.2. $I' = \dfrac{P}{U\cos(\Phi')} = \dfrac{3\,840}{230 \times 0{,}95} \approx 17{,}6\,\text{A}$; pertes : $0{,}21 \times 17{,}6^2 \approx 65\,\text{W}$.

D.3. $\vec{i}$: 21,4 A → 7,1 cm, en retard de 38,8° ; $\vec{i_C}$: $C\omega U \approx 8{,}0\,\text{A}$ → 2,7 cm, en avance de 90° ; $\vec{i'} = \vec{i} + \vec{i_C}$: 17,6 A → 5,9 cm, en retard de 18,2°.



D.4. Une batterie de condensateurs d'environ 110 µF sous 230 V supprime la facturation de l'énergie réactive, réduit le courant en ligne de 21,4 A à 17,6 A (−18 %) et les pertes dans le câble d'un tiers. Elle libère aussi de la réserve sur le câble et le disjoncteur pour de futurs équipements, sans rien changer au fonctionnement des extracteurs et de l'éclairage.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ appliquer les lois des mailles et des nœuds, réduire un réseau de résistances ; — ex. 1.1 à 1.5
- ☐ utiliser un pont diviseur et un modèle de Thévenin ; — ex. 1.3, 1.4, sujet A
- ☐ calculer une impédance, tracer un Fresnel ; — ex. 1.6 à 1.8, 1.10
- ☐ faire un bilan de puissances (Boucherot) et relever un facteur de puissance. — ex. 1.9, 1.10, sujet B

CHAPITRE

2

Systèmes triphasés équilibrés

Réseau triphasé, couplages, puissances et compensation

Dans ce chapitre

- Tensions simples, tensions composées
- Ordre des phases, diagrammes de Fresnel
- Couplages étoile et triangle des récepteurs
- Puissances en triphasé
- Méthode des deux wattmètres
- Boucherot et relèvement du facteur de puissance

Objectifs

- ✓ Relier tensions simples et composées, vérifier l'ordre des phases
- ✓ Choisir le couplage d'un récepteur à partir de sa plaque signalétique
- ✓ Calculer et mesurer les puissances d'un récepteur triphasé
- ✓ Faire le bilan d'une installation et dimensionner une batterie de condensateurs

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 2

Cours — Chapitre 2

2.1 Le réseau triphasé

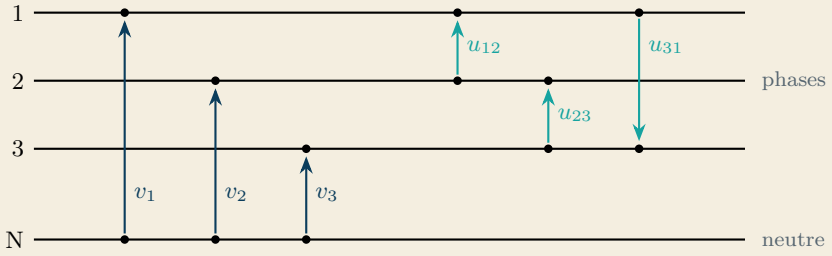
Dans une centrale, l'alternateur possède trois enroulements identiques, décalés de 120° autour de son axe : il produit trois tensions sinusoïdales de même fréquence, décalées dans le temps d'un tiers de période. L'énergie électrique est ensuite transportée et distribuée sous cette forme. Le triphasé présente trois avantages décisifs :

- à puissance transportée égale, il demande **moins de cuivre** que trois lignes monophasées : les trois courants retournent les uns par les autres et le conducteur de retour devient inutile ;
- la puissance instantanée fournie à un récepteur équilibré est **constante** : un moteur triphasé produit un couple régulier, sans vibration à 100 Hz ;
- trois bobinages décalés de 120° créent facilement un **champ magnétique tournant**, principe des moteurs asynchrones et synchrones (voir § 6.3).

Phases, neutre et tensions simples

D

Définition Un réseau triphasé comporte trois conducteurs de **phase**, notés 1, 2, 3 (ou L1, L2, L3), et généralement un conducteur de **neutre** N, relié à la terre au poste de distribution.
Tension simple $v(t)$: tension entre une phase et le neutre (v_1, v_2, v_3). **Tension composée** $u(t)$: tension entre deux phases (u_{12}, u_{23}, u_{31}).



Comme au chapitre 1, la flèche d'une tension pointe vers le premier point de l'indice : v_1 pointe vers la phase 1, u_{12} pointe vers la phase 1 et $u_{12} = v_1 - v_2$.

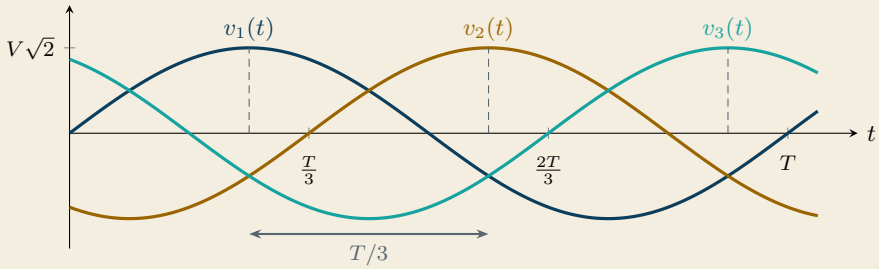
★

À retenir · Tensions simples d'un réseau équilibré En prenant v_1 comme origine des phases :

$$v_1(t) = V\sqrt{2}\,\sin(\omega t) \qquad v_2(t) = V\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Le système est **équilibré** : les trois tensions ont la même valeur efficace $V_1 = V_2 = V_3 = V$ et sont déphasées de $\frac{2\pi}{3}$ (120°) l'une par rapport à l'autre.



Les trois tensions passent par leur maximum l'une après l'autre, à $T/3$ d'intervalle. À chaque instant, leur somme est nulle :

À retenir

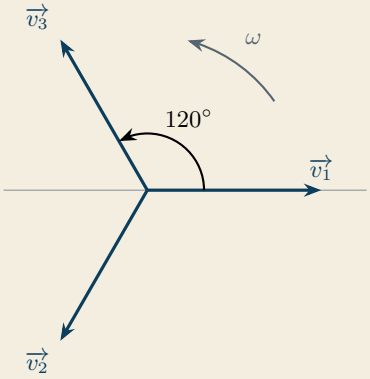
$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0 \qquad u_{12}(t) + u_{23}(t) + u_{31}(t) = 0$$

Exemple Réseau de distribution : $V = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$. À $t = 2{,}5\,\text{ms}$, soit $\omega t = \frac{\pi}{4}$:

$$v_1 = 325\sin(45°) \approx 230\,\text{V} \qquad v_2 = 325\sin(-75°) \approx -314\,\text{V}$$
$$v_3 = 325\sin(-195°) \approx 84\,\text{V} \qquad \text{et} \qquad 230 - 314 + 84 = 0$$

Diagramme de Fresnel

Les trois vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ ont la même longueur et sont décalés de 120° : ils forment une étoile symétrique, et leur somme est le vecteur nul.



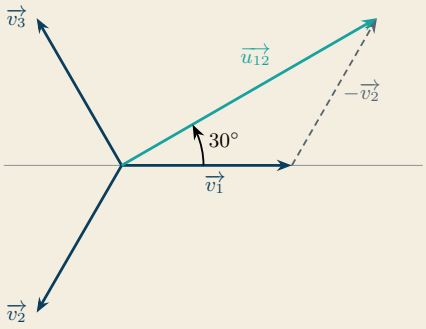
Les vecteurs tournent dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω : $\overrightarrow{v_2}$ est en retard de 120° sur $\overrightarrow{v_1}$, et $\overrightarrow{v_3}$ en retard de 120° sur $\overrightarrow{v_2}$.

Ordre des phases et sens de rotation – hors programme Dans l'ordre ci-dessus, dit **direct**, les vecteurs passent devant un axe fixe dans l'ordre 1, 2, 3. Si l'on échange deux phases, on obtient l'**ordre inverse** (1, 3, 2) : v_2 devient en avance de 120° sur v_1. Le champ tournant d'un moteur triphasé tourne dans le sens fixé par l'ordre des phases : **permuter deux phases quelconques** à l'alimentation inverse le sens de rotation du moteur.
Exemple : après le remplacement du câble d'alimentation d'un pont roulant, le palan descend quand on appuie sur « montée » : deux phases ont été croisées. On vérifie l'ordre des phases avec un contrôleur d'ordre des phases avant tout essai, puis on permute deux phases au départ du câble.

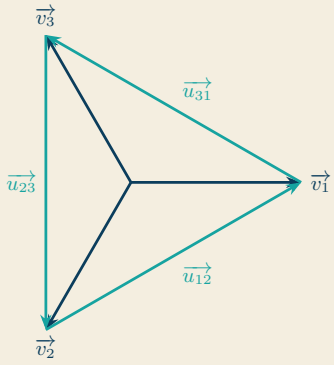
2.2 Tensions composées

Construction de Fresnel

Par la loi des mailles, $u_{12} = v_1 - v_2$, $u_{23} = v_2 - v_3$ et $u_{31} = v_3 - v_1$. En vecteurs de Fresnel : $\overrightarrow{u_{12}} = \overrightarrow{v_1} + (-\overrightarrow{v_2})$.



$\overrightarrow{u_{12}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$



triangle des tensions composées

Démonstration de $U = \sqrt{3}\,V$. Le triangle formé par $\overrightarrow{v_1}$, $-\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{u_{12}}$ est isocèle (deux côtés de longueur V) avec un angle de 120° entre ces deux côtés ; ses deux autres angles valent donc 30°. En projetant les deux côtés de longueur V sur la direction de $\overrightarrow{u_{12}}$, on obtient

$$U = 2\,V\cos(30°) = 2\,V\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,V$$

Le vecteur $\overrightarrow{u_{12}}$ est en avance de 30° sur $\overrightarrow{v_1}$. Les trois tensions composées forment à leur tour un système triphasé équilibré : les vecteurs $\overrightarrow{u_{12}}$, $\overrightarrow{u_{23}}$, $\overrightarrow{u_{31}}$ joignent les extrémités des tensions simples et dessinent un triangle équilatéral.

À retenir · Tensions composées

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U \qquad U = \sqrt{3}\,V$$

$$u_{12}(t) = U\sqrt{2}\,\sin\!\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (u_{12} \text{ en avance de } 30° \text{ sur } v_1)$$

Ex

Exemple : les réseaux usuels Un réseau se désigne par le couple « V / U ». Réseau basse tension de distribution : 230 V / 400 V, car $\sqrt{3} \times 230 \approx 398$ V, arrondi à 400 V. Certains sites industriels (mines, grosses pompes) utilisent le réseau 400 V / 690 V. En haute tension, on ne donne que la tension composée : réseau 20 kV, soit

$$V = \frac{20\,000}{\sqrt{3}} \approx 11{,}5\,\text{kV}$$

✗

Piège classique Confondre V et U. Un voltmètre branché entre deux phases d'un réseau 230 V / 400 V indique 400 V, pas 230 V. Et $U \neq 2V$: les tensions simples ne sont pas en opposition de phase, elles sont décalées de 120°.

En ligne : diagramme de Fresnel et chronogrammes animés des tensions simples et composées : faites varier V et l'instant t, vérifiez que la somme des trois tensions reste nulle.

2.3 Récepteurs triphasés équilibrés

D

Définition Un **récepteur triphasé équilibré** est constitué de trois dipôles identiques, de même impédance Z et de même déphasage Φ (les trois enroulements d'un moteur, les trois résistances d'un four). On peut les relier au réseau de deux façons : en **étoile** (symbole Y) ou en **triangle** (symbole Δ).

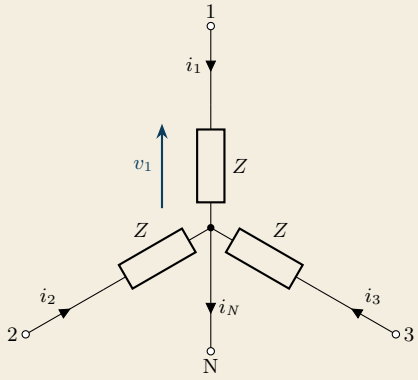
Les trois dipôles étant identiques et soumis à des tensions de même valeur efficace décalées de 120°, les trois courants qui les traversent ont eux aussi la même valeur efficace et sont décalés de 120° : il suffit d'étudier **une seule phase**, puis de multiplier les puissances par 3.

✗

Piège classique : un récepteur n'est pas toujours équilibré Un moteur triphasé, un four à trois résistances identiques ou une batterie de trois condensateurs identiques sont équilibrés. En revanche, un tableau d'éclairage et de prises, formé de récepteurs monophasés répartis sur les trois phases, ne l'est presque jamais : les courants de ligne diffèrent et un courant circule dans le neutre. Les formules de ce chapitre ne s'appliquent alors qu'en première approximation, si l'on a pris soin de répartir les charges au mieux.

Couplage étoile

Chaque dipôle est branché entre une phase et un point commun, le **point neutre** du récepteur, que l'on peut relier au neutre du réseau. Il est soumis à la **tension simple** V et traversé par le **courant de ligne** I : en étoile, le courant dans un dipôle et le courant dans la ligne sont le même courant.

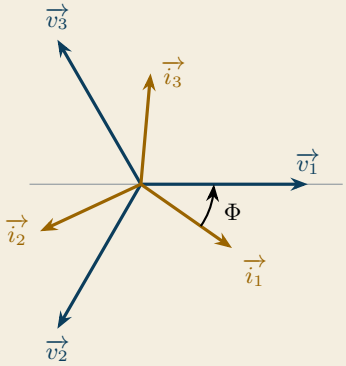


couplage étoile (Y)

★ **À retenir · Couplage étoile : couple** (V, I)

$$V = Z \times I \qquad U = \sqrt{3}\,V \qquad i_N = i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Les trois courants de ligne ont la même valeur efficace I et sont décalés de 120° ; chacun est déphasé de Φ par rapport à « sa » tension simple. Leur somme est nulle : **le neutre ne transporte aucun courant**. Pour un récepteur équilibré, il n'est pas indispensable (un moteur triphasé n'est jamais relié au neutre) ; on le conserve pour les installations susceptibles d'être déséquilibrées (éclairage, prises).



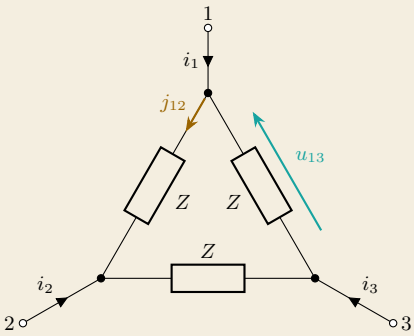
✎ **Schéma monophasé équivalent.** Pour un récepteur équilibré en étoile, on étudie une seule phase : un générateur de tension V alimente l'impédance Z, parcourue par le courant de ligne I. On y applique toutes les lois du chapitre 1 ($V = Z\,I$, Fresnel, puissances d'un dipôle), puis on multiplie les puissances par 3.

Ex **Exemple : chauffe-bain d'une ligne de traitement de surface** Trois résistances $R = 23\,\Omega$ sont couplées en étoile sur le réseau 230 V / 400 V. Chacune est sous $V = 230\,\text{V}$:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{230}{23} = 10\,\text{A} \qquad P = 3 \times V \times I = 3 \times 230 \times 10 = 6{,}9\,\text{kW}$$

Couplage triangle

Chaque dipôle est branché entre deux phases : il est soumis à la **tension composée** U et traversé par un courant J (courant de phase, ou courant « dans le récepteur »), différent du courant de ligne I. Il n'y a pas de point neutre : un récepteur en triangle n'est jamais relié au neutre du réseau.

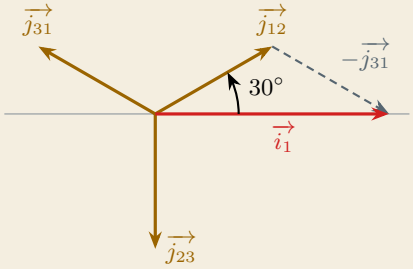


couplage triangle (Δ)

À retenir · Couplage triangle : couple (U, J)

$$U = Z \times J \qquad I = \sqrt{3}\, J$$

La loi des nœuds au sommet 1 donne $i_1 = j_{12} - j_{31}$. Les courants j_{12}, j_{23}, j_{31} forment un système équilibré ; la construction est la même que pour les tensions composées : $\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{j_{12}} + (-\overrightarrow{j_{31}})$, d'où $I = 2\,J\cos(30°) = \sqrt{3}\,J$. Sur la figure (récepteur résistif), $\overrightarrow{j_{12}}$ est en phase avec $\overrightarrow{u_{12}}$ et $\overrightarrow{i_1}$ est en retard de 30° sur $\overrightarrow{j_{12}}$.



Exemple : les mêmes résistances couplées en triangle Chaque résistance est maintenant sous $U = 400\,\text{V}$:

$$J = \frac{U}{R} = \frac{400}{23} \approx 17{,}4\,\text{A} \qquad I = \sqrt{3}\,J \approx 30{,}1\,\text{A}$$

$$P = 3 \times U \times J = 3 \times 400 \times 17{,}4 \approx 20{,}9\,\text{kW}$$

La puissance est environ **trois fois** plus grande qu'en étoile, car chaque résistance reçoit une tension $\sqrt{3}$ fois plus grande : $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Piège classique On ne choisit pas le couplage pour « gagner de la puissance » : on le choisit pour que chaque dipôle reçoive **sa tension nominale**. Des résistances prévues pour 230 V, couplées en triangle sur un réseau 400 V, dissiperaient trois fois leur puissance nominale et seraient détruites.

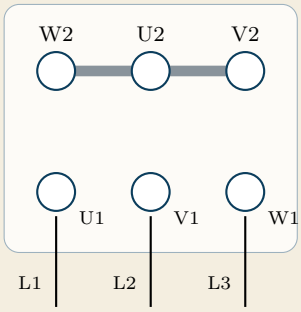
Choisir le couplage d'un moteur

La plaque signalétique d'un moteur indique deux tensions, par exemple 230 V / 400 V. **La plus petite est la tension que peut supporter un enroulement.**

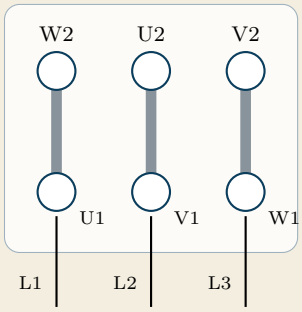
Règle de couplage. On compare la tension composée U du réseau aux deux tensions de la plaque :

- ▷ U = plus **grande** tension de la plaque : couplage **étoile** (chaque enroulement reçoit $V = U/\sqrt{3}$) ;
- ▷ U = plus **petite** tension de la plaque : couplage **triangle** (chaque enroulement reçoit U).

Le couplage se réalise sur la **plaque à bornes** du moteur, à l'aide de trois barrettes. Les entrées des enroulements sont notées U1, V1, W1 et leurs sorties U2, V2, W2 ; les sorties sont décalées d'un cran sur la rangée du haut, pour que le triangle se câble avec trois barrettes verticales.



couplage étoile (Y)



couplage triangle (Δ)

Exemple Sur le réseau 230 V / 400 V ($U = 400$ V) : un moteur 230 V / 400 V se couple en **étoile** ; un moteur 400 V / 690 V se couple en **triangle**. Dans les deux cas, chaque enroulement reçoit sa tension nominale (230 V pour le premier, 400 V pour le second). Sur un réseau 400 V / 690 V ($U = 690$ V), le moteur 400 V / 690 V se couplerait en étoile ; le moteur 230 V / 400 V, lui, ne pourrait pas y être raccordé, car aucune tension de sa plaque ne vaut 690 V.

	Étoile (Y)	**Triangle (Δ)**
Tension aux bornes d'un dipôle	$V = \dfrac{U}{\sqrt{3}}$	U
Courant dans un dipôle	I (courant de ligne)	$J = \dfrac{I}{\sqrt{3}}$
Loi d'Ohm	$V = Z\,I$	$U = Z\,J$
Puissance active	$P = 3\,V\,I\cos(\Phi)$	$P = 3\,U\,J\cos(\Phi)$

2.4 Puissances en triphasé

Un récepteur équilibré est formé de trois dipôles identiques : sa puissance active est trois fois celle d'un dipôle.

$$\text{étoile : } P = 3\,V\,I\cos(\Phi) = 3\,\frac{U}{\sqrt{3}}\,I\cos(\Phi) \quad \text{triangle : } P = 3\,U\,J\cos(\Phi) = 3\,U\,\frac{I}{\sqrt{3}}\cos(\Phi)$$

Dans les deux cas, on obtient la même expression en fonction des grandeurs de ligne U et I, les seules que l'on puisse mesurer sans ouvrir le récepteur.

★ **À retenir · Puissances d'un récepteur triphasé équilibré**

$$P = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)\ \text{(W)} \qquad Q = \sqrt{3}\,U\,I\sin(\Phi)\ \text{(VAR)}$$

$$S = \sqrt{3}\,U\,I = \sqrt{P^2+Q^2}\ \text{(VA)} \qquad f_p = \cos(\Phi) = \frac{P}{S}$$

U et I : tension composée et courant de ligne, **quel que soit le couplage**. Φ : déphasage entre la tension aux bornes d'**un dipôle** et le courant qui le traverse.

Ex **Exemple : pompe de relevage** La pompe d'une station de relevage est alimentée sous $U = 400\,\text{V}$; on mesure $I = 18\,\text{A}$ et la plaque indique $\cos(\Phi) = 0{,}83$ ($\Phi \approx 33{,}9°$, $\sin(\Phi) \approx 0{,}558$).

$$P = \sqrt{3} \times 400 \times 18 \times 0{,}83 \approx 10{,}4\,\text{kW}$$

$$Q = \sqrt{3} \times 400 \times 18 \times 0{,}558 \approx 6{,}96\,\text{kVAR} \qquad S = \sqrt{3} \times 400 \times 18 \approx 12{,}5\,\text{kVA}$$

✗ **Piège classique** Prendre pour Φ le déphasage entre u_{12} et i_1. Ce déphasage vaut $\Phi + 30°$ dans un récepteur en étoile (puisque u_{12} est en avance de 30° sur v_1) : le Φ des formules est toujours celui d'**un dipôle** du récepteur, donné par la plaque ($\cos(\Phi)$).

Trois dipôles élémentaires identiques

Comme en monophasé, seules les résistances absorbent de la puissance active, seules les bobines et les condensateurs échangent de la puissance réactive. On multiplie par 3 la puissance d'un dipôle, en prenant la tension et le courant **de ce dipôle**.

	Résistances R	**Inductances L**	**Condensateurs C**
Étoile	$P = 3\,R\,I^2 = 3\,\dfrac{V^2}{R}$	$Q = 3\,L\omega\,I^2$	$Q = -3\,C\omega\,V^2$
Triangle	$P = 3\,R\,J^2 = 3\,\dfrac{U^2}{R}$	$Q = 3\,L\omega\,J^2$	$Q = -3\,C\omega\,U^2$

Puissance instantanée – hors programme Pour un récepteur équilibré, $p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3$. Les termes qui varient à 2ω s'annulent deux à deux (ils forment eux aussi un système triphasé équilibré) : il reste $p(t) = 3\,V\,I\cos(\Phi) = P$, **constante**. C'est l'avantage du triphasé évoqué en début de chapitre : pas de pulsation de couple sur l'arbre d'un moteur.

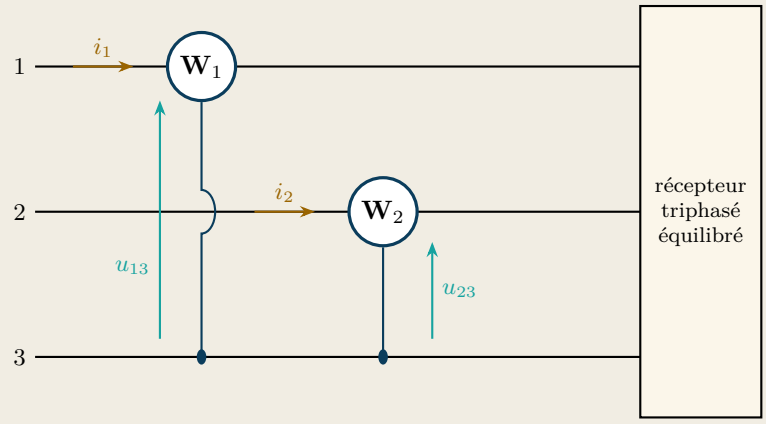
2.5 Mesure des puissances

En pratique, on mesure la puissance active d'un récepteur triphasé au wattmètre ou à l'analyseur de réseau. Les méthodes de mesure ci-dessous ne figurent pas au programme : elles sont souvent rappelées dans l'énoncé.

Mesures au wattmètre – hors programme **Le wattmètre.** Un wattmètre possède un **circuit courant**, branché en série comme un ampèremètre, et un **circuit tension**, branché en dérivation comme un voltmètre. Il indique

$$P_W = U_W\,I_W\cos(\overrightarrow{i_W}, \overrightarrow{u_W})$$

produit de la tension et du courant qu'il reçoit par le cosinus de leur déphasage.
Avec le neutre accessible, un seul wattmètre suffit pour un récepteur équilibré : circuit courant dans la phase 1, circuit tension entre la phase 1 et le neutre. Il mesure la puissance d'une phase, $V\,I\cos(\Phi)$, et l'on en déduit $P = 3\,P_W$.
Méthode des deux wattmètres. Sur un réseau **sans neutre** (cas des moteurs), on utilise deux wattmètres. Leurs circuits courant sont placés dans les lignes 1 et 2 ; leurs circuits tension reçoivent respectivement u_{13} et u_{23} : la ligne 3 sert de référence commune.

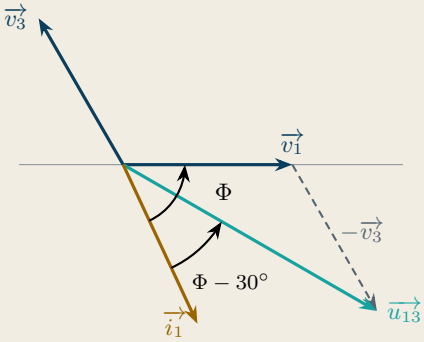


$$P = P_1 + P_2 \qquad Q = \sqrt{3}\,(P_1 - P_2)$$

P_1 et P_2 : indications **algébriques** des deux wattmètres. La formule de P reste valable pour un récepteur déséquilibré sans neutre ; celle de Q suppose le récepteur équilibré.

Justification. $\overrightarrow{u_{13}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}$ est en retard de 30° sur $\overrightarrow{v_1}$, alors que $\overrightarrow{i_1}$ est en retard de Φ sur $\overrightarrow{v_1}$: l'angle entre $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{u_{13}}$ vaut $\Phi - 30°$. Par une construction analogue sur la phase 2, l'angle entre $\overrightarrow{i_2}$ et $\overrightarrow{u_{23}}$ vaut $\Phi + 30°$. Ainsi :

$$P_1 = U\,I\cos(\Phi - 30°)$$
$$P_2 = U\,I\cos(\Phi + 30°)$$



Avec $\cos(a-b)+\cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$ et $\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$:

$$P_1 + P_2 = 2\,U\,I\cos(\Phi)\cos(30°) = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi) = P$$
$$P_1 - P_2 = 2\,U\,I\sin(\Phi)\sin(30°) = U\,I\sin(\Phi) = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Exemple : contrôle d'un broyeur. Sur le moteur d'un broyeur alimenté en 400 V, on lit $P_1 = 5{,}2\,\text{kW}$ et $P_2 = 1{,}8\,\text{kW}$.

$$P = 5{,}2 + 1{,}8 = 7{,}0\,\text{kW} \qquad Q = \sqrt{3} \times (5{,}2 - 1{,}8) \approx 5{,}89\,\text{kVAR}$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \approx 9{,}15\,\text{kVA} \qquad \cos(\Phi) = \frac{P}{S} \approx 0{,}77 \qquad I = \frac{S}{\sqrt{3}\,U} \approx 13{,}2\,\text{A}$$

Attention au signe des indications. Si $\Phi > 60°$ (moteur à vide, par exemple), $\cos(\Phi + 30°) < 0$: l'aiguille du wattmètre 2 part en butée à gauche, ou l'appareil numérique affiche une valeur négative. On inverse alors le branchement de son circuit tension pour lire la valeur, que l'on compte **négativement** : $P = P_1 - |P_2|$. Si $P_1 = P_2$, le récepteur est purement résistif ($Q = 0$).

2.6 Théorème de Boucherot en triphasé

Le théorème de Boucherot (chapitre 1) s'applique tel quel à une installation triphasée : on additionne les puissances actives des récepteurs, puis leurs puissances réactives, et l'on en déduit la puissance apparente et le courant de ligne.

À retenir · Théorème de Boucherot

$$P_{tot} = \sum P_i \qquad Q_{tot} = \sum Q_i \qquad S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2}$$
$$I = \frac{S_{tot}}{\sqrt{3}\,U} \qquad f_p = \frac{P_{tot}}{S_{tot}}$$

Les puissances apparentes ne s'additionnent pas. Pour chaque récepteur, $Q_i = P_i \tan(\Phi_i)$.

Ex

Exemple : atelier de chaudronnerie sous 400 V

Récepteur	P (kW)	$\cos(\Phi)$	$Q = P\tan(\Phi)$ (kVAR)
Moteur de la cisaille	18	0,78	14,44
Moteur de la plieuse	7,5	0,70	7,65
Four de recuit (résistif)	6	1	0
Atelier	31,5		22,09

$$S = \sqrt{31{,}5^2 + 22{,}09^2} \approx 38{,}5\,\text{kVA} \qquad f_p = \frac{31{,}5}{38{,}5} \approx 0{,}82$$

$$I = \frac{38\,475}{\sqrt{3} \times 400} \approx 55{,}5\,\text{A}$$

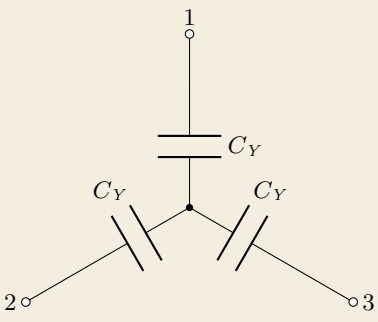
✎

Bilan de puissances en 4 étapes.

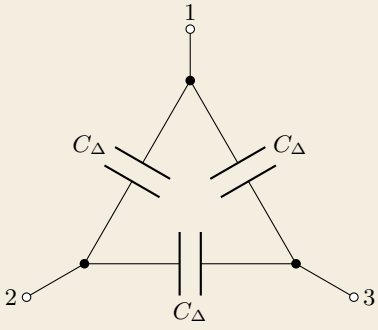
1. Pour chaque récepteur, calculer la puissance active **absorbée** (pour un moteur : $P_a = P_u/\eta$, la plaque donnant la puissance utile).
2. Calculer sa puissance réactive $Q = P\tan(\Phi)$ (positive si inductif, négative si capacitif, nulle si résistif).
3. Additionner séparément les P et les Q dans un tableau.
4. En déduire S, f_p et le courant de ligne $I = S/(\sqrt{3}\,U)$, puis vérifier le calibre des protections et la puissance du transformateur (voir § 3.3).

2.7 Relèvement du facteur de puissance

Comme en monophasé (voir § 1.7), un mauvais facteur de puissance augmente le courant de ligne, donc les pertes et les chutes de tension, et peut entraîner des pénalités : le fournisseur facture l'énergie réactive lorsque $\tan(\Phi)$ dépasse 0,4. On place en tête de l'installation une **batterie de trois condensateurs identiques**, couplée en étoile ou en triangle.



batterie en étoile



batterie en triangle

Les condensateurs ne modifient pas la puissance active ; ils fournissent la puissance réactive $Q_c < 0$ qui fait passer Q de $P\tan(\Phi)$ à $P\tan(\Phi')$. Chaque condensateur fournit $Q_c/3 = -C\omega\,V_C^2$, où V_C est la tension à ses bornes : V en étoile, U en triangle.

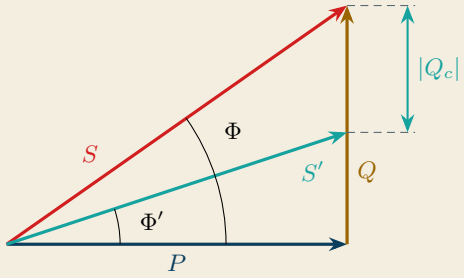
À retenir · Batterie de condensateurs

$$Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi))$$

$$C_Y = \frac{-Q_c}{3\,\omega\,V^2} \qquad C_\Delta = \frac{-Q_c}{3\,\omega\,U^2} = \frac{C_Y}{3}$$

C_Y, C_Δ : capacité de **chacun** des trois condensateurs ; Φ et Φ' : déphasages avant et après compensation.

En triangle, chaque condensateur reçoit une tension $\sqrt{3}$ fois plus grande : il fournit trois fois plus de puissance réactive à capacité égale. La capacité nécessaire est donc trois fois plus faible, ce qui réduit l'encombrement et le coût : **les batteries de condensateurs sont généralement couplées en triangle**, avec des condensateurs prévus pour tenir la tension composée.



La batterie fournit $|Q_c|$: la puissance réactive demandée au réseau passe de Q à $Q' = Q + Q_c$, la puissance apparente de S à S', donc le courant de ligne de I à I'. P ne change pas.

Ex

Exemple : l'atelier de chaudronnerie, $U = 400\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$ Objectif : $\cos(\Phi') = 0{,}95$, d'où $\tan(\Phi') \approx 0{,}329$; avant compensation, $\tan(\Phi) = 22{,}09/31{,}5 \approx 0{,}701$.

$$Q_c = 31\,500 \times (0{,}329 - 0{,}701) \approx -11{,}7\,\text{kVAR}$$

$$C_\Delta = \frac{11\,700}{3 \times 314 \times 400^2} \approx 78\,\mu\text{F} \qquad C_Y = \frac{11\,700}{3 \times 314 \times 230^2} \approx 235\,\mu\text{F}$$

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3}\,U\cos(\Phi')} = \frac{31\,500}{\sqrt{3} \times 400 \times 0{,}95} \approx 47{,}9\,\text{A} \quad \text{au lieu de } 55{,}5\,\text{A}$$

(C_Y vaut trois fois C_Δ aux arrondis près : $400 \neq \sqrt{3} \times 230$ exactement.)

Méthode en 4 étapes.

1. Bilan de Boucherot de l'installation : P, Q, puis $\tan(\Phi) = Q/P$.
2. Choisir l'objectif ($\cos(\Phi')$ de 0,93 à 0,96, ou $\tan(\Phi') \leq 0{,}4$) et calculer $\tan(\Phi')$.
3. Calculer $Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi))$, puis la capacité de chaque condensateur selon le couplage de la batterie.
4. Vérifier le nouveau courant :

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3}\,U\cos(\Phi')}$$

Ex

Exemple : courants dans la batterie de l'atelier (couplage triangle) Chaque condensateur ($C_\Delta = 78\,\mu\text{F}$) est sous $U = 400\,\text{V}$; son impédance vaut $Z_C = 1/(C_\Delta\,\omega)$ (chapitre 1), d'où le courant qui le traverse et le courant de ligne de la batterie :

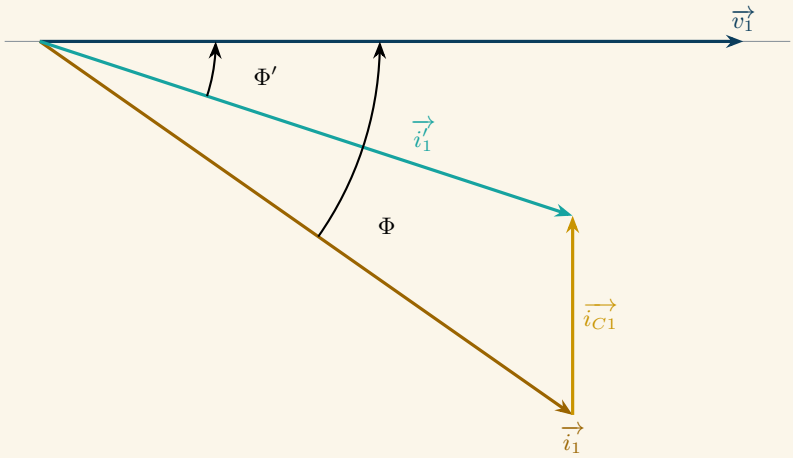
$$J_C = \frac{U}{Z_C} = C_\Delta\,\omega\,U = 78\times10^{-6}\times314\times400 \approx 9{,}8\,\text{A}$$

$$I_C = \sqrt{3}\,J_C \approx 17{,}0\,\text{A}$$

Contrôle : $\sqrt{3}\,U\,I_C = \sqrt{3}\times400\times17 \approx 11{,}8\,\text{kVAR} \approx |Q_c|$ (aux arrondis près). Ce courant sert à choisir les fusibles et le contacteur de la batterie.
Avec la batterie équivalente en étoile ($C_Y = 235\,\mu\text{F}$ sous $V = 230\,\text{V}$), chaque condensateur est traversé par le courant de ligne :

$$I_C = C_Y\,\omega\,V = 235\times10^{-6}\times314\times230 \approx 17{,}0\,\text{A}$$

Le courant de ligne est le même dans les deux couplages, puisque la batterie fournit la même puissance réactive sous la même tension composée : seuls la capacité et la tension supportée par chaque condensateur changent.
Par phase, $\overrightarrow{i'_1} = \overrightarrow{i_1} + \overrightarrow{i_{C1}}$: le courant $\overrightarrow{i_{C1}}$ de la batterie, en avance de 90° sur $\overrightarrow{v_1}$, réduit le déphasage de $\Phi \approx 35{,}0°$ à $\Phi' \approx 18{,}2°$ et le courant de ligne de 55,5 A à 47,9 A (longueurs proportionnelles aux valeurs efficaces).



✗

Piège classique Oublier le facteur 3 (la formule donne la capacité d'**un** condensateur, qui ne fournit que le tiers de Q_c), ou utiliser U dans la formule de l'étoile : un condensateur couplé en étoile n'est soumis qu'à la tension simple V.

En ligne : choix du couplage à partir de la plaque signalétique, calculateur de batterie de condensateurs en étoile et en triangle, récapitulatif des deux couplages.

L'essentiel

Chapitre 2

Réseau triphasé et couplages

Tension simple de la phase 1	$v_1(t) = V\sqrt{2}\,\sin(\omega t)$
Tension simple de la phase 2	$v_2(t) = V\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$
Tension simple de la phase 3	$v_3(t) = V\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \dfrac{4\pi}{3}\right)$
Système équilibré	$V_1 = V_2 = V_3 = V$ déphasages de 120°
Somme des tensions	$v_1 + v_2 + v_3 = 0$ $u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$
Tensions composées	$u_{12} = v_1 - v_2$ $u_{23} = v_2 - v_3$ $u_{31} = v_3 - v_1$
Relation U, V	$U = \sqrt{3}\,V$
Déphasage u_{12} / v_1	$u_{12}(t) = U\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (avance de 30°)
Réseau basse tension	$V\,/\,U = 230\,\text{V}\,/\,400\,\text{V}$ $f = 50\,\text{Hz}$
Étoile : tension et courant d'un dipôle	$V = Z \times I$
Étoile équilibrée : neutre	$i_N = i_1 + i_2 + i_3 = 0$
Triangle : tension et courant d'un dipôle	$U = Z \times J$
Triangle : courant de ligne	$I = \sqrt{3}\,J$
Couplage étoile si	U_{reseau} = plus grande tension de la plaque
Couplage triangle si	U_{reseau} = plus petite tension de la plaque

Puissances et compensation

Puissance active	$P = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)$
Puissance réactive	$Q = \sqrt{3}\,U\,I\sin(\Phi) = P\tan(\Phi)$
Puissance apparente	$S = \sqrt{3}\,U\,I = \sqrt{P^2+Q^2}$
Facteur de puissance	$f_p = \cos(\Phi) = \dfrac{P}{S}$
Avec les grandeurs d'un dipôle	$\mathrm{Y} : P = 3\,V\,I\cos(\Phi) \qquad \Delta : P = 3\,U\,J\cos(\Phi)$
Trois résistances	$\mathrm{Y} : P = 3\,R\,I^2 \qquad \Delta : P = 3\,R\,J^2$
Trois inductances	$\mathrm{Y} : Q = 3\,L\omega\,I^2 \qquad \Delta : Q = 3\,L\omega\,J^2$
Trois condensateurs	$\mathrm{Y} : Q = -3\,C\omega\,V^2 \qquad \Delta : Q = -3\,C\omega\,U^2$
Théorème de Boucherot	$P_{tot} = \sum P_i \qquad Q_{tot} = \sum Q_i$
Puissance apparente totale	$S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2}$
Courant de ligne de l'installation	$I = \dfrac{S_{tot}}{\sqrt{3}\,U}$
Déphasage d'après le facteur de puissance	$\Phi = \arccos(f_p)$
Puissance réactive des condensateurs	$Q_c = Q_{apres} - Q_{avant}$
Batterie de condensateurs	$Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi))$
Capacité par condensateur, étoile	$C_Y = \dfrac{-Q_c}{3\,\omega\,V^2}$
Capacité par condensateur, triangle	$C_\Delta = \dfrac{-Q_c}{3\,\omega\,U^2} = \dfrac{C_Y}{3}$

Exercices

Chapitre 2

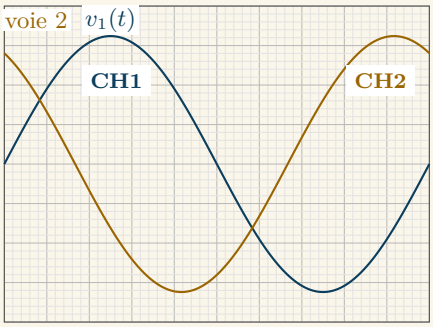
Exercice 2.1 – Mise en service d'un coffret de chantier ★☆☆

Une entreprise de travaux publics installe une grue à tour sur un chantier. La grue est alimentée par un coffret de chantier raccordé au réseau 230 V / 400 V, 50 Hz, par un câble à cinq conducteurs (trois phases, neutre, terre). Avant de brancher la grue, dont les moteurs de levage et d'orientation sont triphasés, l'électricien contrôle les tensions et l'ordre des phases.

Au voltmètre, entre la borne L1 et le neutre, il mesure $V = 229\,\text{V}$.

1. Comment nomme-t-on cette tension ? Calculer la tension attendue entre deux phases.
2. En prenant v_1 comme origine des phases, écrire les expressions de $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ pour un réseau en ordre direct.
3. Calculer v_1, v_2 et v_3 à l'instant $t = 2\,\text{ms}$. Vérifier que leur somme est nulle.

L'électricien visualise à l'oscilloscope, à travers deux sondes différentielles (rapport 1/100, sensibilité 1 V/div), la tension $v_1(t)$ (voie 1, en bleu) et la tension entre la borne marquée L2 et le neutre (voie 2, en orange). Base de temps : 2 ms/div.



4. Vérifier sur l'oscillogramme la période et la valeur maximale de $v_1(t)$.
5. On rappelle que, dans l'ordre des phases direct, v_2 est en retard de 120° sur v_1 ; si deux phases sont permutées (ordre inverse), un moteur triphasé tourne en sens inverse. Mesurer le décalage entre deux passages par zéro croissants des deux tensions. La tension de la voie 2 est-elle en avance ou en retard sur v_1, et de quel angle ? La borne L2 du coffret est-elle reliée à la phase 2 du réseau ? Conclure sur l'ordre des phases du coffret.
6. Quelle serait la conséquence pour les moteurs de la grue ? Que doit faire l'électricien ?
7. Tracer le diagramme de Fresnel des tensions simples du réseau en ordre direct (échelle : 1 cm pour 50 V), puis construire $\overrightarrow{u_{12}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$. Mesurer sa longueur et son déphasage par rapport à $\overrightarrow{v_1}$.

→ corrigé p. 61

Exercice 2.2 – Couplage du moteur d'un convoyeur ★☆☆

Dans une usine de conditionnement de produits laitiers, le moteur d'un convoyeur à bande vient d'être remplacé. Le moteur neuf est livré avec ses barrettes de couplage en sachet : c'est au technicien de maintenance de le coupler avant la mise sous tension, sur le réseau 230 V / 400 V, 50 Hz de l'atelier. Sa plaque signalétique indique :

5,5 kW	–	400 V Δ / 690 V Y	–	10,8 A / 6,25 A
$\cos(\Phi) = 0{,}82$	–	1 450 tr/min	–	50 Hz

1. Quelle tension un enroulement du moteur peut-il supporter ? En déduire le couplage à réaliser sur ce réseau. Représenter la plaque à bornes avec ses barrettes.
2. Quelle est l'intensité du courant en ligne au fonctionnement nominal ? Calculer l'intensité J du courant dans un enroulement. Comparer à la seconde intensité de la plaque et l'expliquer.
3. Calculer les puissances active P, réactive Q et apparente S absorbées au fonctionnement nominal.
4. La puissance de 5,5 kW est la puissance mécanique utile. Calculer le rendement du moteur et ses pertes.
5. L'ancien moteur, de plaque 230 V / 400 V, était couplé en étoile. Le technicien distrait conserve ce couplage pour le moteur neuf. Quelle tension reçoit alors chaque enroulement ? Le moteur peut-il fonctionner normalement ?

→ corrigé p. 62

Exercice 2.3 – Étuve de polymérisation à deux allures ★★☆

Un fabricant de mobilier métallique cuit la peinture en poudre de ses pièces dans une étuve électrique. Le chauffage est assuré par trois résistances identiques $R = 48\,\Omega$, alimentées par le réseau 230 V / 400 V. Pour la montée en température, les résistances sont couplées en triangle (« grande allure ») ; une fois la température de cuisson atteinte, un jeu de contacteurs les recouple en étoile (« petite allure »).

I- Petite allure (étoile)

1. Quelle est la tension aux bornes de chaque résistance ? Calculer le courant de ligne I_Y et la puissance P_Y.

II- Grande allure (triangle)

2. Calculer le courant J dans chaque résistance, le courant de ligne I_Δ et la puissance P_Δ.
3. Calculer le rapport $\dfrac{P_\Delta}{P_Y}$ et montrer qu'il vaut $\left(\dfrac{U}{V}\right)^2$. Le disjoncteur de l'étuve a un calibre de 16 A : convient-il ?
4. Pour monter en température, l'étuve doit recevoir 6 kW · h. Calculer la durée de la montée en grande allure, puis celle qu'il faudrait en petite allure.

III- Défaut

Lors d'une maintenance, on constate qu'une des trois résistances est coupée.

5. En grande allure, quelle puissance l'étuve absorbe-t-elle encore ? Le récepteur est-il toujours équilibré ?

6. En petite allure, sans neutre relié au point commun, les deux résistances restantes se retrouvent en série entre deux phases. Calculer la puissance absorbée. Pourquoi l'opérateur constate-t-il que l'étuve « ne tient plus sa température » ?

→ corrigé p. 62

Exercice 2.4 – Audit énergétique d'un compresseur d'air ★★☆

Une usine de pièces plastiques produit son air comprimé avec un compresseur à vis entraîné par un moteur asynchrone triphasé (réseau 400 V, 50 Hz, sans neutre). Le compresseur fonctionne en « tout ou rien » : en charge lorsqu'il remplit la cuve, puis à vide (moteur tournant, compresseur déchargé) en attendant la demande suivante. Le responsable énergie soupçonne ce fonctionnement à vide de dégrader le facteur de puissance de l'usine et demande un audit par la méthode des deux wattmètres. On rappelle que, si P_1 et P_2 sont les indications algébriques des deux wattmètres, la puissance active vaut $P = P_1 + P_2$ et la puissance réactive $Q = \sqrt{3}\,(P_1 - P_2)$ pour un récepteur équilibré.

1. Représenter le branchement des deux wattmètres W_1 et W_2 sur les lignes d'alimentation du moteur. Quelles tensions reçoivent leurs circuits tension ?

I- Compresseur en charge

Les wattmètres indiquent $P_1 = 10{,}4\,\mathrm{kW}$ et $P_2 = 4{,}6\,\mathrm{kW}$.

2. Calculer les puissances active P, réactive Q et apparente S, le facteur de puissance et le courant de ligne I.

3. Vérifier que $P_1 = U\,I\cos(\Phi - 30°)$ et $P_2 = U\,I\cos(\Phi + 30°)$.

II- Compresseur à vide

Le wattmètre W_1 indique 3,1 kW ; l'affichage de W_2 est négatif : $-1{,}3\,\mathrm{kW}$.

4. Pourquoi l'indication de W_2 est-elle négative ? Calculer P, Q, le facteur de puissance et le courant de ligne.

5. Expliquer physiquement pourquoi un moteur asynchrone à vide absorbe peu de puissance active mais beaucoup de puissance réactive.

III- Bilan journalier

Le compresseur fonctionne 10 h par jour en charge et 6 h par jour à vide.

6. Calculer les énergies active (en $\mathrm{kW\cdot h}$) et réactive (en $\mathrm{kVAR\cdot h}$) consommées par jour, puis le rapport $\tan(\Phi)$ moyen.

7. Le fournisseur facture l'énergie réactive au-delà de $\tan(\Phi) = 0{,}4$. Que proposer ?

→ corrigé p. 63

Exercice 2.5 – Station de pompage en bout de ligne ★★★

Une commune alimente en eau potable un hameau de montagne grâce à une station de reprise équipée de deux pompes identiques. La station est raccordée au tableau général du réservoir par un câble triphasé de 300 m. L'exploitant signale que les disjoncteurs chauffent et que les moteurs peinent à démarrer en hiver ; on lui demande d'évaluer la chute de tension et les pertes dans ce câble.

Données

- ▷ À l'arrivée du câble (station), la tension composée vaut $U_A = 400\,\text{V}$, 50 Hz.
- ▷ Chaque pompe absorbe $P_p = 22\,\text{kW}$ avec $\cos(\Phi_p) = 0{,}84$; auxiliaires (éclairage, automate, chauffage du local) : 3 kW, $\cos(\Phi) = 1$.
- ▷ Câble : cuivre, section $50\,\text{mm}^2$, $\rho = 0{,}017\,5\,\Omega\cdot\text{mm}^2/\text{m}$; réactance linéique $0{,}08\,\text{m}\Omega/\text{m}$ par conducteur ; résistance d'un conducteur de longueur ℓ et de section S :

$$R = \rho\,\frac{\ell}{S}$$

I- La station

1. Calculer les puissances active P, réactive Q et apparente S de la station, son facteur de puissance et le courant de ligne I.

2. Vue du réseau, la station se comporte comme trois impédances identiques $\underline{Z} = R + jX$ couplées en étoile. Calculer Z, puis R et X.

3. Tracer le diagramme de Fresnel de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{i_1}$ à l'arrivée du câble ($\overrightarrow{v_1}$ horizontal ; 1 cm pour 50 V et pour 20 A).

II- Le câble

4. Calculer la résistance R_L et la réactance X_L d'un conducteur.

5. Calculer les puissances active P_L et réactive Q_L absorbées par le câble.

6. Par le théorème de Boucherot, calculer les puissances au départ du câble, puis la tension composée U_D au départ. En déduire la chute de tension en volts et en pourcentage, ainsi que le rendement du câble.

III- Effet d'une compensation

On installe dans la station une batterie de condensateurs qui porte son facteur de puissance à 0,96.

7. Calculer la puissance réactive fournie par la batterie et la capacité de chaque condensateur couplé en triangle.

8. Calculer le nouveau courant de ligne, les nouvelles pertes dans le câble et la nouvelle tension au départ (on suppose toujours $U_A = 400\,\text{V}$).

9. La compensation a-t-elle un effet notable sur les pertes ? Sur la chute de tension ? Quelle autre solution proposer pour réduire la chute de tension ?

→ corrigé p. 64

Exercice 2.6 – Compensation de l'énergie réactive d'une imprimerie ★★★

Une imprimerie de labeur reçoit de son fournisseur d'énergie un avertissement : son installation consomme trop d'énergie réactive ($\tan(\Phi) > 0{,}4$) et des pénalités seront appliquées. Le chef d'entreprise vous demande de faire le bilan de l'installation, alimentée par le réseau 230 V / 400 V, 50 Hz, puis de dimensionner une batterie de condensateurs.

Données

- Presse rotative : moteur triphasé dont la puissance est mesurée par la méthode des deux wattmètres : $P_1 = 21{,}5\,\text{kW}$, $P_2 = 8{,}5\,\text{kW}$; on rappelle que
$$P = P_1 + P_2 \qquad \text{et} \qquad Q = \sqrt{3}\,(P_1 - P_2)$$
- Compresseur : $P = 11\,\text{kW}$, $\cos(\Phi) = 0{,}80$.
- Sécheur infrarouge : trois résistances $R = 40\,\Omega$ couplées en triangle.
- Éclairage et bureautique, répartis sur les trois phases : $P = 8\,\text{kW}$, $\cos(\Phi) = 0{,}93$ (inductif).

A- Bilan des puissances

1. Calculer les puissances active et réactive de la presse, ainsi que son facteur de puissance.
2. Calculer le courant dans une résistance du sécheur, le courant de ligne et la puissance du sécheur.
3. Calculer les puissances réactives du compresseur et de l'éclairage.
4. Par le théorème de Boucherot, calculer P, Q et S pour l'ensemble de l'installation, son facteur de puissance, $\tan(\Phi)$ et le courant de ligne I. L'avertissement du fournisseur est-il justifié ?

B- Batterie de condensateurs

On vise un facteur de puissance $\cos(\Phi') = 0{,}95$.

5. Calculer la puissance réactive Q_c que doit fournir la batterie.
6. Calculer la capacité de chaque condensateur si la batterie est couplée en triangle, puis en étoile.
7. Pour le couplage triangle, calculer l'intensité du courant dans chaque condensateur et dans chaque ligne d'alimentation de la batterie.
8. Quel couplage choisir ? Argumenter (capacité, tension supportée par chaque condensateur).
9. Calculer le nouveau courant de ligne I'. De quel pourcentage les pertes par effet Joule dans les câbles d'alimentation diminuent-elles ?
10. Représenter sur un même schéma le triangle des puissances de l'installation avant et après compensation (échelle : 1 cm pour 10 kW, kVAR ou kVA).

→ corrigé p. 66

Sujets de type BTS

Chapitre 2

Sujet BTS 2.A – Chauffage et ventilation d'une serre horticole

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 45 minutes

Un horticulteur produit des plants de tomates sous serre. En hiver, la serre est chauffée la nuit par une batterie de résistances électriques, et l'air est brassé par quatre ventilateurs. Le tableau de la serre est alimenté par le réseau 230 V / 400 V, 50 Hz, avec neutre, et protégé par un disjoncteur de calibre 40 A. On vérifie l'installation réalisée par un électricien.

Données

- Batterie de chauffe : 9 éléments chauffants identiques, de plaque 230 V – 2 kW, répartis en trois groupes de trois éléments en parallèle ; les trois groupes sont couplés en étoile.
- Ventilateurs : 4 moteurs asynchrones triphasés identiques ; plaque : 230 V / 400 V ; puissance utile 1,1 kW ; rendement 0,80 ; $\cos(\Phi) = 0{,}76$.
- Prix de l'énergie active : 0,18 € le kW · h.
- Rappel : permuter deux phases de l'alimentation d'un moteur triphasé inverse son sens de rotation.

Partie A – Réseau d'alimentation

A.1. Donner la valeur efficace V des tensions simples et U des tensions composées du réseau. Rappeler la relation entre U et V.

A.2. Tracer le diagramme de Fresnel des tensions simples ($\overrightarrow{v_1}$ horizontal, 1 cm pour 50 V) et construire $\overrightarrow{u_{12}}$. Indiquer l'angle entre $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{u_{12}}$.

Partie B – Batterie de chauffe

B.1. Quelle est la tension aux bornes de chaque élément ? Justifier le couplage en étoile.

B.2. Calculer la résistance R_e d'un élément, puis le courant dans un élément et le courant de ligne I_c.

B.3. Calculer la puissance P_c de la batterie et vérifier le résultat avec la formule

$$P = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)$$

B.4. Pour gagner du temps, un stagiaire propose de coupler les groupes en triangle « pour chauffer plus vite ». Quelle puissance chaque élément dissiperait-il ? Conclure.

Partie C – Ventilateurs

C.1. Quel couplage faut-il réaliser pour les moteurs ? Justifier.

C.2. Calculer la puissance active absorbée par un moteur, son courant de ligne et sa puissance réactive.

C.3. Tracer, pour un moteur, le diagramme de Fresnel de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{i_1}$ en faisant apparaître l'angle Φ.

C.4. Après une intervention sur le tableau, les ventilateurs soufflent l'air vers le bas au lieu de l'aspirer. Expliquer l'origine probable de ce défaut et la manière d'y remédier.

Partie D – Bilan de l'installation

D.1. À l'aide du théorème de Boucherot, calculer les puissances P, Q et S de l'installation en fonctionnement nocturne (chauffage et quatre ventilateurs), ainsi que son facteur de puissance.

D.2. Calculer le courant de ligne. Le calibre du disjoncteur convient-il ?

D.3. Est-il utile d'installer une batterie de condensateurs ? Justifier.

D.4. Calculer l'énergie consommée et son coût pour une nuit d'hiver de 10 h.

→ corrigé p. 68

Sujet BTS 2.B – Extension d'une scierie

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure 15 minutes

Une scierie industrielle est alimentée par son propre transformateur 20 kV / 400 V de puissance apparente nominale $S_n = 160\,\text{kVA}$. L'entreprise veut installer une déligneuse supplémentaire sans changer de transformateur, ce qui coûterait plusieurs dizaines de milliers d'euros. On étudie l'installation actuelle, puis la solution proposée : une batterie de condensateurs. Le réseau du site est un réseau 230 V / 400 V, 50 Hz.

Données

- Scie de tête : moteur asynchrone, plaque 400 V Δ / 690 V Y. Méthode des deux wattmètres en fonctionnement : $P_1 = 31{,}2\,\text{kW}$, $P_2 = 9{,}8\,\text{kW}$; on rappelle que
$$P = P_1 + P_2 \qquad \text{et} \qquad Q = \sqrt{3}\,(P_1 - P_2)$$
- Aspiration des copeaux : puissance absorbée 32 kW, $\cos(\Phi) = 0{,}86$.
- Convoyeurs : 4 moteurs de puissance utile 5,5 kW, rendement 0,88, $\cos(\Phi) = 0{,}78$.
- Séchoir à bois : trois résistances $R = 20\,\Omega$ couplées en triangle.
- Éclairage et atelier d'affûtage : 6 kW, $\cos(\Phi) = 1$.
- Déligneuse prévue : puissance utile 18,5 kW, rendement 0,90, $\cos(\Phi) = 0{,}82$.

Partie A – Scie de tête

A.1. Quel est le couplage du moteur de la scie sur ce réseau ? Justifier.

A.2. Représenter le branchement des deux wattmètres et préciser la tension appliquée au circuit tension de chacun.

A.3. Calculer les puissances active P_s, réactive Q_s et apparente S_s du moteur, puis son facteur de puissance.

A.4. Calculer le courant de ligne I_s, puis le courant J_s dans un enroulement.

Partie B – Séchoir

B.1. Calculer le courant dans une résistance, le courant de ligne et la puissance du séchoir.

Partie C – Bilan de l'installation actuelle

C.1. Calculer les puissances actives et réactives de l'aspiration et des convoyeurs.

C.2. Dresser le bilan de Boucherot de l'installation (tableau) et calculer P, Q, S, le facteur de puissance et le courant de ligne I.

C.3. Calculer le courant nominal du transformateur au secondaire. Quel est son taux de charge ?

Partie D – Ajout de la déligneuse

D.1. Calculer les puissances active et réactive absorbées par la déligneuse.

D.2. Calculer la nouvelle puissance apparente de l'installation. Le transformateur peut-il l'alimenter ?

D.3. Calculer le courant de ligne qui serait alors appelé au secondaire du transformateur et le comparer à son courant nominal. Quelle conséquence aurait ce dépassement s'il durait plusieurs heures ?

Partie E – Batterie de condensateurs

On installe, au tableau général, une batterie de condensateurs couplée en triangle pour obtenir $\cos(\Phi') = 0{,}95$ avec la déligneuse en service.

E.1. Calculer la puissance réactive Q_c de la batterie et la capacité C de chaque condensateur.

E.2. Calculer le courant dans un condensateur et le courant de ligne de la batterie.

E.3. Calculer la nouvelle puissance apparente et le nouveau courant de ligne. L'extension est-elle possible sans changer de transformateur ?

E.4. Pourquoi la batterie est-elle couplée en triangle plutôt qu'en étoile ? Quelle tension doivent supporter ses condensateurs ?

E.5. Rédiger en quelques lignes une conclusion pour le dirigeant de la scierie.

→ corrigé p. 70

Corrigés

Chapitre 2

✓ Corrigé de l'exercice 2.1 – Mise en service d'un coffret de chantier

1. Tension entre une phase et le neutre : c'est une **tension simple**. Entre deux phases, on attend la tension composée :

$$U = \sqrt{3}\,V = \sqrt{3} \times 229 \quad \text{soit} \quad \boxed{U \approx 397\,\text{V}}$$

2. $V\sqrt{2} = 229\sqrt{2} \approx 324\,\text{V}$ et $\omega = 2\pi \times 50 \approx 314\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$v_1(t) = 324\sin(314\,t) \qquad v_2(t) = 324\sin\left(314\,t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = 324\sin\left(314\,t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

3. À $t = 2\,\text{ms}$, $\omega t = 314 \times 0{,}002 \approx 0{,}628\,\text{rad} = 36°$:

$$v_1 = 324\sin(36°) \approx 190\,\text{V} \qquad v_2 = 324\sin(-84°) \approx -322\,\text{V}$$

$$v_3 = 324\sin(-204°) \approx 132\,\text{V}$$

Somme : $190 - 322 + 132 = 0$ ✓ (à l'arrondi près).

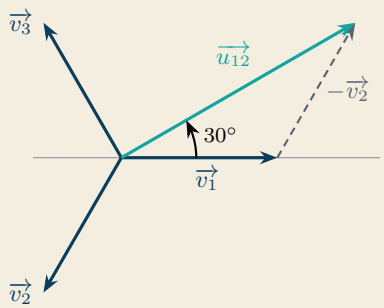
4. Une période occupe 10 divisions : $T = 10 \times 2 = 20\,\text{ms}$, soit $f = 50\,\text{Hz}$ ✓. Amplitude de v_1 : 3,24 div, soit $3{,}24 \times 1 \times 100 = 324\,\text{V} = 229\sqrt{2}$ ✓.

5. La tension de la voie 2 passe par son maximum 3,33 div **avant** v_1 : $\tau \approx 6{,}7\,\text{ms}$, d'où $|\Phi| = 360 \times \dfrac{6{,}7}{20} \approx 120°$. Elle est **en avance** de 120° sur v_1 (ou, ce qui revient au même, en retard de 240°).

Or v_2 est en **retard** de 120° sur v_1 : la borne L2 n'est pas reliée à la phase 2 mais à la phase 3. Le coffret est câblé en ordre inverse.

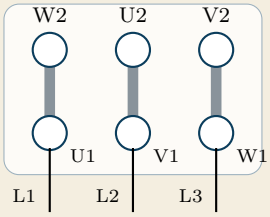
6. Les moteurs de la grue tourneraient à l'envers : la commande « montée » ferait descendre la charge, l'orientation serait inversée et les fins de course risqueraient de ne plus jouer leur rôle. C'est dangereux. L'électricien **permute deux phases** à l'arrivée du câble dans le coffret, puis contrôle à nouveau l'ordre des phases.

7. Les trois vecteurs mesurent $\dfrac{229}{50} \approx 4{,}6\,\text{cm}$ et sont décalés de 120°. On trace $-\overrightarrow{v_2}$ à l'extrémité de $\overrightarrow{v_1}$: on mesure $\overrightarrow{u_{12}} \approx 7{,}9\,\text{cm}$, soit $U \approx 397\,\text{V} = \sqrt{3}\,V$ ✓, en **avance de** 30° sur $\overrightarrow{v_1}$.



✓ Corrigé de l'exercice 2.2 – Couplage du moteur d'un convoyeur

1. La plus petite tension de la plaque, 400 V, est celle que supporte un enroulement. Le réseau a pour tension composée $U = 400\,\text{V}$, égale à la plus petite tension de la plaque : couplage triangle. Chaque enroulement est alors branché entre deux phases et reçoit 400 V. Sur la plaque à bornes, trois barrettes verticales relient U1–W2, V1–U2 et W1–V2 :



2. En triangle, le courant de ligne est la plus grande intensité de la plaque : $I = 10{,}8\,\text{A}$.

$$J = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{10{,}8}{\sqrt{3}} \quad \text{soit} \quad \boxed{J \approx 6{,}24\,\text{A}}$$

C'est, aux arrondis près, la seconde intensité de la plaque (6,25 A) : en étoile sous 690 V, le courant de ligne traverse directement un enroulement, qui reçoit encore 400 V et absorbe le même courant.

3. $P = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi) = \sqrt{3} \times 400 \times 10{,}8 \times 0{,}82$ soit $\boxed{P \approx 6{,}14\,\text{kW}}$

$$\sin(\Phi) = \sin(\arccos(0{,}82)) \approx 0{,}572 \qquad Q = \sqrt{3} \times 400 \times 10{,}8 \times 0{,}572 \approx 4{,}28\,\text{kVAR}$$

$$S = \sqrt{3} \times 400 \times 10{,}8 \approx 7{,}48\,\text{kVA}$$

4. $\eta = \dfrac{P_u}{P} = \dfrac{5\,500}{6\,136}$ soit $\boxed{\eta \approx 0{,}896}$; pertes : $6\,136 - 5\,500 \approx 636\,\text{W}$.

5. En étoile, chaque enroulement reçoit $V = \dfrac{400}{\sqrt{3}} \approx 231\,\text{V}$ au lieu de 400 V. Le moteur est sous-alimenté : son couple, proportionnel au carré de la tension, est divisé par environ 3. Il démarre mal ou pas du tout en charge, son courant augmente et il chauffe : la protection thermique finit par déclencher. Le moteur ne fonctionne pas normalement.

✓ Corrigé de l'exercice 2.3 – Étuve de polymérisation à deux allures

I- Petite allure

1. En étoile, chaque résistance est sous $V = 230\,\text{V}$ et traversée par le courant de ligne :

$$I_Y = \frac{V}{R} = \frac{230}{48} \approx 4{,}79\,\text{A} \qquad P_Y = 3\,\frac{V^2}{R} = 3 \times \frac{230^2}{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_Y \approx 3{,}31\,\text{kW}}$$

II- Grande allure

2. Chaque résistance est sous $U = 400\,\text{V}$:

$$J = \frac{U}{R} = \frac{400}{48} \approx 8{,}33\,\text{A} \qquad I_\Delta = \sqrt{3}\,J \approx 14{,}4\,\text{A}$$

$$P_\Delta = 3\,\frac{U^2}{R} = 3 \times \frac{400^2}{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_\Delta = 10{,}0\,\text{kW}}$$

3. $\dfrac{P_\Delta}{P_Y} = \dfrac{3\,U^2/R}{3\,V^2/R} = \left(\dfrac{U}{V}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$. Numériquement : $10\,000/3\,306 \approx 3{,}02$ (l'écart vient de l'arrondi $400 \approx \sqrt{3} \times 230$).

$I_\Delta = 14{,}4\,\text{A} < 16\,\text{A}$: le disjoncteur convient.

4. $\Delta t = E/P$: en grande allure, $6/10 = 0{,}6\,\text{h} = 36\,\text{min}$; en petite allure, $6/3{,}31 \approx 1{,}81\,\text{h}$, soit environ 1 h 49 min. D'où l'intérêt des deux allures : montée rapide, puis maintien à puissance réduite.

III- Défaut

5. Les deux résistances restantes sont toujours sous $U = 400\,\text{V}$:

$$P = 2 \times \frac{400^2}{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{P \approx 6{,}67\,\text{kW}}$$

soit les deux tiers de la puissance normale. Le récepteur n'est plus équilibré : les trois courants de ligne n'ont plus la même valeur (une ligne n'alimente plus qu'une résistance).

6. Les deux résistances en série ($2R = 96\,\Omega$) sont sous $U = 400\,\text{V}$:

$$I = \frac{400}{96} \approx 4{,}17\,\text{A} \qquad P = \frac{U^2}{2R} = \frac{400^2}{96} \quad \text{soit} \quad \boxed{P \approx 1{,}67\,\text{kW}}$$

C'est environ la moitié de P_Y (1,67 kW au lieu de 3,31 kW) : la puissance de maintien ne compense plus les pertes thermiques de l'étuve, la température baisse.

✓ Corrigé de l'exercice 2.4 – Audit énergétique d'un compresseur d'air

1. Circuit courant de W_1 dans la ligne 1, circuit tension entre les lignes 1 et 3 : il reçoit u_{13}. Circuit courant de W_2 dans la ligne 2, circuit tension entre les lignes 2 et 3 : il reçoit u_{23} (schéma du cours, paragraphe 2.5).

I- Compresseur en charge

2. $P = P_1 + P_2 = 10{,}4 + 4{,}6$ soit $\boxed{P = 15{,}0\,\text{kW}}$

$$Q = \sqrt{3}\,(P_1 - P_2) = \sqrt{3} \times 5{,}8 \quad \text{soit} \quad \boxed{Q \approx 10{,}0\,\text{kVAR}}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \approx 18{,}1\,\text{kVA} \qquad \cos(\Phi) = \frac{P}{S} \approx 0{,}83$$

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\,U} = \frac{18\,053}{\sqrt{3} \times 400} \approx 26{,}1\,\text{A}$$

3. $\Phi = \arctan\left(\dfrac{Q}{P}\right) \approx 33{,}8°$. $U\,I = 400 \times 26{,}06 \approx 10{,}42\,\text{kVA}$:

$$U\,I\cos(3{,}8°) \approx 10{,}4\,\text{kW} = P_1 \;\checkmark$$

$$U\,I\cos(63{,}8°) \approx 4{,}6\,\text{kW} = P_2 \;\checkmark$$

II- Compresseur à vide

4. $P_2 = U\,I\cos(\Phi+30°)$ est négative lorsque $\Phi+30° > 90°$, c'est-à-dire lorsque $\Phi > 60°$ ($\cos(\Phi) < 0{,}5$) : c'est le signe d'un très mauvais facteur de puissance.

$$P = 3{,}1 + (-1{,}3) = 1{,}8\,\text{kW} \qquad Q = \sqrt{3} \times (3{,}1 + 1{,}3) \approx 7{,}62\,\text{kVAR}$$

$$S \approx 7{,}83\,\text{kVA} \qquad \boxed{\cos(\Phi) \approx 0{,}23} \qquad I = \frac{7\,831}{\sqrt{3} \times 400} \approx 11{,}3\,\text{A}$$

5. À vide, le moteur ne fournit presque pas de puissance mécanique : la puissance active ne couvre que ses pertes (frottements, pertes fer, effet Joule). En revanche, il doit toujours créer son champ magnétique tournant, ce qui demande une puissance réactive presque égale à celle de la marche en charge. Le facteur de puissance s'effondre.

III- Bilan journalier

6. $E_a = 15 \times 10 + 1{,}8 \times 6 = 160{,}8\,\text{kW}\cdot\text{h}$; $\quad E_r = 10{,}05 \times 10 + 7{,}62 \times 6 \approx 146{,}2\,\text{kVAR}\cdot\text{h}$.

$$\tan(\Phi_{moy}) = \frac{E_r}{E_a} = \frac{146{,}2}{160{,}8} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tan(\Phi_{moy}) \approx 0{,}91}$$

7. $0{,}91 > 0{,}4$: l'énergie réactive est facturée. La marche à vide représente à elle seule $45{,}7\,\text{kVAR}\cdot\text{h}$ pour seulement $10{,}8\,\text{kW}\cdot\text{h}$ utiles. On peut :

- ▷ arrêter le moteur après une courte temporisation à vide (ou utiliser un compresseur à vitesse variable, qui adapte son débit au besoin) ;
- ▷ installer une batterie de condensateurs pour fournir localement la puissance réactive.

✓ Corrigé de l'exercice 2.5 – Station de pompage en bout de ligne

I- La station

1. $Q_p = 2 \times 22 \times \tan(\arccos(0{,}84)) \approx 44 \times 0{,}646 \approx 28{,}4\,\text{kVAR}$; les auxiliaires n'absorbent pas de puissance réactive.

$$P = 44 + 3 = 47\,\text{kW} \qquad Q \approx 28{,}4\,\text{kVAR} \qquad S = \sqrt{47^2 + 28{,}4^2} \approx 54{,}9\,\text{kVA}$$

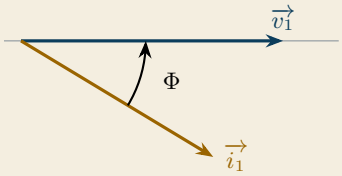
$$\cos(\Phi) = \frac{47}{54{,}9} \approx 0{,}856 \qquad I = \frac{S}{\sqrt{3}\,U_A} = \frac{54\,925}{\sqrt{3} \times 400} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 79{,}3\,\text{A}}$$

2. Chaque impédance est sous $V = \dfrac{400}{\sqrt{3}} \approx 231\,\text{V}$ et traversée par I :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{231}{79{,}3} \approx 2{,}91\,\Omega \qquad R = Z\cos(\Phi) \approx 2{,}49\,\Omega \qquad X = Z\sin(\Phi) \approx 1{,}51\,\Omega$$

Contrôle : $3\,R\,I^2 = 3 \times 2{,}493 \times 79{,}28^2 \approx 47{,}0\,\text{kW}$ ✓.

3. $\overrightarrow{v_1}$: $231/50 \approx 4{,}6\,\text{cm}$, horizontal. $\overrightarrow{i_1}$: $79{,}3/20 \approx 4{,}0\,\text{cm}$, en retard de $\Phi = \arccos(0{,}856) \approx 31{,}1°$ sur $\overrightarrow{v_1}$ (station inductive). L'angle Φ est orienté de $\overrightarrow{i_1}$ vers $\overrightarrow{v_1}$.



II- Le câble

4. $R_L = \rho\dfrac{\ell}{S} = 0{,}017\,5 \times \dfrac{300}{50} = 0{,}105\,\Omega\,;\quad X_L = 300 \times 0{,}08 \times 10^{-3} = 0{,}024\,\Omega.$

En triphasé, chaque conducteur de phase est parcouru par I : on ne compte pas d'« aller et retour » (le neutre ne transporte aucun courant).

5. $P_L = 3\,R_L\,I^2 = 3 \times 0{,}105 \times 79{,}28^2$ soit $\boxed{P_L \approx 1{,}98\,\text{kW}}$

$$Q_L = 3\,X_L\,I^2 = 3 \times 0{,}024 \times 79{,}28^2 \approx 453\,\text{VAR}$$

6. Bilan de Boucherot :

	P (kW)	Q (kVAR)
Station	47	28,42
Câble	1,98	0,45
Départ	48,98	28,87

$S_D = \sqrt{48{,}98^2 + 28{,}87^2} \approx 56{,}86\,\text{kVA}$. Le courant est le même au départ et à l'arrivée : $S_D = \sqrt{3}\,U_D\,I$, d'où

$$U_D = \frac{S_D}{\sqrt{3}\,I} = \frac{56\,857}{\sqrt{3} \times 79{,}28} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_D \approx 414\,\text{V}}$$

Chute de tension : $\Delta U \approx 14{,}1\,\text{V}$, soit $3{,}5\,\%$ de $400\,\text{V}$. Rendement du câble : $47/48{,}98 \approx 0{,}96$: $4\,\%$ de l'énergie est perdue en chaleur.

III- Effet d'une compensation

7. $Q' = P\tan(\arccos(0{,}96)) = 47 \times 0{,}291\,7 \approx 13{,}71\,\text{kVAR}$, donc $Q_c = Q' - Q \approx -14{,}71\,\text{kVAR}$.

$$C_\Delta = \frac{-Q_c}{3\,\omega\,U^2} = \frac{14\,710}{3 \times 314 \times 400^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_\Delta \approx 98\,\mu\text{F}}$$

8. Nouveau courant de ligne :

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3}\,U_A \cos(\Phi')} = \frac{47\,000}{\sqrt{3} \times 400 \times 0{,}96} \approx 70{,}7\,\text{A}$$

$P'_L = 3 \times 0{,}105 \times 70{,}67^2 \approx 1{,}57\,\text{kW}$; $Q'_L \approx 0{,}36\,\text{kVAR}$.

$$S'_D = \sqrt{48{,}57^2 + 14{,}07^2} \approx 50{,}57\,\text{kVA} \qquad U'_D = \frac{50\,569}{\sqrt{3} \times 70{,}67} \approx 413\,\text{V}$$

9. Les pertes baissent d'environ 20 % (1,98 kW → 1,57 kW), mais la chute de tension ne passe que de 3,5 % à 3,3 %. Ce câble est surtout **résistif** ($R_L \approx 4\,X_L$) : la chute de tension vient principalement du transport de la puissance **active**, que la compensation ne réduit pas. Pour réduire la chute de tension, il faut augmenter la section du câble (95 mm² divise R_L par près de deux). La compensation reste utile : elle réduit les pertes, soulage les disjoncteurs qui chauffaient et supprime d'éventuelles pénalités d'énergie réactive.

✎ **Méthode** Quand on connaît la tension à une extrémité d'une ligne, la méthode de Boucherot donne la tension à l'autre extrémité sans diagramme de Fresnel : on ajoute les puissances de la ligne à celles du récepteur, puis $U = S/(\sqrt{3}\,I)$, puisque le courant de ligne est le même aux deux extrémités.

✓ Corrigé de l'exercice 2.6 – Compensation de l'énergie réactive d'une imprimerie

A- Bilan des puissances

1. $P_r = P_1 + P_2 = 21{,}5 + 8{,}5 = 30\,\text{kW}$; $Q_r = \sqrt{3} \times (21{,}5 - 8{,}5) \approx 22{,}52\,\text{kVAR}$.

$$S_r = \sqrt{30^2 + 22{,}52^2} \approx 37{,}51\,\text{kVA} \qquad \cos(\Phi_r) = \frac{30}{37{,}51} \approx 0{,}80$$

2. En triangle, chaque résistance est sous $U = 400\,\text{V}$: $J = 400/40 = 10\,\text{A}$; $I = \sqrt{3}\,J \approx 17{,}3\,\text{A}$; $P_s = 3\,R\,J^2 = 3 \times 40 \times 10^2 = 12\,\text{kW}$.

3. Compresseur : $Q_c = 11 \times \tan(\arccos(0{,}80)) = 11 \times 0{,}75 = 8{,}25\,\text{kVAR}$; éclairage : $Q_e = 8 \times \tan(\arccos(0{,}93)) \approx 3{,}16\,\text{kVAR}$.

4. Bilan de Boucherot :

Récepteur	P (kW)	Q (kVAR)
Presse rotative	30	22,52
Compresseur	11	8,25
Sécheur	12	0
Éclairage, bureautique	8	3,16
Installation	**61**	33,93

$$S = \sqrt{61^2 + 33{,}93^2} \approx 69{,}8\,\text{kVA} \qquad \cos(\Phi) = \frac{61}{69{,}8} \approx 0{,}874$$

$$\boxed{\tan(\Phi) = \frac{33{,}93}{61} \approx 0{,}556}$$

$$I = \frac{69\,801}{\sqrt{3} \times 400} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 101\,\text{A}}$$

$\tan(\Phi) \approx 0{,}556 > 0{,}4$: l'avertissement est justifié.

B- Batterie de condensateurs

5. $\tan(\Phi') = \tan(\arccos(0{,}95)) \approx 0{,}329$:

$$Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi)) = 61 \times (0{,}329 - 0{,}556) \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_c \approx -13{,}9\,\text{kVAR}}$$

6. Triangle : $C_\Delta = \dfrac{-Q_c}{3\,\omega\,U^2} = \dfrac{13\,879}{3 \times 314 \times 400^2}$ soit $\boxed{C_\Delta \approx 92\,\mu\text{F}}$

Étoile : $C_Y = \dfrac{-Q_c}{3\,\omega\,V^2} = \dfrac{13\,879}{3 \times 314 \times 230^2} \approx 279\,\mu\text{F}$, soit environ $3\,C_\Delta$.

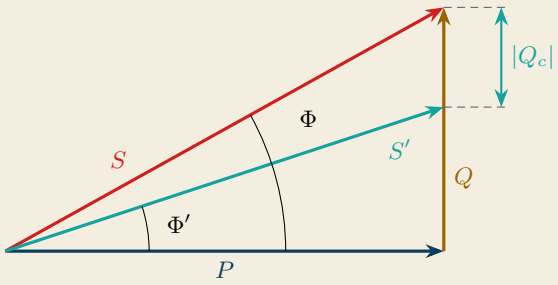
7. Chaque condensateur est sous U : $J_C = C_\Delta\,\omega\,U = 92{,}0 \times 10^{-6} \times 314 \times 400 \approx 11{,}6\,\text{A}$; courant de ligne de la batterie : $I_C = \sqrt{3}\,J_C \approx 20{,}0\,\text{A}$.

8. En triangle, la capacité est trois fois plus faible, d'où des condensateurs plus petits et moins chers ; ils doivent en contrepartie supporter 400 V au lieu de 230 V, ce qui est standard pour les condensateurs de compensation basse tension. On choisit le **couplage triangle**.

9. $I' = \dfrac{P}{\sqrt{3}\,U\cos(\Phi')} = \dfrac{61\,000}{\sqrt{3} \times 400 \times 0{,}95}$ soit $\boxed{I' \approx 92{,}7\,\text{A}}$

Les pertes Joule varient comme I^2 : $\left(\dfrac{92{,}7}{100{,}7}\right)^2 \approx 0{,}85$. Elles diminuent d'environ 15 %, et les pénalités disparaissent.

10. $P = 61\,\text{kW} \to 6{,}1\,\text{cm}$; $Q = 33{,}9\,\text{kVAR} \to 3{,}4\,\text{cm}$; $Q' = P\tan(\Phi') \approx 20{,}1\,\text{kVAR} \to 2{,}0\,\text{cm}$; la batterie fournit $|Q_c| \approx 13{,}9\,\text{kVAR} \to 1{,}4\,\text{cm}$. Les hypoténuses mesurent $S \to 7{,}0\,\text{cm}$ et $S' \approx 64{,}2\,\text{kVA} \to 6{,}4\,\text{cm}$.



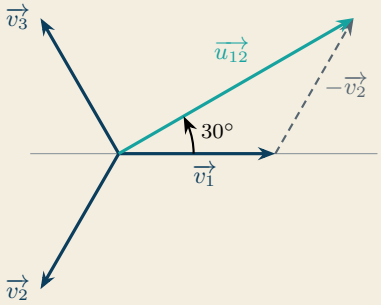
Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 2.A – Chauffage et ventilation d'une serre horticole

Partie A – Réseau d'alimentation

A.1. $V = 230\,\text{V}$ (entre phase et neutre), $U = 400\,\text{V}$ (entre deux phases), avec $\boxed{U = \sqrt{3}\,V}$

A.2. $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$: 4,6 cm chacun, décalés de 120° ($\overrightarrow{v_2}$ en retard de 120° sur $\overrightarrow{v_1}$). $\overrightarrow{u_{12}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$ mesure 8,0 cm (400 V) et il est en **avance de** 30° sur $\overrightarrow{v_1}$.



Partie B – Batterie de chauffe

B.1. Les éléments sont prévus pour 230 V : ils doivent recevoir la tension simple V. En étoile, chaque groupe est branché entre une phase et le neutre : chaque élément est bien sous 230 V.

B.2. $R_e = \dfrac{V^2}{P_e} = \dfrac{230^2}{2\,000}$ soit $\boxed{R_e \approx 26{,}5\,\Omega}$;

courant dans un élément : $2\,000/230 \approx 8{,}70$ A.

Chaque ligne alimente un groupe de trois éléments en parallèle : $I_c = 3 \times 8{,}70$ soit $\boxed{I_c \approx 26{,}1\,\text{A}}$

B.3. $P_c = 9 \times 2$ soit $\boxed{P_c = 18\,\text{kW}}$ Vérification ($\cos(\Phi) = 1$) : $\sqrt{3} \times 400 \times 26{,}1 \approx 18{,}1$ kW ✓ (écart dû à l'arrondi $400 \approx \sqrt{3} \times 230$).

B.4. En triangle, chaque élément recevrait $U = 400$ V :

$$P'_e = \frac{U^2}{R_e} = \frac{400^2}{26{,}45} \approx 6{,}05\,\text{kW}$$

soit trois fois sa puissance nominale : les éléments seraient détruits en quelques minutes. Le couplage ne se choisit pas pour chauffer plus, mais pour respecter la tension nominale des éléments.

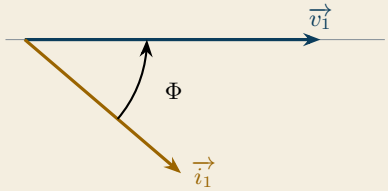
Partie C – Ventilateurs

C.1. Plaque 230 V / 400 V : un enroulement supporte 230 V. Le réseau ($U = 400\,\text{V}$) correspond à la plus grande tension de la plaque : **couplage étoile**

C.2. $P_a = \dfrac{P_u}{\eta} = \dfrac{1\,100}{0{,}80} = 1\,375\,\text{W}$; $I = \dfrac{P_a}{\sqrt{3}\,U\cos(\Phi)} = \dfrac{1\,375}{\sqrt{3}\times 400\times 0{,}76} \approx 2{,}61\,\text{A}$

$$Q = P_a\tan(\Phi) = 1\,375\times\tan(\arccos(0{,}76)) \quad \text{soit} \quad \boxed{Q \approx 1\,176\,\text{VAR}}$$

C.3. $\Phi = \arccos(0{,}76) \approx 40{,}5°$: $\overrightarrow{i_1}$ est en retard de 40,5° sur $\overrightarrow{v_1}$ (moteur inductif). L'arc de Φ part de $\overrightarrow{i_1}$ et arrive sur $\overrightarrow{v_1}$.



C.4. Les moteurs tournent à l'envers : lors de l'intervention, deux phases ont été croisées en amont des ventilateurs (ordre des phases inversé). Il suffit de **permuter deux phases** au départ qui alimente les ventilateurs, après avoir contrôlé l'ordre des phases.

Partie D – Bilan de l'installation

D.1. Chauffage : 18 kW, 0 VAR ; ventilateurs : $4\times 1\,375 = 5{,}5\,\text{kW}$ et $4\times 1\,176 \approx 4{,}70\,\text{kVAR}$.

$$P = 23{,}5\,\text{kW} \qquad Q \approx 4{,}70\,\text{kVAR}$$

$$S = \sqrt{23{,}5^2 + 4{,}70^2} \approx 24{,}0\,\text{kVA} \qquad f_p = \frac{23{,}5}{24{,}0} \approx 0{,}98$$

D.2. $I = \dfrac{S}{\sqrt{3}\,U} = \dfrac{23\,966}{\sqrt{3}\times 400}$ soit $\boxed{I \approx 34{,}6\,\text{A}}$ $< 40\,\text{A}$: le disjoncteur convient.

D.3. Non : le facteur de puissance vaut déjà 0,98 :

$$\tan(\Phi) = \frac{4{,}70}{23{,}5} = 0{,}20 < 0{,}4$$

grâce au chauffage résistif qui domine le bilan. Une compensation n'apporterait presque rien.

D.4. $E = P\times\Delta t = 23{,}5\times 10$ soit $\boxed{E = 235\,\text{kW}\cdot\text{h}}$; coût : $235\times 0{,}18 \approx 42{,}30$ € par nuit.

✓ Corrigé du sujet BTS 2.B – Extension d'une scierie

Partie A – Scie de tête

A.1. Plaque 400 V / 690 V : un enroulement supporte 400 V, égale à la tension composée du réseau : **couplage triangle**

A.2. Circuit courant de W_1 dans la ligne 1 et circuit tension sous u_{13} ; circuit courant de W_2 dans la ligne 2 et circuit tension sous u_{23} (schéma du cours, paragraphe 2.5). Chaque circuit tension reçoit $U = 400\,\text{V}$.

A.3. $P_s = P_1 + P_2 = 31{,}2 + 9{,}8$ soit $\boxed{P_s = 41{,}0\,\text{kW}}$

$$Q_s = \sqrt{3}\,(P_1 - P_2) = \sqrt{3} \times 21{,}4 \approx 37{,}07\,\text{kVAR}$$

$$S_s = \sqrt{41^2 + 37{,}07^2} \approx 55{,}27\,\text{kVA} \qquad \cos(\Phi_s) = \frac{41}{55{,}27} \approx 0{,}742$$

A.4. $I_s = \dfrac{S_s}{\sqrt{3}\,U} = \dfrac{55\,271}{\sqrt{3} \times 400}$ soit $\boxed{I_s \approx 79{,}8\,\text{A}}$;

en triangle, $J_s = I_s/\sqrt{3} \approx 46{,}1\,\text{A}$.

Partie B – Séchoir

B.1. Chaque résistance est sous 400 V : $J = \dfrac{400}{20} = 20\,\text{A}$; $I = \sqrt{3} \times 20 \approx 34{,}6\,\text{A}$;

$P = 3\,R\,J^2 = 3 \times 20 \times 20^2$ soit $\boxed{P = 24\,\text{kW}}$

Partie C – Bilan de l'installation actuelle

C.1. Aspiration : $Q_a = 32 \times \tan(\arccos(0{,}86)) \approx 32 \times 0{,}593 \approx 18{,}99\,\text{kVAR}$.

Convoyeurs : $P_c = 4 \times \dfrac{5{,}5}{0{,}88} = 25\,\text{kW}$; $Q_c = 25 \times \tan(\arccos(0{,}78)) \approx 25 \times 0{,}802 \approx 20{,}06\,\text{kVAR}$.

C.2. Bilan de Boucherot :

Récepteur	P (kW)	Q (kVAR)
Scie de tête	41	37,07
Aspiration	32	18,99
Convoyeurs	25	20,06
Séchoir	24	0
Éclairage, affûtage	6	0
Installation	**128**	76,11

$$S = \sqrt{128^2 + 76{,}11^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{S \approx 148{,}9\,\text{kVA}} \qquad f_p = \frac{128}{148{,}9} \approx 0{,}86$$

$$I = \frac{148\,919}{\sqrt{3} \times 400} \approx 215\,\text{A}$$

C.3. $I_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{3}\,U} = \dfrac{160\,000}{\sqrt{3}\times 400} \approx 231\,\text{A}$; taux de charge : $\dfrac{148{,}9}{160} \approx 93\,\%$. Le transformateur est presque à pleine charge.

Partie D – Ajout de la déligneuse

D.1. $P_d = 18{,}5/0{,}90 \approx 20{,}56\,\text{kW}$; $Q_d = 20{,}56 \times \tan(\arccos(0{,}82)) \approx 20{,}56 \times 0{,}698 \approx 14{,}35\,\text{kVAR}$.

D.2. $P' = 128 + 20{,}56 = 148{,}56\,\text{kW}$; $Q' = 76{,}11 + 14{,}35 = 90{,}46\,\text{kVAR}$.

$$S' = \sqrt{148{,}56^2 + 90{,}46^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{S' \approx 173{,}9\,\text{kVA}} \quad > 160\,\text{kVA}$$

Sans autre mesure, le transformateur serait surchargé d'environ 9 % : l'extension n'est pas possible en l'état.

D.3. $I' = \dfrac{S'}{\sqrt{3}\,U} = \dfrac{173\,930}{\sqrt{3}\times 400} \approx 251\,\text{A} > I_n = 231\,\text{A}$. Les pertes Joule des enroulements, proportionnelles à I^2, augmenteraient d'environ 18 % : le transformateur s'échaufferait au-delà de sa température admissible, ce qui accélère le vieillissement de ses isolants (ou fait déclencher sa protection).

Partie E – Batterie de condensateurs

E.1. $\tan(\Phi') = \tan(\arccos(0{,}95)) \approx 0{,}329$;

avant compensation, $\tan(\Phi) = 90{,}46/148{,}56 \approx 0{,}609$.

$$Q_c = 148{,}56 \times (0{,}329 - 0{,}609) \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_c \approx -41{,}6\,\text{kVAR}}$$

$$C = \frac{-Q_c}{3\,\omega\,U^2} = \frac{41\,631}{3\times 314\times 400^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C \approx 276\,\mu\text{F}}$$

E.2. $J_C = C\,\omega\,U = 276\times 10^{-6}\times 314\times 400 \approx 34{,}7\,\text{A}$; $I_C = \sqrt{3}\,J_C \approx 60{,}1\,\text{A}$.

E.3. $S'' = \dfrac{P'}{\cos(\Phi')} = \dfrac{148{,}56}{0{,}95}$ soit $\boxed{S'' \approx 156{,}4\,\text{kVA}} < 160\,\text{kVA}$

$$I'' = \frac{156\,374}{\sqrt{3}\times 400} \approx 226\,\text{A} \quad < I_n = 231\,\text{A}$$

L'extension est possible sans changer de transformateur, qui fonctionnera à 98 % de sa puissance nominale.

E.4. En triangle, chaque condensateur reçoit $U = 400\,\text{V}$ au lieu de $V = 230\,\text{V}$: il fournit trois fois plus de puissance réactive, et la capacité nécessaire est trois fois plus faible ($C_Y \approx 835\,\mu\text{F}$ en étoile). Les condensateurs doivent supporter la tension composée, 400 V (en pratique, on choisit des condensateurs de tension assignée un peu supérieure, 440 V par exemple, à cause des surtensions et des harmoniques).

E.5. L'installation actuelle charge déjà le transformateur à 93 %, avec un facteur de puissance de 0,86. L'ajout de la déligneuse le porterait à 109 %. Une batterie de condensateurs d'environ 42 kVAR, couplée en triangle ($3 \times 276\,\mu\text{F}$), relève le facteur de puissance à 0,95 : la puissance apparente redescend à 156 kVA et l'extension devient possible sans changer de transformateur. La marge restante est faible (2 %) : tout nouvel équipement imposera de revoir l'alimentation.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ relier U et V (Fresnel) ; — ex. 2.1, sujet A
- ☐ choisir le couplage d'après la plaque signalétique ; — ex. 2.2, sujets
- ☐ calculer I, J, P, Q, S en étoile et en triangle ; — ex. 2.2 à 2.5
- ☐ mesurer P et Q par la méthode des deux wattmètres ; — ex. 2.4, 2.6, sujet B
- ☐ dimensionner une batterie de condensateurs en étoile ou en triangle ; — ex. 2.5, 2.6, sujet B
- ☐ faire un bilan de Boucherot et relever le f_p. — ex. 2.5, 2.6

CHAPITRE

3

Transformateur monophasé

Constitution, modèle, essais, chute de tension et rendement

Dans ce chapitre

- Constitution et principe de fonctionnement
- Transformateur parfait, rapport de transformation
- Plaque signalétique et grandeurs nominales
- Modèle du transformateur réel vu du secondaire
- Essais à vide et en court-circuit
- Chute de tension (Kapp), pertes et rendement

Objectifs

- ✓ Exploiter le rapport de transformation et la conservation des puissances
- ✓ Lire une plaque signalétique et calculer les courants nominaux
- ✓ Identifier le modèle équivalent à partir des essais
- ✓ Calculer une chute de tension, des pertes et un rendement

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 3

Cours

Chapitre 3

3.1 Constitution et principe

Le **transformateur** est l'appareil qui permet de modifier la valeur efficace d'une tension alternative sans en changer la fréquence. On le rencontre à toutes les échelles : transformateurs de plusieurs centaines de MVA en sortie de centrale, postes de distribution de quartier, transformateurs de commande des armoires électriques, alimentations de petits appareils.

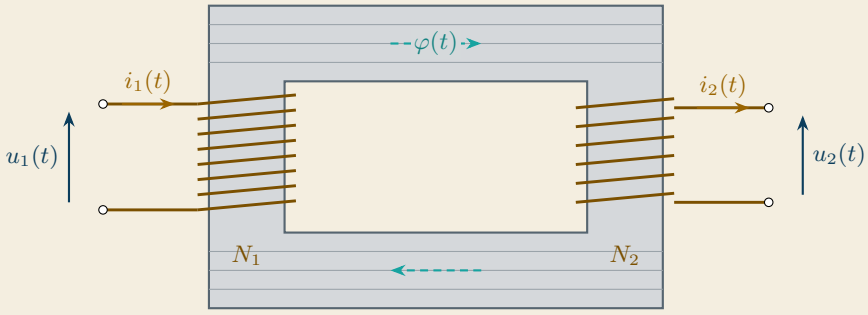
Constitution

D

Définition Un transformateur monophasé est constitué de deux **enroulements** (bobinages en cuivre ou en aluminium) enroulés sur un même **circuit magnétique** fermé :

- ▷ le **primaire**, de N_1 spires, relié à la source (le réseau) : c'est un récepteur ;
- ▷ le **secondaire**, de N_2 spires, relié à la charge : c'est un générateur.

Les deux enroulements ne sont reliés par **aucune liaison électrique** : l'énergie passe du primaire au secondaire par l'intermédiaire du flux magnétique.



Le circuit magnétique est réalisé en **tôles minces** d'acier au silicium, isolées entre elles (circuit « feuilleté »). Son rôle est double : il **canalise le flux** créé par le primaire pour qu'il traverse le secondaire (peu de fuites), et le feuilletage limite les courants induits dans le fer (**courants de Foucault**), donc les pertes.

Principe de fonctionnement

La tension $u_1(t)$ appliquée au primaire crée dans le circuit magnétique un flux $\varphi(t)$ **variable**. Ce flux traverse les N_2 spires du secondaire et y fait apparaître une tension $u_2(t)$ (phénomène d'induction) (voir § 7.7). La tension secondaire est proportionnelle à la tension primaire : le transformateur multiplie la tension par le rapport des nombres de spires N_2/N_1.

✗ **Piège classique : le transformateur en continu** Un transformateur ne fonctionne **qu'en régime alternatif**. Une tension continue ne crée pas de flux variable : aucune tension n'apparaît au secondaire. Pire, le primaire n'est plus limité que par sa faible résistance : le courant devient énorme et l'enroulement brûle.

\+ **Loi de Faraday et formule de Boucherot** – hors programme Si les deux enroulements sont traversés par le même flux et si l'on néglige leurs résistances, la loi de Faraday donne

$$u_1(t) = N_1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad u_2(t) = N_2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

En régime sinusoïdal, le flux maximal vaut $B_{max}\, s$ (s : section du circuit magnétique, B_{max} : champ maximal) et l'on obtient la **formule de Boucherot**, utilisée par les constructeurs pour calculer les bobinages :

$$U_1 = 4{,}44\, N_1\, f\, B_{max}\, s$$

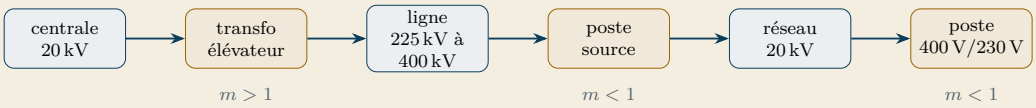
Par exemple, pour $U_1 = 400\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$, $s = 100\,\mathrm{cm}^2$ et $B_{max} = 1{,}2\,\mathrm{T}$, on obtient

$$N_1 = \frac{400}{4{,}44 \times 50 \times 1{,}2 \times 0{,}01} \approx 150 \text{ spires.}$$

À tension et fréquence fixées, B_{max} est imposé et ne dépend pas de la charge : c'est pourquoi les pertes fer sont pratiquement constantes.

Pourquoi transformer la tension ?

Pour une puissance transportée $P = U\, I$ donnée, élever la tension réduit le courant dans les lignes, donc les pertes par effet Joule $R\, I^2$: multiplier la tension par 10 divise le courant par 10 et les pertes par 100.



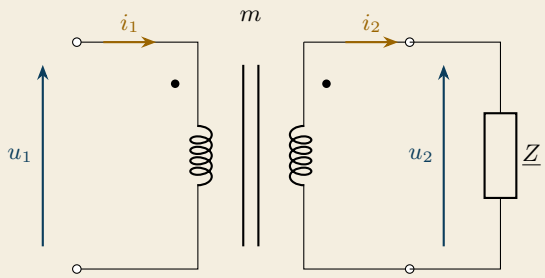
Ex **Exemple : transport de 100 MW sur une ligne de 1 Ω** Sous 20 kV : $I = 100 \times 10^6/(20 \times 10^3) = 5\,000\,\mathrm{A}$ et $P_j = 1 \times 5\,000^2 = 25\,\mathrm{MW}$, le quart de la puissance est perdu.
Sous 400 kV : $I = 250\,\mathrm{A}$ et $P_j = 1 \times 250^2 = 62{,}5\,\mathrm{kW}$, soit 0,06 % seulement.

3.2 Le transformateur parfait

D **Transformateur parfait** Un transformateur est dit **parfait** (ou idéal) s'il n'a **aucune perte** (ni pertes dans le fer, ni pertes par effet Joule dans les enroulements) et **aucune fuite magnétique** : tout le flux créé par le primaire traverse le

D

secondaire. On néglige aussi le courant nécessaire à l'aimantation du circuit magnétique.



Les points noirs repèrent les **bornes homologues** : avec les orientations choisies, u_1 et u_2 sont en phase.

Rapport de transformation

★

À retenir · Rapport de transformation

$$m = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

$m > 1$: transformateur **élévateur** de tension ; $m < 1$: **abaisseur** de tension ; $m = 1$: tensions égales à vide ; l'isolement tient à la construction, pas à m. Ce qui est gagné en tension est perdu en courant : un abaisseur est un élévateur de courant.

Le secondaire ne débite que ce que la charge demande ; le primaire absorbe en conséquence.

✗

Piège classique Écrire $m = U_1/U_2$. Par convention, m est toujours le rapport **secondaire sur primaire** pour les tensions, et **primaire sur secondaire** pour les courants. Contrôle : pour un abaisseur, $m < 1$ et le courant secondaire est le plus grand.

Conservation des puissances

Le transformateur parfait n'a aucune perte : toute la puissance reçue au primaire est restituée au secondaire.

★

À retenir

$$S_1 = U_1\, I_1 = U_2\, I_2 = S_2 \qquad P_1 = P_2 \qquad \eta = \frac{P_2}{P_1} = 100\,\%$$

Ampères-tours et déphasages – hors programme La relation $m = I_1/I_2 = N_2/N_1$ s'écrit aussi $N_1\,I_1 = N_2\,I_2$: c'est la compensation des ampères-tours. Comme u_1 et u_2 sont en phase, le déphasage est le même des deux côtés, $\Phi_1 = \Phi_2$, et donc aussi $Q_1 = Q_2$.

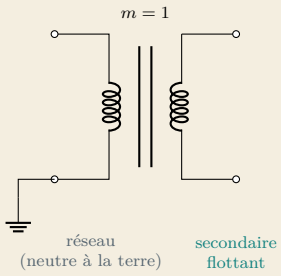
Exemple : transformateur de commande d'une armoire Un transformateur 230 V/24 V, supposé parfait, alimente des bobines de contacteurs qui absorbent au total $I_2 = 5\,\text{A}$ avec $\cos(\Phi_2) = 0{,}4$.

$$m = \frac{24}{230} \approx 0{,}104 \qquad I_1 = m\,I_2 \approx 0{,}52\,\text{A}$$

$$S_1 = S_2 = 24 \times 5 = 120\,\text{VA} \qquad P_1 = P_2 = 120 \times 0{,}4 = 48\,\text{W}$$

Le transformateur d'isolement

Son secondaire est séparé du primaire **par construction** et n'est pas relié à la terre. C'est cette construction, non la valeur de m (1,026 au sujet 3.B), qui sépare les circuits. Dans le modèle idéal, toucher un seul conducteur ne ferme aucune boucle par la terre ; en réalité, les capacités d'isolement laissent passer un faible courant. Usages : blocs opératoires (IT médical), prises rasoir, bancs de dépannage. Un oscilloscope garde sa terre : sur le réseau, on mesure avec des sondes différentielles.



Piège classique L'isolement ne protège que du contact avec un seul conducteur, et tant qu'aucun défaut n'existe. Toucher simultanément les deux bornes du secondaire reste aussi dangereux qu'avec le réseau.

3.3 Grandeurs nominales et plaque signalétique

Un transformateur est choisi d'après sa **puissance apparente nominale** S_n, et non d'après une puissance active : l'échauffement des enroulements dépend du courant, donc de $S = U\,I$, quel que soit le facteur de puissance de la charge.

À retenir · Puissance apparente nominale

$$S_n = U_{1n}\,I_{1n} = U_{2n}\,I_{2n} \quad \Longrightarrow \quad I_{1n} = \frac{S_n}{U_{1n}} \qquad I_{2n} = \frac{S_n}{U_{2n}}$$

S_n en VA. La tension secondaire indiquée sur la plaque est la **tension à vide** U_{20}, obtenue sous la tension primaire nominale.

TRANSFORMATEUR MONOPHASÉ

Type : TM 10	Primaire : 400 V – 25 A
S_n : 10 kVA	Secondaire : 230 V – 43,5 A
f : 50 Hz	u_{cc} : 4,5 %
Classe d'isolation : F	Pertes à vide : 95 W
Refroidissement : AN	Pertes en charge : 220 W

- 400 V/230 V : tension primaire nominale U_{1n} / tension secondaire **à vide** U_{20} ; on en déduit $m = 230/400 = 0{,}575$.
- 25 A et 43,5 A : courants nominaux, $I_{1n} = 10\,000/400$ et $I_{2n} = 10\,000/230$.
- u_{cc} : tension de court-circuit (voir l'encadré « Pour aller plus loin » du § 3.5).
- Pertes à vide et en charge : pertes fer et pertes Joule nominales, qui servent au calcul du rendement (§ 3.7).

✗ **Piège classique** Exprimer S_n en W, ou calculer $P = S_n$. Un transformateur de 10 kVA qui alimente une charge de facteur de puissance 0,8 ne fournit que 8 kW à pleine charge.

3.4 Le transformateur réel

Les imperfections

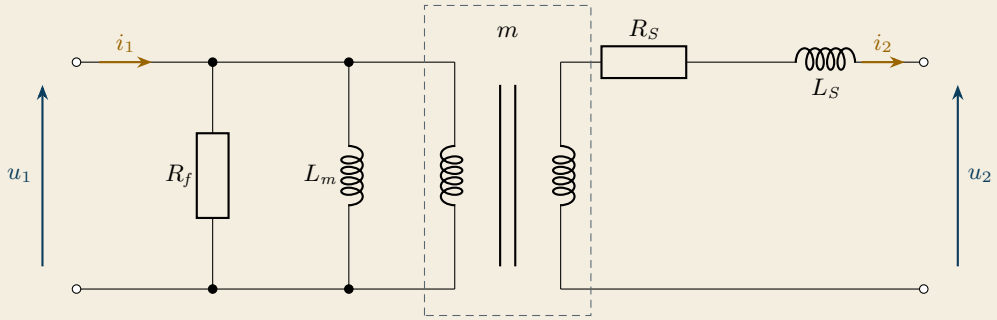
Un transformateur réel s'écarte du modèle parfait pour quatre raisons :

- les enroulements ont une **résistance** : ils dissipent des **pertes par effet Joule** (ou pertes cuivre) P_{joule}, proportionnelles au carré du courant ;
- le circuit magnétique dissipe des **pertes fer** P_{fer} (hystérésis et courants de Foucault) (voir § 7.4), qui dépendent de B_{max} et de f, donc de la tension U_1 et de la fréquence, mais **pas de la charge** ;
- le circuit magnétique doit être aimanté : le primaire absorbe, même à vide, un **courant magnétisant**, essentiellement réactif ;
- une partie du flux ne traverse qu'un seul enroulement : ce sont les **fuites magnétiques**, qui se comportent comme des inductances en série.

Conséquences pratiques : la tension secondaire baisse quand le transformateur débite, et le rendement est inférieur à 100 %.

Modèle équivalent

Chaque imperfection est représentée par un dipôle placé autour d'un transformateur parfait de rapport m.

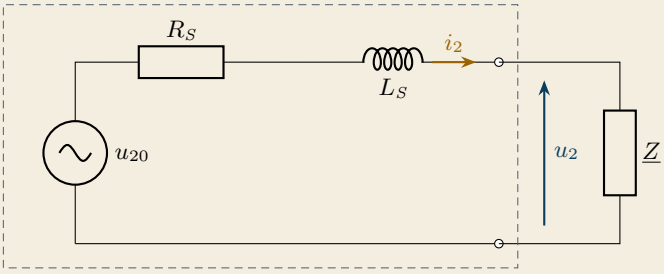


transformateur parfait

Élément	Ce qu'il modélise	Déterminé par
R_f	les pertes fer (côté primaire)	l'essai à vide
L_m	l'aimantation du circuit magnétique (courant magnétisant)	l'essai à vide
R_S	les pertes Joule des deux enroulements, ramenées au secondaire	l'essai en court-circuit
L_S	les fuites magnétiques, ramenées au secondaire	l'essai en court-circuit

Modèle vu du secondaire

Pour étudier ce que reçoit la charge, on remarque que, vu de ses bornes, le secondaire se comporte comme un **générateur de Thévenin** (voir § 1.4) : une source de tension égale à la tension à vide $u_{20} = m\,u_1$, en série avec R_S et L_S. Les éléments R_f et L_m, placés au primaire, n'interviennent pas sur la tension secondaire.



transformateur vu du secondaire : $u_{20} = m\,u_1$

★ **À retenir · Modèle vu du secondaire**

$$U_{20} = m\,U_1 \qquad \underline{u_{20}} = \underline{u_2} + (R_S + jL_S\omega)\,\underline{i_2} \qquad Z_S = \sqrt{R_S^2 + (L_S\omega)^2}$$

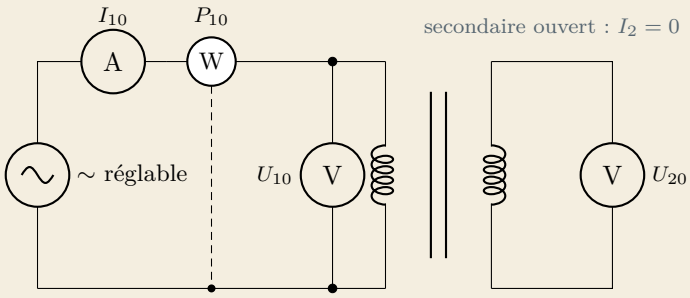
R_S : résistance ramenée au secondaire (Ω) ; $X_S = L_S\omega$: réactance de fuites ramenée au secondaire (Ω) ; Z_S : impédance interne.

Pour un transformateur industriel, R_S et X_S sont faibles (quelques mΩ à quelques dixièmes d'ohm) : la tension secondaire baisse un peu quand le courant augmente, comme celle d'une batterie qui débite.

3.5 Essais à vide et en court-circuit

Les éléments du modèle ne se mesurent pas directement : on les déduit de deux essais, réalisés chacun de façon à rendre un type de pertes négligeable devant l'autre. On utilise un voltmètre, un ampèremètre et un wattmètre au primaire.

Essai à vide



Le secondaire est **ouvert** ($I_2 = 0$) et le primaire est alimenté sous sa tension nominale. Le courant à vide I_{10} est faible (quelques % de I_{1n}) : les pertes Joule sont négligeables, et le wattmètre mesure les **pertes fer**. Le voltmètre secondaire donne directement U_{20}, donc m.

★ **À retenir · Essai à vide**

$$m = \frac{U_{20}}{U_{10}} \qquad P_{10} = P_{fer} \qquad Q_{10} = \sqrt{(U_{10}\,I_{10})^2 - P_{10}^2}$$

$$R_f = \frac{U_{10}^2}{P_{10}} \qquad L_m = \frac{U_{10}^2}{\omega\, Q_{10}}$$

Ex **Exemple : transformateur 10 kVA, 400 V/230 V de la plaque précédente** Sous $U_{10} = 400\,\text{V}$: $I_{10} = 1{,}2\,\text{A}$, $P_{10} = 95\,\text{W}$, $U_{20} = 230\,\text{V}$.

$$m = \frac{230}{400} = 0{,}575 \qquad P_{fer} = 95\,\text{W} \qquad \cos(\Phi_{10}) = \frac{P_{10}}{U_{10}\,I_{10}} = \frac{95}{480} \approx 0{,}20$$

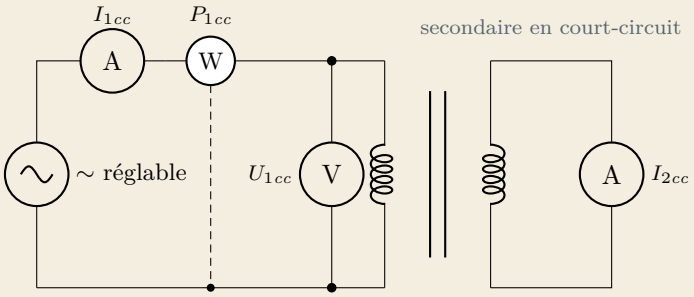
$$Q_{10} = \sqrt{480^2 - 95^2} \approx 471\,\text{VAR}$$

$$R_f = \frac{400^2}{95} \approx 1{,}68\,\text{k}\Omega \qquad L_m = \frac{400^2}{314 \times 471} \approx 1{,}08\,\text{H}$$

À vide, le transformateur absorbe surtout de la puissance réactive (aimantation) : son facteur de puissance est très faible.

Essai en court-circuit

Le secondaire est **court-circuité** par un ampèremètre et le primaire est alimenté sous une **tension très réduite** U_{1cc} (quelques % de U_{1n}), réglée pour obtenir le courant nominal. La tension étant faible, le flux et les pertes fer sont négligeables : le wattmètre mesure les **pertes Joule**. Dans le modèle vu du secondaire, la source $m\,U_{1cc}$ débite dans Z_S seule.



★ **À retenir · Essai en court-circuit**

$$m = \frac{I_{1cc}}{I_{2cc}} \qquad P_{1cc} = R_S\, I_{2cc}^2 \quad \Rightarrow \quad R_S = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2}$$

$$Z_S = \frac{m\,U_{1cc}}{I_{2cc}} \qquad X_S = L_S\omega = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$$

Ex **Exemple : le même transformateur** Pour $I_{2cc} = I_{2n} = 43{,}5\,\text{A}$: $U_{1cc} = 18\,\text{V}$, $P_{1cc} = 220\,\text{W}$.

$$R_S = \frac{220}{43{,}48^2} \approx 0{,}116\,\Omega \qquad Z_S = \frac{0{,}575 \times 18}{43{,}48} \approx 0{,}238\,\Omega$$

$$X_S = \sqrt{0{,}238^2 - 0{,}116^2} \approx 0{,}208\,\Omega \qquad L_S = \frac{X_S}{\omega} \approx 0{,}66\,\text{mH}$$

La tension d'essai (18 V) est plus de vingt fois plus faible que la tension nominale : les pertes fer sont bien négligeables.

✗ **Piège classique** Faire l'essai en court-circuit sous la tension nominale : le courant atteindrait plus de vingt fois le courant nominal et détruirait le transformateur. On part toujours de 0 V et on monte progressivement la tension en surveillant l'ampèremètre.

\+ **Tension de court-circuit** – hors programme Les constructeurs indiquent sur la plaque la **tension de court-circuit** relative $u_{cc} = U_{1cc}/U_{1n}$, mesurée au courant nominal (ici $18/400 = 4{,}5\,\%$). Un court-circuit franc sous la tension nominale ferait circuler environ $1/u_{cc}$ fois le courant nominal (ici 22 fois). Plus u_{cc} est faible, plus la chute de tension en charge est faible.

Identifier le modèle en 4 étapes.

1. Essai à vide : $m = U_{20}/U_{10}$ et $P_{fer} = P_{10}$ (puis R_f, L_m si on les demande).
2. Essai en court-circuit : calculer I_{2cc} si on ne connaît que I_{1cc} ($I_{2cc} = I_{1cc}/m$).
3. $R_S = P_{1cc}/I_{2cc}^2$, puis $Z_S = m\,U_{1cc}/I_{2cc}$: ne pas oublier le facteur m, la tension U_{1cc} est mesurée au primaire.
4. $X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$ et $L_S = X_S/\omega$.

En ligne : calculatrice d'identification du modèle : saisissez les mesures des deux essais et retrouvez m, R_f, L_m, R_S et L_S.

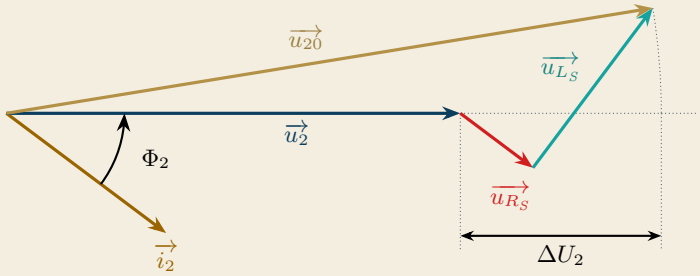
3.6 Chute de tension en charge

Diagramme de Kapp

Quand le transformateur débite, la tension secondaire U_2 est différente de la tension à vide U_{20}. La loi des mailles appliquée au modèle vu du secondaire s'écrit, avec les vecteurs de Fresnel (voir § 1.5) :

$$\overrightarrow{u_{20}} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_{R_S}} + \overrightarrow{u_{L_S}}$$

$\overrightarrow{u_{R_S}}$ est en phase avec $\overrightarrow{i_2}$ (longueur $R_S\,I_2$) et $\overrightarrow{u_{L_S}}$ est en avance de 90° sur $\overrightarrow{i_2}$ (longueur $L_S\omega\,I_2$). Le diagramme obtenu est le **diagramme de Kapp**.



Sur ce diagramme (échelle non respectée), le déphasage Φ_2, compté de $\overrightarrow{i_2}$ vers $\overrightarrow{u_2}$, est imposé par la charge. Comme $R_S\,I_2$ et $L_S\omega\,I_2$ sont petits devant U_2, le vecteur $\overrightarrow{u_{20}}$ est presque parallèle à $\overrightarrow{u_2}$: la différence des longueurs est pratiquement égale à la projection des deux petits vecteurs sur la direction de $\overrightarrow{u_2}$.

À retenir · Chute de tension (formule approchée de Kapp)

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 \approx R_S\,I_2\cos(\Phi_2) + L_S\omega\,I_2\sin(\Phi_2)$$

Φ_2 : déphasage de i_2 par rapport à u_2 ($\Phi_2 > 0$ pour une charge inductive, $\Phi_2 < 0$ pour une charge capacitive). On exprime souvent ΔU_2 en pourcentage de U_{20}.

Ex

Exemple : le transformateur 10 kVA à pleine charge, $\cos(\Phi_2) = 0{,}8$ inductif $R_S = 0{,}116\,\Omega$, $X_S = 0{,}208\,\Omega$, $I_2 = 43{,}5\,\text{A}$, $\sin(\Phi_2) = 0{,}6$:

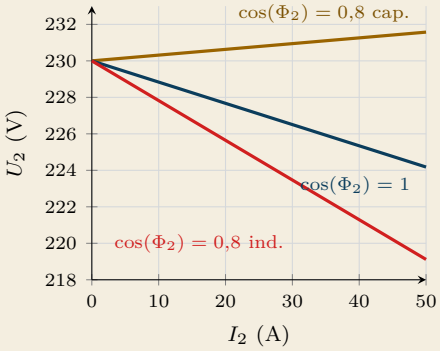
$$\Delta U_2 \approx 43{,}5 \times (0{,}116 \times 0{,}8 + 0{,}208 \times 0{,}6) \approx 9{,}5\,\text{V} \qquad U_2 = 230 - 9{,}5 \approx 220{,}5\,\text{V}$$

soit une chute de 4,1 %. Le calcul exact (sans approximation) donne 220,5 V : l'écart est inférieur à 0,1 V.

Influence de la charge

La chute de tension est proportionnelle au courant et dépend fortement du facteur de puissance :

- charge **inductive** ($\sin(\Phi_2) > 0$) : les deux termes s'ajoutent, la chute est la plus forte ;
- charge **résistive** ($\Phi_2 = 0$) : seul R_S intervient ;
- charge **capacitive** ($\sin(\Phi_2) < 0$) : la chute peut s'annuler, voire devenir négative ($U_2 > U_{20}$).



✗

Piège classique Prendre $\sin(\Phi_2) > 0$ pour une charge capacitive. Le signe de $\sin(\Phi_2)$ est celui de Φ_2 : avec un courant en avance sur la tension ($\Phi_2 < 0$), le second terme est négatif.

\+

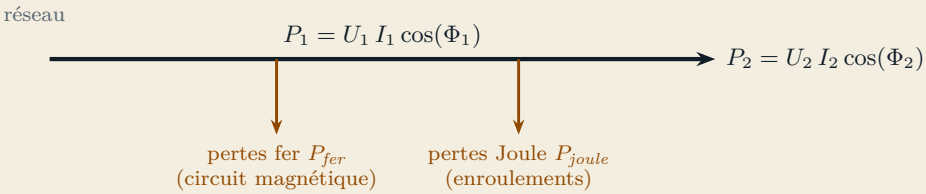
Chute de tension nulle – hors programme D'après la formule de Kapp, la chute de tension s'annule pour $R_S\cos(\Phi_2) + X_S\sin(\Phi_2) = 0$, c'est-à-dire $\tan(\Phi_2) = -R_S/X_S$ (charge capacitive). Pour le transformateur de l'exemple :

$$\Phi_2 = -\arctan\left(\frac{0{,}116}{0{,}208}\right) \approx -29°$$

3.7 Pertes et rendement

Un transformateur réel absorbe au primaire une puissance active P_1 un peu plus grande que la puissance P_2 qu'il fournit à la charge : la différence correspond aux pertes fer et aux pertes Joule.

Bilan des puissances



★ **À retenir · Rendement**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{fer} + P_{joule}} = \frac{U_2\, I_2 \cos(\Phi_2)}{U_2\, I_2 \cos(\Phi_2) + P_{fer} + R_S\, I_2^2}$$

P_{fer} : constantes sous tension primaire fixée (mesurées par l'essai à vide) ; $P_{joule} = R_S\, I_2^2$: proportionnelles au carré du courant (mesurées par l'essai en court-circuit).

Les transformateurs ont d'excellents rendements : 95 % à 98 % pour quelques dizaines de kVA, 98 % à 99 % pour les gros transformateurs de distribution. On calcule ce rendement par la **méthode des pertes séparées** : mesurer directement P_1 et P_2, très proches, donnerait un résultat trop imprécis.

Ex **Exemple : le transformateur 10 kVA à pleine charge,** $\cos(\Phi_2) = 0{,}8$ $U_2 = 220{,}5\,\text{V}$ (chute de tension calculée plus haut), $I_2 = 43{,}5\,\text{A}$:

$$P_2 = 220{,}5 \times 43{,}48 \times 0{,}8 \approx 7\,671\,\text{W}$$

$$P_{joule} = 0{,}116 \times 43{,}48^2 \approx 220\,\text{W} \qquad P_{fer} = 95\,\text{W}$$

$$\eta = \frac{7\,671}{7671 + 95 + 220} \approx 96{,}1\,\%$$

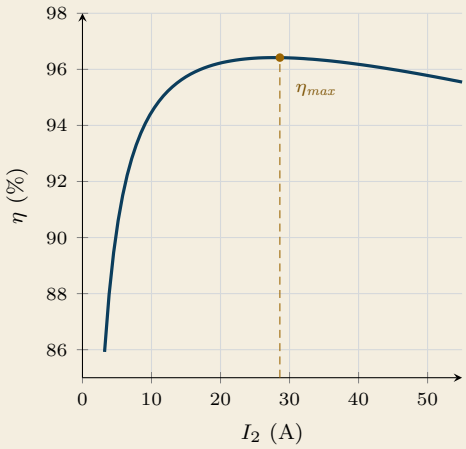
✗ **Piège classique** Recalculer les pertes fer en fonction de la charge, ou utiliser les pertes Joule nominales pour un courant différent de I_{2n}. Les pertes fer restent constantes ; les pertes Joule varient comme I_2^2 : à mi-charge, elles sont divisées par 4.

Toutes les pertes sont transformées en **chaleur** dans le transformateur. C'est cet échauffement qui limite le courant admissible : la plaque indique la classe d'isolation des enroulements (température maximale supportée par les isolants) et le mode de refroidissement (AN : air naturel). Un transformateur surchargé ne casse pas immédiatement, mais ses isolants vieillissent beaucoup plus vite. Il faut aussi ventiler le local où il est installé, surtout pour les gros appareils : quelques centaines de watts de pertes suffisent à chauffer un petit local technique.

✗ **Piège classique** Conclure qu'un transformateur à vide a un « bon » rendement parce qu'il ne débite rien. À vide, $P_2 = 0$ et $\eta = 0$: il consomme pourtant ses pertes fer en permanence. C'est pourquoi on met hors tension les transformateurs qui ne servent pas pendant de longues périodes (ateliers fermés le week-end, installations saisonnières), à condition qu'aucun équipement de sécurité (éclairage de secours, alarmes, ventilation) n'en dépende.

Rendement et charge

À faible charge, les pertes fer, constantes, sont grandes devant la puissance utile : le rendement est médiocre. À forte charge, ce sont les pertes Joule qui augmentent vite. Entre les deux, le rendement passe par un maximum, assez « plat » : il reste proche de sa valeur maximale sur une large plage de charge.



rendement du transformateur 10 kVA
($\cos(\Phi_2) = 0{,}8$)

Condition de rendement maximal – hors programme Le rendement est maximal lorsque **les pertes Joule sont égales aux pertes fer** :

$$R_S\, I_2^2 = P_{fer} \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_{2opt} = \sqrt{\frac{P_{fer}}{R_S}}$$

Justification. En négligeant la chute de tension ($U_2 \approx U_{20}$) et en divisant numérateur et dénominateur par I_2 :

$$\eta = \frac{U_2 \cos(\Phi_2)}{U_2 \cos(\Phi_2) + \dfrac{P_{fer}}{I_2} + R_S\, I_2}$$

Le rendement est maximal quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire quand $y(I_2) = P_{fer}/I_2 + R_S\, I_2$ est minimale :

$$y'(I_2) = -\frac{P_{fer}}{I_2^2} + R_S = 0, \quad \text{d'où} \quad R_S\, I_2^2 = P_{fer}.$$

Le facteur de puissance ne change pas le courant optimal.
Exemple (transformateur 10 kVA, $\cos(\Phi_2) = 0{,}8$) :

$$I_{2opt} = \sqrt{\frac{95}{0{,}116}} \approx 28{,}6\,\text{A} \quad (\text{environ } 66\,\% \text{ de } I_{2n})$$

Pour ce courant, la chute de tension vaut

$$\Delta U_2 \approx 28{,}6 \times (0{,}116 \times 0{,}8 + 0{,}208 \times 0{,}6) \approx 6{,}2\,\text{V}$$

d'où $U_2 \approx 223{,}8\,\text{V}$; les pertes totales valent $2\,P_{fer}$:

$$\eta_{max} \approx \frac{223{,}8 \times 28{,}6 \times 0{,}8}{223{,}8 \times 28{,}6 \times 0{,}8 + 2 \times 95} \approx 96{,}4\,\%$$

Un transformateur de distribution fonctionne la plupart du temps loin de sa pleine charge, mais reste sous tension jour et nuit : les constructeurs réduisent donc en priorité les pertes fer, pour que le rendement maximal soit atteint vers 40 % à 60 % de la charge nominale.

Synthèse : étudier un transformateur en charge

Méthode en 5 étapes.

1. Lire la plaque : $m = U_{20}/U_{1n}$, I_{1n} et I_{2n} à partir de S_n ; vérifier que le courant demandé ne dépasse pas I_{2n}.
2. Identifier le modèle : P_{fer} par l'essai à vide, R_S et X_S par l'essai en court-circuit.
3. Calculer la chute de tension par la formule de Kapp, avec $\sin(\Phi_2)$ signé, puis $U_2 = U_{20} - \Delta U_2$.
4. Calculer $P_2 = U_2\, I_2 \cos(\Phi_2)$, $P_{joule} = R_S\, I_2^2$ et P_{fer}, puis
$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{fer} + P_{joule}}$$
5. Interpréter : comparer I_2 à I_{2n} et la tension U_2 à la plage admise par les récepteurs.

Exemple : le transformateur 10 kVA à mi-charge, charge résistive **1.** $I_2 = I_{2n}/2 = 43{,}48/2 \approx 21{,}7$ A : le transformateur n'est pas surchargé.
2. Modèle identifié plus haut : $P_{fer} = 95$ W, $R_S = 0{,}116\,\Omega$, $X_S = 0{,}208\,\Omega$.
3. $\cos(\Phi_2) = 1$, $\sin(\Phi_2) = 0$: $\Delta U_2 \approx R_S\, I_2 = 0{,}116 \times 21{,}7 \approx 2{,}5$ V, d'où $U_2 \approx 227{,}5$ V.
4. $P_2 = 227{,}5 \times 21{,}74 \approx 4\,946$ W ; $P_{joule} = 0{,}116 \times 21{,}7^2 \approx 55$ W ;
$$\eta = \frac{4\,946}{4946 + 95 + 55} \approx 97{,}1\,\%$$
5. La tension reste proche de 230 V et le rendement est meilleur qu'à pleine charge avec $\cos(\Phi_2) = 0{,}8$ (96,1 %) : les pertes Joule ont été divisées par 4 et la puissance utile n'est pas réduite par le facteur de puissance. La chute de tension, proportionnelle au courant et sans terme réactif, est elle aussi presque quatre fois plus faible.

En ligne : diagramme de Kapp animé (faites varier I_2 et Φ_2) et calculateur de rendement ; QCM d'auto-évaluation du chapitre.

L'essentiel

Chapitre 3

Transformateur parfait, grandeurs nominales, modèle

Rapport de transformation	$m = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{I_1}{I_2}$
Élévateur, abaisseur, rapport unité	$m > 1 \qquad m < 1 \qquad m = 1$
Conservation des puissances	$S_1 = U_1\, I_1 = U_2\, I_2 = S_2 \qquad P_1 = P_2$
Rendement du transfo parfait	$\eta = \dfrac{P_2}{P_1} = 100\,\%$
Pertes en ligne (transport)	$P = U \times I \qquad P_j = R\, I^2$
Puissance apparente nominale	$S_n = U_{1n}\, I_{1n} = U_{2n}\, I_{2n}$
Puissance active fournie	$P_2 = U_2\, I_2 \cos(\Phi_2) = S_2 \cos(\Phi_2)$
Modèle vu du secondaire	$U_{20} = m\, U_1 \qquad \underline{u_{20}} = \underline{u_2} + (R_S + jL_S\omega)\, \underline{i_2}$
Impédance interne	$Z_S = \sqrt{R_S^2 + (L_S\omega)^2}$

Essais, chute de tension, rendement

Essai à vide : rapport et pertes fer	$m = \dfrac{U_{20}}{U_{10}} \qquad P_{10} = P_{fer}$
Essai à vide : puissance réactive	$Q_{10} = \sqrt{(U_{10}\, I_{10})^2 - P_{10}^2}$
Essai à vide : éléments du primaire	$R_f = \dfrac{U_{10}^2}{P_{10}} \qquad L_m = \dfrac{U_{10}^2}{\omega\, Q_{10}}$
Essai en court-circuit : courants	$m = \dfrac{I_{1cc}}{I_{2cc}}$
Essai en court-circuit : résistance	$P_{1cc} = R_S\, I_{2cc}^2 \qquad R_S = \dfrac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2}$
Essai en court-circuit : impédance	$Z_S = \dfrac{m\, U_{1cc}}{I_{2cc}}$
Inductance de fuites	$L_S = \dfrac{1}{\omega}\sqrt{\left(\dfrac{m\, U_{1cc}}{I_{2cc}}\right)^2 - R_S^2}$
Loi des mailles (Kapp)	$\overrightarrow{u_{20}} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_{R_S}} + \overrightarrow{u_{L_S}}$
Chute de tension (Kapp)	$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 \approx R_S\, I_2 \cos(\Phi_2) + L_S \omega\, I_2 \sin(\Phi_2)$
Pertes Joule	$P_{joule} = R_S\, I_2^2$
Pertes fer	$P_{fer} = P_{10}$ (constantes sous U_1 fixée)
Rendement	$\eta = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{P_2}{P_2 + P_{fer} + P_{joule}}$
Rendement (expression développée)	$\eta = \dfrac{U_2\, I_2 \cos(\Phi_2)}{U_2\, I_2 \cos(\Phi_2) + P_{fer} + R_S\, I_2^2}$

Exercices

Chapitre 3

Exercice 3.1 – Transformateur de commande d'une armoire ★☆☆

Une entreprise de logistique modernise l'armoire de commande d'un convoyeur à rouleaux. Les bobines des contacteurs, les voyants et une électrovanne sont alimentés en 24 V alternatif par un transformateur de commande raccordé entre deux phases du réseau 400 V. Avant de valider le schéma, le technicien du bureau d'études doit vérifier que le transformateur prévu n'est pas sous-dimensionné, y compris lorsque plusieurs contacteurs s'enclenchent en même temps.
Plaque signalétique : 400 V/24 V ; 50 Hz ; 250 VA. Le primaire comporte $N_1 = 1\,100$ spires. Le transformateur est supposé parfait.

Données

- 6 bobines de contacteurs : 0,30 A chacune en maintien, 2,5 A chacune pendant l'enclenchement (environ 30 ms) ;
- 8 voyants de 0,05 A et une électrovanne de 0,8 A.

1. Calculer le rapport de transformation m. Le transformateur est-il élévateur ou abaisseur de tension ?
2. En déduire le nombre de spires N_2 du secondaire.
3. Calculer les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}.
4. Tous les récepteurs sont en service, contacteurs en maintien. En additionnant les intensités efficaces (ce qui donne une valeur par excès), calculer le courant secondaire I_2, la puissance apparente S_2 demandée et le courant primaire I_1.
5. Trois contacteurs s'enclenchent simultanément alors que les trois autres sont maintenus. Calculer le courant secondaire. Le transformateur convient-il ?

→ corrigé p. 96

Exercice 3.2 – Éclairage subaquatique d'une piscine ★☆☆

Une piscine municipale fait rénover l'éclairage de son grand bassin. Les projecteurs immergés doivent être alimentés en très basse tension de sécurité (12 V) par un transformateur de sécurité placé dans le local technique, hors du volume de baignade : une personne dans l'eau ne doit en aucun cas pouvoir entrer en contact avec la tension du réseau. L'électricien chargé du chantier doit choisir le transformateur et estimer ses pertes.
Le bassin est équipé de 4 projecteurs halogènes de 300 W sous 12 V, assimilés à des résistances. Le transformateur est alimenté sous 230 V, 50 Hz.

1. Calculer la puissance totale des projecteurs et le courant I_2 que doit fournir le secondaire.
2. Le transformateur est d'abord supposé parfait. Calculer son rapport de transformation m, puis le courant I_1 absorbé au primaire. Vérifier que $P_1 = P_2$.

3. Les puissances nominales disponibles sont 1 000 VA, 1 600 VA et 2 500 VA. Laquelle choisir ? Justifier.
4. Expliquer pourquoi la séparation électrique entre primaire et secondaire est essentielle ici.
5. Le transformateur choisi a en réalité un rendement $\eta = 94\,\%$ à cette charge. Calculer la puissance absorbée au primaire et les pertes. Sous quelle forme cette énergie perdue apparaît-elle dans le local technique ?
6. Les projecteurs sont remplacés par 4 projecteurs à LED de 75 W, de facteur de puissance 0,95. Calculer la nouvelle puissance apparente demandée et le nouveau courant secondaire. Le transformateur choisi convient-il toujours ?

→ corrigé p. 97

Exercice 3.3 – Transformateur sur poteau d'un hameau ★★☆

En zone rurale, un hameau d'une vingtaine de maisons est alimenté par un transformateur monophasé fixé sur un poteau, qui abaisse la tension du réseau HTA. Le gestionnaire du réseau s'interroge : ce transformateur reste sous tension en permanence alors qu'il est souvent peu chargé. Un technicien d'exploitation doit évaluer son rendement et ses pertes sur une journée type.

Données

- Plaque : 20 kV/240 V ; 50 Hz ; $S_n = 50\,\text{kVA}$.
- Pertes à vide (pertes fer) : $P_{fer} = 145\,\text{W}$; pertes Joule à charge nominale : $P_{joule,n} = 875\,\text{W}$.
- Chute de tension négligée : $U_2 = 240\,\text{V}$; facteur de puissance des habitations : $\cos(\Phi_2) = 0{,}9$ (sauf mention contraire).
- On appelle taux de charge $x = \dfrac{I_2}{I_{2n}}$.

1. Calculer les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}.
2. Calculer le rendement à pleine charge, pour $\cos(\Phi_2) = 1$ puis pour $\cos(\Phi_2) = 0{,}9$.
3. Montrer que les pertes Joule s'écrivent $P_{joule} = x^2\,P_{joule,n}$. Calculer le rendement pour $x = 0{,}25$.
4. On admet que le rendement est maximal pour $P_{joule} = P_{fer}$. En déduire x_{opt}, I_{2opt} et ce rendement maximal.
5. Sur une journée type, le transformateur fonctionne 8 h avec $x = 0{,}15$ (nuit), 12 h avec $x = 0{,}35$ (journée) et 4 h avec $x = 0{,}9$ (pointe du soir). Calculer l'énergie fournie aux habitations, l'énergie perdue par effet Joule et l'énergie perdue dans le fer. En déduire le rendement énergétique journalier.
6. Un constructeur propose un modèle à tôles amorphes : $P_{fer} = 60\,\text{W}$ mais $P_{joule,n} = 1\,100\,\text{W}$. Pour la même journée type, ce modèle est-il plus intéressant ? Quelle économie annuelle d'énergie permet-il ?

→ corrigé p. 98

Exercice 3.4 – Réception d'un transformateur rebobiné ★★☆

Dans une station d'épuration, les baladeuses et l'outillage portatif utilisés dans les bassins sont alimentés en 48 V par un transformateur 400 V/48 V, 3 kVA, 50 Hz. Après une inondation du local, ce transformateur a été rebobiné par un atelier spécialisé. À sa livraison, le technicien de maintenance réalise les essais de réception pour identifier son modèle équivalent et vérifier qu'il est conforme.

Données

- Essai en continu au primaire : $U = 4{,}5\,\text{V}$, $I = 5{,}0\,\text{A}$.
- Essai à vide sous $U_{10} = 400\,\text{V}$: $I_{10} = 0{,}45\,\text{A}$, $P_{10} = 38\,\text{W}$, $U_{20} = 48\,\text{V}$.
- Essai en court-circuit au courant nominal : $U_{1cc} = 16\,\text{V}$, $P_{1cc} = 95\,\text{W}$.

1. Calculer le rapport de transformation m et les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}.
2. Calculer la résistance R_1 de l'enroulement primaire. Pourquoi cette mesure se fait-elle en continu ? Montrer que les pertes Joule sont négligeables pendant l'essai à vide.
3. Exploiter l'essai à vide : pertes fer, facteur de puissance à vide, puissance réactive Q_{10}, puis R_f et L_m.
4. Pourquoi l'essai en court-circuit se fait-il sous tension réduite ? Vérifier que les pertes fer y sont négligeables, sachant qu'elles sont proportionnelles au carré de la tension.
5. Exploiter l'essai en court-circuit : courants I_{2cc} et I_{1cc}, puis R_S, Z_S, X_S et L_S. Calculer la tension de court-circuit relative $u_{cc} = \dfrac{U_{1cc}}{U_{1n}}$.
6. Le cahier des charges impose une tension d'au moins 44 V aux bornes de l'outillage à pleine charge, pour $\cos(\Phi_2) = 0{,}8$ inductif. Le transformateur rebobiné est-il conforme ?

→ corrigé p. 99

Exercice 3.5 – Chute de tension dans une scierie ★★☆

Une scierie isolée en montagne est alimentée par un transformateur monophasé 20 kVA, 400 V/240 V, 50 Hz. Depuis l'installation d'une nouvelle scie, le moteur peine au démarrage et l'éclairage baisse visiblement quand la scie travaille. Le responsable de l'entretien demande à un technicien d'évaluer les chutes de tension au secondaire du transformateur dans différentes situations.
Les essais du transformateur ont donné, pour le modèle vu du secondaire : $R_S = 0{,}072\,\Omega$ et $X_S = L_S\omega = 0{,}12\,\Omega$. Le primaire est alimenté sous sa tension nominale.

1. Calculer le rapport de transformation m et le courant secondaire nominal I_{2n}.
2. La scie en plein travail absorbe $I_2 = 70\,\text{A}$ avec $\cos(\Phi_2) = 0{,}8$ (inductif). Calculer $R_S I_2$ et $X_S I_2$, puis représenter le diagramme de Kapp sans souci d'échelle (en exagérant les petits vecteurs).
3. Calculer la chute de tension ΔU_2 et la tension U_2. Exprimer la chute en

pourcentage de U_{20}.

4. Reprendre le calcul pour le même courant avec une charge résistive, puis avec une charge capacitive de facteur de puissance 0,8. Commenter.
5. Pour quel déphasage Φ_2 la chute de tension est-elle nulle ? Quelle est alors la nature de la charge ?
6. Au démarrage, le moteur de la scie appelle pendant quelques secondes un courant trois fois plus grand qu'en fonctionnement, avec $\cos(\Phi_2) = 0{,}4$. Calculer la tension U_2 pendant le démarrage. Les récepteurs supportent une tension de 230 V à $\pm 10\,\%$ près : conclure.

→ corrigé p. 100

Exercice 3.6 – Bornes de recharge d'un parking d'entreprise ★★★

Une entreprise équipe son parking de bornes de recharge pour véhicules électriques. Le tableau général ne dispose que d'un départ 400 V entre deux phases : l'installateur intercale donc un transformateur monophasé 400 V/235 V, qui assure aussi une séparation électrique entre le réseau du bâtiment et les bornes. Trois bornes de 7,4 kW sont installées ; la direction envisage déjà d'en ajouter une quatrième. Vous êtes chargé de l'étude électrique du transformateur.

Données

- Plaque : 400 V/235 V ; 50 Hz ; $S_n = 25$ kVA.
- Essai à vide sous 400 V : $I_{10} = 1{,}6$ A, $P_{10} = 120$ W.
- Essai en court-circuit : $U_{1cc} = 17{,}6$ V, $I_{1cc} = 62{,}5$ A, $P_{1cc} = 450$ W.
- Une borne en charge absorbe 32 A avec un facteur de puissance de 0,98 (inductif). Les bornes exigent une tension comprise entre 207 V et 253 V.

A- Grandeurs nominales

1. Calculer le rapport de transformation m et les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}.

B- Identification du modèle

2. Exploiter l'essai à vide : pertes fer, facteur de puissance à vide, R_f et L_m.
3. Calculer I_{2cc} ; à quel régime l'essai en court-circuit a-t-il été réalisé ? Déterminer R_S, Z_S, X_S et L_S, ainsi que la tension de court-circuit relative $u_{cc} = \dfrac{U_{1cc}}{U_{1n}}$.
4. Dessiner le modèle équivalent vu du secondaire, chargé par les bornes, en y reportant les valeurs numériques.

C- Fonctionnement avec trois bornes

5. Les trois bornes chargent simultanément. Calculer I_2, la chute de tension et la tension U_2. Les bornes sont-elles correctement alimentées ?
6. Calculer la puissance P_2 fournie, les pertes, puis le rendement. Estimer le courant primaire en négligeant le courant à vide.

7. On admet que le rendement est maximal lorsque les pertes Joule sont égales aux pertes fer. Déterminer le courant I_{2opt} correspondant et la valeur de ce rendement (même facteur de puissance). À combien de bornes en charge correspond-il ?

D- Ajout d'une quatrième borne

8. Calculer le courant secondaire et les pertes Joule avec quatre bornes en charge. Comparer au régime nominal et conclure.

9. Deux solutions sont envisagées : remplacer le transformateur, ou installer une gestion dynamique qui limite le courant total au courant nominal. Calculer la puissance apparente minimale du nouveau transformateur, puis le courant maximal par borne avec la gestion dynamique. Rédiger une recommandation argumentée.

→ corrigé p. 101

Sujets de type BTS

Sujet BTS 3.A – Pince de soudage par points d'une ligne de tôlerie

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 45 minutes

Sur une ligne d'assemblage de carrosseries, des robots assemblent les tôles par soudage par points : deux électrodes en cuivre serrent les tôles et un courant très intense, de l'ordre de 20 kA, les traverse pendant un quart de seconde ; l'effet Joule fait fondre localement le métal. Ce courant est fourni par un transformateur monophasé intégré à la pince, dont le secondaire ne comporte qu'une seule spire. Le service méthodes veut vérifier que le transformateur d'une pince de remplacement fournit le courant de soudage requis, et évaluer sa consommation.

Données

- Transformateur : primaire 400 V, 50 Hz ; secondaire de $N_2 = 1$ spire ; tension secondaire à vide $U_{20} = 10\,\text{V}$.
- Essai à vide sous $U_{10} = 400\,\text{V}$: $I_{10} = 4{,}5\,\text{A}$, $P_{10} = 300\,\text{W}$.
- Essai en court-circuit (électrodes serrées sur une barre de cuivre de résistance négligeable), sous tension réduite : $U_{1cc} = 60\,\text{V}$, $I_{1cc} = 94\,\text{A}$, $P_{1cc} = 1\,700\,\text{W}$.
- Pendant un point de soudure, l'ensemble électrodes et tôles se comporte comme une résistance $R_c = 0{,}25\,\text{m}\Omega$. Durée d'un point : $t_s = 0{,}25\,\text{s}$; cadence : 30 points par minute.
- Cahier des charges : courant de soudage d'au moins 18 kA.

Partie A – Le transformateur supposé parfait

A.1. Calculer le rapport de transformation m et le nombre de spires N_1 du primaire.

A.2. Pour un courant de soudage de 18 kA, calculer le courant primaire. Pourquoi le secondaire est-il constitué d'une seule spire de très forte section ?

Partie B – Essais

B.1. Quelles pertes l'essai à vide permet-il de mesurer ? Calculer le facteur de puissance à vide.

B.2. Calculer le courant secondaire I_{2cc} de l'essai en court-circuit, puis les éléments R_S, Z_S et X_S du modèle vu du secondaire (en mΩ).

B.3. Si les électrodes restent collées l'une à l'autre (court-circuit franc) sous la tension nominale, quel courant circule ?

Partie C – Pendant un point de soudure

C.1. Dessiner le schéma équivalent du secondaire (modèle vu du secondaire chargé par R_c).

C.2. Calculer l'impédance totale du circuit secondaire, puis le courant de soudage I_2. Le cahier des charges est-il respecté ?

C.3. Calculer la tension U_2 aux bornes des électrodes et la chute de tension.

C.4. Un technicien applique la formule approchée de Kapp avec $\cos(\Phi_2) = 1$. Quelle valeur de U_2 obtient-il ? Expliquer pourquoi la formule n'est pas valable ici.

Partie D – Puissances et énergie

D.1. Pendant le soudage, calculer la puissance P_2 reçue par les tôles, les pertes Joule, la puissance active absorbée P_1 et le rendement.

D.2. Calculer la puissance réactive absorbée par les fuites magnétiques, la puissance apparente absorbée au primaire (on néglige la puissance réactive d'aimantation), le courant primaire et le facteur de puissance. Commenter.

D.3. Calculer l'énergie reçue par les tôles pour un point, puis l'énergie électrique consommée par la pince en une heure de production (le transformateur reste sous tension en permanence). En déduire le rendement énergétique.

→ corrigé p. 102

Sujet BTS 3.B – Transformateur d'isolement d'un bloc opératoire

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Dans une salle d'opération, une coupure d'alimentation au premier défaut

d'isolement est inacceptable : les appareils qui maintiennent le patient en vie doivent continuer à fonctionner. Les prises de la salle sont donc alimentées par un transformateur d'isolement dont le secondaire n'est pas relié à la terre (schéma IT médical). Une clinique remplace ce transformateur ; le technicien biomédical doit vérifier la conformité du nouveau modèle, la qualité de la tension fournie et le coût de ses pertes.

Données

- Plaque : 230 V/236 V ; 50 Hz ; $S_n = 8\,\text{kVA}$.
- Essai à vide sous $U_{10} = 230\,\text{V}$: $I_{10} = 0{,}65\,\text{A}$, $P_{10} = 58\,\text{W}$, $U_{20} = 236\,\text{V}$.
- Essai en court-circuit : $I_{2cc} = 33{,}9\,\text{A}$, $U_{1cc} = 6{,}5\,\text{V}$, $P_{1cc} = 150\,\text{W}$.
- Cahier des charges : courant à vide au plus égal à 3 % de I_{1n} ; tension de court-circuit relative $u_{cc} = \dfrac{U_{1cc}}{U_{1n}}$ (essai au courant nominal) au plus égale à 3 % ; tension aux bornes des prises comprise entre 225 V et 240 V.
- Pendant une intervention, les appareils absorbent $I_2 = 23{,}5\,\text{A}$ avec $\cos(\Phi_2) = 0{,}95$ (inductif). La salle est utilisée 2 500 h par an ; le transformateur reste sous tension toute l'année. Prix de l'énergie : 0,20 € par kW · h.

Partie A – Rôle et grandeurs nominales

A.1. Expliquer pourquoi un premier défaut d'isolement d'un appareil (contact d'un conducteur avec la carcasse reliée à la terre) ne provoque pas de courant de défaut important.

A.2. Calculer le rapport de transformation m. Pourquoi le constructeur a-t-il choisi U_{20} légèrement supérieure à 230 V ?

A.3. Calculer les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}.

Partie B – Identification et conformité

B.1. Exploiter l'essai à vide : pertes fer, facteur de puissance à vide. Le courant à vide est-il conforme ?

B.2. Exploiter l'essai en court-circuit : R_S, Z_S, X_S et L_S. Calculer u_{cc} et conclure sur la conformité.

Partie C – Tension fournie aux prises

C.1. Pendant une intervention, calculer la chute de tension et la tension U_2 aux prises.

C.2. Représenter le diagramme de Kapp correspondant, sans souci d'échelle, en indiquant le déphasage Φ_2.

C.3. Vérifier que la tension reste dans la plage imposée lorsque le transformateur débite son courant nominal avec $\cos(\Phi_2) = 0{,}9$ (inductif).

Partie D – Rendement et coût des pertes

D.1. Pendant une intervention, calculer la puissance fournie P_2, les pertes Joule et le rendement.

D.2. Le rendement est maximal lorsque les pertes Joule sont égales aux pertes fer. Calculer le courant I_{2opt} correspondant. Comparer au courant d'une intervention et commenter le choix du constructeur.

D.3. Calculer l'énergie perdue en un an dans le fer, puis par effet Joule, et le coût annuel de ces pertes.

D.4. Rédiger, en quelques lignes, une conclusion pour le technicien biomédical.

→ corrigé p. 105

Corrigés

Chapitre 3

✓ Corrigé de l'exercice 3.1 – Transformateur de commande d'une armoire

1. $m = \dfrac{U_{20}}{U_1} = \dfrac{24}{400}$ soit $\boxed{m = 0{,}06}$ $m < 1$: le transformateur est **abaisseur** de tension.

2. $\dfrac{N_2}{N_1} = m$, d'où $N_2 = m\,N_1 = 0{,}06 \times 1\,100$ soit $\boxed{N_2 = 66 \text{ spires}}$

3. $I_{1n} = \dfrac{S_n}{U_{1n}} = \dfrac{250}{400}$ soit $\boxed{I_{1n} \approx 0{,}63\,\text{A}}$;

$I_{2n} = \dfrac{S_n}{U_{2n}} = \dfrac{250}{24}$ soit $\boxed{I_{2n} \approx 10{,}4\,\text{A}}$

4. $I_2 = 6 \times 0{,}30 + 8 \times 0{,}05 + 0{,}8 = 1{,}8 + 0{,}4 + 0{,}8$ soit $\boxed{I_2 = 3{,}0\,\text{A}}$

$$S_2 = U_2\,I_2 = 24 \times 3 = 72\,\text{VA} \qquad I_1 = m\,I_2 = 0{,}06 \times 3 = 0{,}18\,\text{A}$$

Le transformateur n'est chargé qu'à 29 % de sa puissance nominale en régime permanent.

5. $I_2 = 3 \times 2{,}5 + 3 \times 0{,}30 + 0{,}4 + 0{,}8$ soit $\boxed{I_2 = 9{,}6\,\text{A}}$, c'est-à-dire $S_2 = 24 \times 9{,}6 \approx 230\,\text{VA}$.

$9{,}6\,\text{A} < I_{2n} = 10{,}4\,\text{A}$: le transformateur convient, mais avec peu de marge. C'est l'appel des bobines à l'enclenchement, et non le régime permanent, qui dimensionne un transformateur de commande : s'il était trop petit, la chute de tension au moment de l'appel empêcherait les contacteurs de se fermer franchement.

Méthode Additionner des intensités efficaces de récepteurs de déphasages différents donne un majorant du courant réel (la somme des vecteurs de Fresnel est plus courte que la somme de leurs longueurs) : c'est une démarche prudente pour un dimensionnement.

✓ Corrigé de l'exercice 3.2 – Éclairage subaquatique d'une piscine

1. $P_2 = 4 \times 300 = 1\,200\,\text{W}$. Charge résistive : $\cos(\Phi_2) = 1$ et

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{1\,200}{12} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_2 = 100\,\text{A}}$$

2. $m = \dfrac{12}{230}$ soit $\boxed{m \approx 0{,}052\,2}$ et

$I_1 = m\,I_2 = 0{,}052\,2 \times 100$ soit $\boxed{I_1 \approx 5{,}22\,\text{A}}$

Vérification : $S_1 = U_1\,I_1 = 230 \times 5{,}217 \approx 1\,200\,\text{VA} = S_2$ ✓. La charge est résistive et le transformateur parfait n'absorbe aucune puissance réactive : $P_1 = S_1 = 1\,200\,\text{W} = P_2$.

3. La charge demande $S_2 = U_2\,I_2 = 1\,200\,\text{VA}$: le modèle de 1 000 VA serait surchargé. On choisit $\boxed{S_n = 1\,600\,\text{VA}}$, la plus petite puissance normalisée supérieure au besoin.

4. Le secondaire n'a aucune liaison électrique avec le réseau : même en cas de défaut d'isolement du primaire, la tension de 230 V ne peut pas se retrouver dans l'eau. Une personne dans le bassin ne peut être soumise qu'à la très basse tension de 12 V, sans danger.

5. $P_1 = \dfrac{P_2}{\eta} = \dfrac{1\,200}{0{,}94}$ soit $\boxed{P_1 \approx 1\,277\,\text{W}}$ et pertes : $P_1 - P_2 \approx 77\,\text{W}$.

Ces pertes (fer et Joule) sont dissipées en **chaleur** : le local technique doit être ventilé.

6. $S_2 = \dfrac{P_2}{\cos(\Phi_2)} = \dfrac{4 \times 75}{0{,}95}$ soit $\boxed{S_2 \approx 316\,\text{VA}}$ et $I_2 = \dfrac{S_2}{U_2} = \dfrac{316}{12} \approx 26{,}3\,\text{A}$.

Le transformateur de 1 600 VA convient toujours, mais il n'est plus chargé qu'à 20 % : ses pertes fer, constantes, deviennent importantes par rapport à la puissance utile et son rendement baisse. Un modèle plus petit serait plus pertinent lors d'une prochaine rénovation.

Méthode Pour choisir un transformateur, on calcule la puissance apparente $S_2 = U_2\,I_2$ demandée par la charge (et non la puissance active), puis on retient la plus petite puissance normalisée supérieure, en gardant si possible une marge de 10 % à 20 %.

✓ Corrigé de l'exercice 3.3 – Transformateur sur poteau d'un hameau

1. $I_{1n} = \dfrac{50\,000}{20\,000}$ soit $\boxed{I_{1n} = 2{,}5\,\text{A}}$; $I_{2n} = \dfrac{50\,000}{240}$ soit $\boxed{I_{2n} \approx 208\,\text{A}}$

2. À pleine charge, $P_2 = S_n \cos(\Phi_2)$ et les pertes valent $P_{fer} + P_{joule,n} = 145 + 875 = 1\,020\,\text{W}$.

$$\cos(\Phi_2) = 1 \;:\; \eta = \frac{50\,000}{50\,000 + 1\,020} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 98{,}0\,\%}$$

$$\cos(\Phi_2) = 0{,}9 \;:\; \eta = \frac{45\,000}{45\,000 + 1\,020} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 97{,}8\,\%}$$

Les pertes ne dépendent pas du facteur de puissance, mais la puissance utile diminue avec lui.

3. $P_{joule} = R_S\, I_2^2$ et $P_{joule,n} = R_S\, I_{2n}^2$, d'où $\dfrac{P_{joule}}{P_{joule,n}} = \left(\dfrac{I_2}{I_{2n}}\right)^2 = x^2$.

Pour $x = 0{,}25$: $P_2 = 0{,}25 \times 50\,000 \times 0{,}9 = 11\,250\,\text{W}$ et $P_{joule} = 0{,}25^2 \times 875 \approx 54{,}7\,\text{W}$.

$$\eta = \frac{11\,250}{11\,250 + 145 + 54{,}7} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 98{,}3\,\%}$$

Le rendement est meilleur au quart de charge qu'à pleine charge.

4. Le rendement est maximal quand $P_{joule} = P_{fer}$: $x^2\, P_{joule,n} = P_{fer}$, d'où

$$x_{opt} = \sqrt{\frac{145}{875}} \quad \text{soit} \quad \boxed{x_{opt} \approx 0{,}41} \qquad I_{2opt} = 0{,}407 \times 208 \approx 85\,\text{A}$$

$$P_2 = 0{,}407 \times 50\,000 \times 0{,}9 \approx 18\,320\,\text{W}$$

$$\eta_{max} = \frac{18\,320}{18\,320 + 2 \times 145} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_{max} \approx 98{,}4\,\%}$$

5. Pour chaque période, $E_2 = x\, S_n \cos(\Phi_2) \times \Delta t$ et $E_j = x^2\, P_{joule,n} \times \Delta t$:

Période	Δt	E_2 (kW · h)	E_j (W · h)
Nuit ($x = 0{,}15$)	8 h	54	157,5
Journée ($x = 0{,}35$)	12 h	189	1 286
Pointe ($x = 0{,}9$)	4 h	162	2 835
Total	24 h	**405**	4 279

Pertes fer, présentes 24 h sur 24 : $E_{fer} = 145 \times 24 = 3\,480\,\text{W} \cdot \text{h}$. Pertes totales : $4{,}28 + 3{,}48 \approx 7{,}76\,\text{kW} \cdot \text{h}$.

$$\eta_{jour} = \frac{405}{405 + 7{,}76} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_{jour} \approx 98{,}1\,\%}$$

6. Avec le modèle amorphe : $E'_j = \dfrac{1\,100}{875} \times 4\,279 \approx 5\,379\,\text{W} \cdot \text{h}$ et $E'_{fer} = 60 \times 24 = 1\,440\,\text{W} \cdot \text{h}$, soit $6{,}82\,\text{kW} \cdot \text{h}$ de pertes par jour au lieu de $7{,}76\,\text{kW} \cdot \text{h}$.

Il fait gagner environ $0{,}94\,\text{kW} \cdot \text{h}$ par jour, soit $0{,}94 \times 365 \approx 343\,\text{kW} \cdot \text{h}$ par an. Le modèle amorphe est plus intéressant : un transformateur de distribution étant le plus souvent peu chargé, ce sont ses pertes fer, permanentes, qui pèsent le plus lourd.

✓ Corrigé de l'exercice 3.4 – Réception d'un transformateur rebobiné

1. $m = \dfrac{U_{20}}{U_{10}} = \dfrac{48}{400}$ soit $\boxed{m = 0{,}12}$;

$I_{1n} = \dfrac{3\,000}{400} = 7{,}5\,\text{A}$; $I_{2n} = \dfrac{3\,000}{48} = 62{,}5\,\text{A}$.

2. $R_1 = \dfrac{U}{I} = \dfrac{4{,}5}{5}$ soit $\boxed{R_1 = 0{,}9\,\Omega}$

En continu, le flux est constant : aucune tension n'est induite, l'inductance de l'enroulement n'intervient pas et il n'y a pas de pertes fer. Le rapport U/I donne donc la seule résistance du cuivre.

Pendant l'essai à vide : $P_{joule0} = R_1\, I_{10}^2 = 0{,}9 \times 0{,}45^2 \approx 0{,}18\,\text{W}$, soit moins de 0,5 % de $P_{10} = 38\,\text{W}$: négligeable.

3. Pertes fer : $\boxed{P_{fer} = P_{10} = 38\,\text{W}}$; $\cos(\Phi_{10}) = \dfrac{P_{10}}{U_{10}\, I_{10}} = \dfrac{38}{400 \times 0{,}45} \approx 0{,}21$.

$$Q_{10} = \sqrt{180^2 - 38^2} \approx 176\,\text{VAR}$$

$$R_f = \frac{400^2}{38} \approx 4{,}21\,\text{k}\Omega \qquad L_m = \frac{400^2}{314 \times 176} \approx 2{,}89\,\text{H}$$

Le courant à vide représente $\dfrac{0{,}45}{7{,}5} = 6\,\%$ du courant nominal, valeur habituelle pour un petit transformateur.

4. Sous la tension nominale, le secondaire en court-circuit ne serait limité que par la faible impédance Z_S : le courant atteindrait environ $\dfrac{U_{1n}}{U_{1cc}} = \dfrac{400}{16} = 25$ fois le courant nominal. On réduit donc la tension jusqu'à obtenir I_{2n}.

Pertes fer pendant l'essai : $38 \times \left(\dfrac{16}{400}\right)^2 \approx 0{,}06\,\text{W} \ll 95\,\text{W}$: le wattmètre mesure bien les pertes Joule.

5. Essai au courant nominal : $I_{2cc} = 62{,}5\,\text{A}$ et $I_{1cc} = m\, I_{2cc} = 7{,}5\,\text{A}$.

$$R_S = \frac{95}{62{,}5^2} \text{ soit } \boxed{R_S \approx 24{,}3\,\text{m}\Omega} \qquad Z_S = \frac{0{,}12 \times 16}{62{,}5} \approx 30{,}7\,\text{m}\Omega$$

$$X_S = \sqrt{30{,}72^2 - 24{,}32^2} \text{ soit } \boxed{X_S \approx 18{,}8\,\text{m}\Omega} \qquad L_S = \frac{0{,}018\,8}{314} \approx 60\,\mu\text{H}$$

$u_{cc} = \dfrac{16}{400}$ soit $\boxed{u_{cc} = 4\,\%}$

6. $\cos(\Phi_2) = 0{,}8$, $\sin(\Phi_2) = 0{,}6$, $I_2 = 62{,}5\,\text{A}$:

$$\Delta U_2 \approx 62{,}5 \times (0{,}024\,3 \times 0{,}8 + 0{,}018\,8 \times 0{,}6) \approx 1{,}92\,\text{V}$$

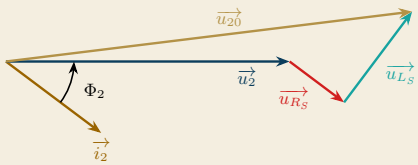
$$U_2 = 48 - 1{,}92 \text{ soit } \boxed{U_2 \approx 46{,}1\,\text{V}}$$

$46{,}1\,\text{V} > 44\,\text{V}$: le transformateur rebobiné est **conforme**.

✓ Corrigé de l'exercice 3.5 – Chute de tension dans une scierie

1. $m = \dfrac{240}{400}$ soit $\boxed{m = 0{,}6}$; $I_{2n} = \dfrac{20\,000}{240}$ soit $\boxed{I_{2n} \approx 83{,}3\,\text{A}}$

2. $R_S I_2 = 0{,}072 \times 70 = 5{,}04\,\text{V}$ et $X_S I_2 = 0{,}12 \times 70 = 8{,}4\,\text{V}$;
$\Phi_2 = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}9°$.



$\overrightarrow{u_{R_S}}$ est parallèle à $\overrightarrow{i_2}$, $\overrightarrow{u_{L_S}}$ lui est perpendiculaire (en avance de 90°), et $\overrightarrow{u_{20}} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_{R_S}} + \overrightarrow{u_{L_S}}$.

3. $\Delta U_2 \approx R_S I_2 \cos(\Phi_2) + X_S I_2 \sin(\Phi_2) = 5{,}04 \times 0{,}8 + 8{,}4 \times 0{,}6$ soit $\boxed{\Delta U_2 \approx 9{,}07\,\text{V}}$

$$U_2 = 240 - 9{,}07 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_2 \approx 230{,}9\,\text{V}} \qquad \frac{\Delta U_2}{U_{20}} = \frac{9{,}07}{240} \approx 3{,}8\,\%$$

4. Charge résistive ($\sin(\Phi_2) = 0$) : $\Delta U_2 = 5{,}04\,\text{V}$ et $U_2 \approx 235{,}0\,\text{V}$ (2,1 %).
Charge capacitive ($\sin(\Phi_2) = -0{,}6$) : $\Delta U_2 = 4{,}03 - 5{,}04 \approx -1{,}0\,\text{V}$ et $U_2 \approx 241{,}0\,\text{V}$: la tension en charge dépasse la tension à vide.

Pour un même courant, c'est la charge inductive qui provoque la plus forte chute, car la réactance de fuites X_S est plus grande que R_S.

5. $\Delta U_2 = 0$ pour $R_S \cos(\Phi_2) + X_S \sin(\Phi_2) = 0$, soit $\tan(\Phi_2) = -\dfrac{R_S}{X_S} = -\dfrac{0{,}072}{0{,}12} = -0{,}6$:

$$\boxed{\Phi_2 \approx -31°} \qquad (\cos(\Phi_2) \approx 0{,}86)$$

$\Phi_2 < 0$: le courant est en avance sur la tension, la charge est **capacitive**.

6. $I_2 = 3 \times 70 = 210\,\text{A}$, $\cos(\Phi_2) = 0{,}4$ et $\sin(\Phi_2) = \sqrt{1 - 0{,}4^2} \approx 0{,}917$:

$$\Delta U_2 \approx 210 \times (0{,}072 \times 0{,}4 + 0{,}12 \times 0{,}917) \approx 29{,}1\,\text{V}$$

$$U_2 = 240 - 29{,}1 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_2 \approx 210{,}9\,\text{V}}$$

La tension minimale admise est $230 \times 0{,}9 = 207\,\text{V}$: elle est respectée, mais de justesse. Le démarrage est difficile (le couple d'un moteur diminue avec le carré de la tension) et l'éclairage baisse de façon visible. Un démarreur progressif, qui limite le courant d'appel, améliorerait nettement la situation.

✎ **Méthode** Dans la formule de Kapp, on prend toujours $\sin(\Phi_2)$ avec son signe : positif pour une charge inductive, négatif pour une charge capacitive. Pour un facteur de puissance faible, c'est le terme $X_S I_2 \sin(\Phi_2)$ qui domine.

✓ Corrigé de l'exercice 3.6 – Bornes de recharge d'un parking d'entreprise

A- Grandeurs nominales

1. $m = \dfrac{235}{400}$ soit $\boxed{m \approx 0{,}588}$; $I_{1n} = \dfrac{25\,000}{400} = 62{,}5\,\text{A}$; $I_{2n} = \dfrac{25\,000}{235} \approx 106{,}4\,\text{A}$.

B- Identification du modèle

2. $P_{fer} = P_{10} = 120\,\text{W}$; $\cos(\Phi_{10}) = \dfrac{120}{400 \times 1{,}6} \approx 0{,}19$; $Q_{10} = \sqrt{640^2 - 120^2} \approx 629\,\text{VAR}$.

$$R_f = \frac{400^2}{120} \approx 1{,}33\,\text{k}\Omega \qquad L_m = \frac{400^2}{314 \times 629} \approx 0{,}81\,\text{H}$$

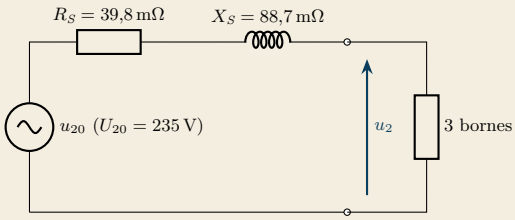
3. $I_{2cc} = \dfrac{I_{1cc}}{m} = \dfrac{62{,}5}{0{,}587\,5} \approx 106{,}4\,\text{A} = I_{2n}$: l'essai a été réalisé au **courant nominal**, donc $P_{1cc} = P_{joule,n} = 450\,\text{W}$.

$$R_S = \frac{450}{106{,}4^2} \text{ soit } \boxed{R_S \approx 39{,}8\,\text{m}\Omega} \qquad Z_S = \frac{0{,}587\,5 \times 17{,}6}{106{,}4} \approx 97{,}2\,\text{m}\Omega$$

$$X_S = \sqrt{97{,}2^2 - 39{,}8^2} \text{ soit } \boxed{X_S \approx 88{,}7\,\text{m}\Omega}$$

$$L_S = \frac{0{,}088\,7}{314} \approx 0{,}28\,\text{mH} \qquad u_{cc} = \frac{17{,}6}{400} = 4{,}4\,\%$$

4. Modèle vu du secondaire ($u_{20} = m\,u_1$), chargé par les trois bornes :



C- Fonctionnement avec trois bornes

5. $I_2 = 3 \times 32 = 96\,\text{A}$; $\cos(\Phi_2) = 0{,}98$, $\sin(\Phi_2) = \sqrt{1 - 0{,}98^2} \approx 0{,}199$.

$$\Delta U_2 \approx 96 \times (0{,}039\,8 \times 0{,}98 + 0{,}088\,7 \times 0{,}199) \approx 5{,}4\,\text{V}$$

$$U_2 = 235 - 5{,}4 \text{ soit } \boxed{U_2 \approx 229{,}6\,\text{V}}$$

$207\,\text{V} < U_2 < 253\,\text{V}$: les bornes sont correctement alimentées. Le constructeur a prévu $U_{20} = 235\,\text{V}$ précisément pour compenser la chute en charge.

6. $P_2 = U_2\,I_2\cos(\Phi_2) = 229{,}6 \times 96 \times 0{,}98 \approx 21{,}6\,\text{kW}$; $P_{joule} = 0{,}039\,8 \times 96^2 \approx 367\,\text{W}$; $P_{fer} = 120\,\text{W}$.

$$\eta = \frac{21\,600}{21\,600 + 120 + 367} \text{ soit } \boxed{\eta \approx 97{,}8\,\%} \qquad I_1 \approx m\,I_2 = 0{,}587\,5 \times 96 \approx 56{,}4\,\text{A}$$

7. $I_{2opt} = \sqrt{\dfrac{P_{fer}}{R_S}} = \sqrt{\dfrac{120}{0{,}039\,8}}$ soit $\boxed{I_{2opt} \approx 55\,\text{A}}$

Alors $\Delta U_2 \approx 3{,}1\,\text{V}$, $U_2 \approx 231{,}9\,\text{V}$ et $P_2 = 231{,}9 \times 54{,}9 \times 0{,}98 \approx 12{,}5\,\text{kW}$:

$$\eta_{max} = \frac{12\,480}{12\,480 + 2 \times 120} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_{max} \approx 98{,}1\,\%}$$

Ce courant correspond à $55/32 \approx 1{,}7$ borne en charge : le rendement est maximal lorsque une ou deux bornes fonctionnent, ce qui est le cas le plus fréquent sur un parking.

D- Ajout d'une quatrième borne

8. $I_2 = 4 \times 32 = 128\,\text{A}$, soit $\dfrac{128}{106{,}4} \approx 1{,}20\,I_{2n}$; $P_{joule} = 0{,}039\,8 \times 128^2 \approx 652\,\text{W}$, soit 1,45 fois les pertes Joule nominales.

Le transformateur serait surchargé de 20 % : ses enroulements chaufferaient au-delà de ce que prévoit sa classe d'isolation, ce qui accélère le vieillissement des isolants. Cette situation n'est pas acceptable en fonctionnement prolongé (une recharge dure plusieurs heures).

9. Nouveau transformateur : $S \geq U_{20}\,I_2 = 235 \times 128 \approx 30{,}1\,\text{kVA}$, soit un modèle normalisé de 31,5 kVA ou plus.

Gestion dynamique : $I_{borne,max} = \dfrac{I_{2n}}{4} = \dfrac{106{,}4}{4} \approx 26{,}6\,\text{A}$, soit environ 6 kW par borne au lieu de 7,4 kW.

Recommandation : la gestion dynamique de charge est la solution la plus économique. Les quatre véhicules ne sont que rarement en charge simultanément, et la baisse de puissance (environ 17 %) n'allonge que modérément la durée de recharge pendant une journée de travail. Le transformateur actuel est conservé, il travaille plus souvent près de son rendement maximal, et le remplacement par un modèle de 31,5 kVA reste possible si le parc de bornes continue de croître.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 3.A – Pince de soudage par points d'une ligne de tôlerie

Partie A – Le transformateur supposé parfait

A.1. $m = \dfrac{U_{20}}{U_1} = \dfrac{10}{400}$ soit $\boxed{m = 0{,}025}$;

$N_1 = \dfrac{N_2}{m} = \dfrac{1}{0{,}025}$ soit $\boxed{N_1 = 40 \text{ spires}}$

A.2. $I_1 = m\,I_2 = 0{,}025 \times 18\,000$ soit $\boxed{I_1 = 450\,\text{A}}$

Le secondaire doit transporter près de 20 kA : une seule spire de très forte section (barre ou tresse de cuivre) limite sa résistance, donc les pertes Joule

et l'échauffement, et permet d'obtenir une très faible tension ($\approx 10\,\text{V}$) avec un nombre raisonnable de spires au primaire.

Partie B – Essais

B.1. L'essai à vide mesure les **pertes fer** : $P_{fer} = P_{10} = 300\,\text{W}$;

$$\cos(\Phi_{10}) = \frac{300}{400 \times 4{,}5} \approx 0{,}17.$$

B.2. $I_{2cc} = \dfrac{I_{1cc}}{m} = \dfrac{94}{0{,}025} = 3\,760\,\text{A}.$

$$R_S = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2} = \frac{1\,700}{3\,760^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_S \approx 0{,}120\,\text{m}\Omega}$$

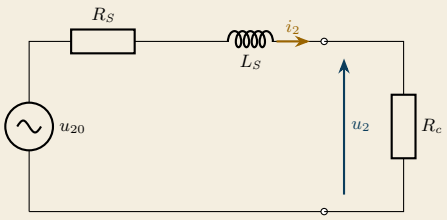
$$Z_S = \frac{m\,U_{1cc}}{I_{2cc}} = \frac{0{,}025 \times 60}{3\,760} \approx 0{,}399\,\text{m}\Omega$$

$$X_S = \sqrt{0{,}399^2 - 0{,}120^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{X_S \approx 0{,}380\,\text{m}\Omega}$$

B.3. Seule Z_S limite alors le courant : $I_2 = \dfrac{U_{20}}{Z_S} = \dfrac{10}{0{,}399 \times 10^{-3}} \approx 25{,}1\,\text{kA}$. Les protections doivent couper rapidement : les électrodes chaufferaient au point de se souder entre elles.

Partie C – Pendant un point de soudure

C.1. Source u_{20}, impédance interne R_S, L_S, et charge R_c :



C.2. Les résistances s'ajoutent, la réactance est seule :

$$Z = \sqrt{(R_S + R_c)^2 + X_S^2} = \sqrt{0{,}370\,2^2 + 0{,}380\,5^2} \approx 0{,}531\,\text{m}\Omega$$

$$I_2 = \frac{U_{20}}{Z} = \frac{10}{0{,}531 \times 10^{-3}} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_2 \approx 18{,}8\,\text{kA}}$$

$18{,}8\,\text{kA} \geq 18\,\text{kA}$: le cahier des charges est respecté, avec une marge d'environ 5 %.

C.3. $U_2 = R_c\,I_2 = 0{,}25 \times 10^{-3} \times 18\,840$ soit $\boxed{U_2 \approx 4{,}71\,\text{V}}$ et $\Delta U_2 = 10 - 4{,}71 \approx 5{,}29\,\text{V}$ (plus de la moitié de U_{20} !).

C.4. Avec $\cos(\Phi_2) = 1$: $\Delta U_2 \approx R_S\, I_2 = 0{,}120 \times 10^{-3} \times 18\,840 \approx 2{,}26\,\text{V}$, d'où $U_2 \approx 7{,}74\,\text{V}$ au lieu de $4{,}71\,\text{V}$.

La formule de Kapp suppose que les chutes $R_S I_2$ et $X_S I_2$ sont petites devant U_2, de sorte que $\overrightarrow{u_{20}}$ reste presque parallèle à $\overrightarrow{u_2}$. Ici $X_S I_2 \approx 7{,}2\,\text{V}$ est plus grand que U_2 : $\overrightarrow{u_{20}}$ fait un grand angle avec $\overrightarrow{u_2}$ et la projection ne donne plus la différence des longueurs. Il faut faire le calcul exact avec les impédances.

Partie D – Puissances et énergie

D.1. $P_2 = R_c\, I_2^2 = 0{,}25 \times 10^{-3} \times 18\,840^2 \approx 88{,}7\,\text{kW}$; $\quad P_{joule} = R_S\, I_2^2 \approx 42{,}7\,\text{kW}$.

$$P_1 = P_2 + P_{joule} + P_{fer} = 88{,}7 + 42{,}7 + 0{,}3 \approx 131{,}7\,\text{kW}$$

$$\eta = \frac{88{,}7}{131{,}7} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 67\,\%}$$

Rendement médiocre, inévitable : la résistance utile R_c n'est que deux fois plus grande que R_S. Près d'un tiers de la puissance absorbée chauffe le transformateur et le circuit secondaire, qui sont refroidis par une circulation d'eau.

D.2. $Q = X_S\, I_2^2 = 0{,}380 \times 10^{-3} \times 18\,840^2 \approx 135\,\text{kVAR}$.

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q^2} = \sqrt{131{,}7^2 + 135^2} \approx 189\,\text{kVA}$$

$$I_1 = \frac{S_1}{U_1} \approx 471\,\text{A} \qquad \cos(\Phi_1) = \frac{P_1}{S_1} \approx 0{,}70$$

On retrouve $I_1 \approx m\, I_2 = 471\,\text{A}$. Pendant chaque point, la pince appelle un courant énorme sous un facteur de puissance médiocre : l'alimentation de la ligne doit être dimensionnée pour ces pointes, souvent par un transformateur d'atelier dédié aux robots de soudage.

D.3. Énergie reçue par les tôles : $W_2 = P_2\, t_s = 88\,700 \times 0{,}25$ soit $\boxed{W_2 \approx 22\,\text{kJ}}$ par point.

En une heure : $30 \times 60 = 1\,800$ points, soit un temps de soudage de $1\,800 \times 0{,}25 = 450\,\text{s}$. Les pertes fer durent toute l'heure :

$$W_1 = (P_2 + P_{joule}) \times 450 + P_{fer} \times 3\,600$$

$$= 131\,400 \times 450 + 300 \times 3\,600 \approx 60{,}2\,\text{MJ} \approx \boxed{16{,}7\,\text{kW}\cdot\text{h}}$$

$$W_{2,h} = 88\,700 \times 450 \approx 39{,}9\,\text{MJ} \approx 11{,}1\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

$$\eta_h = \frac{11{,}1}{16{,}7} \approx 66\,\%$$

Pour améliorer ce rendement, il faut réduire R_S et X_S, c'est-à-dire raccourcir le circuit secondaire parcouru par le courant de soudage : c'est la raison pour laquelle le transformateur est intégré à la pince, au plus près des électrodes.

✓ Corrigé du sujet BTS 3.B – Transformateur d'isolement d'un bloc opératoire

Partie A – Rôle et grandeurs nominales

A.1. Le secondaire n'est pas relié à la terre et n'a aucune liaison électrique avec le réseau. Lors d'un premier défaut, le courant qui irait vers la terre ne trouve pas de chemin de retour vers le secondaire : il reste très faible (courant capacitif). Les appareils continuent de fonctionner ; un contrôleur d'isolement signale le défaut, qui sera réparé après l'intervention.

A.2. $m = \dfrac{U_{20}}{U_{10}} = \dfrac{236}{230}$ soit $\boxed{m \approx 1{,}026}$

U_{20} est légèrement supérieure à 230 V pour compenser la chute de tension en charge : les appareils reçoivent environ 230 V lorsqu'ils fonctionnent.

A.3. $I_{1n} = \dfrac{8\,000}{230}$ soit $\boxed{I_{1n} \approx 34{,}8\,\text{A}}$; $I_{2n} = \dfrac{8\,000}{236}$ soit $\boxed{I_{2n} \approx 33{,}9\,\text{A}}$

Partie B – Identification et conformité

B.1. $P_{fer} = P_{10} = 58\,\text{W}$; $\cos(\Phi_{10}) = \dfrac{58}{230 \times 0{,}65} \approx 0{,}39$.

$\dfrac{I_{10}}{I_{1n}} = \dfrac{0{,}65}{34{,}8} \approx 1{,}9\,\% \leq 3\,\%$: **conforme**.

B.2. L'essai est fait au courant nominal ($I_{2cc} = I_{2n}$).

$R_S = \dfrac{150}{33{,}9^2}$ soit $\boxed{R_S \approx 0{,}131\,\Omega}$ $Z_S = \dfrac{1{,}026 \times 6{,}5}{33{,}9} \approx 0{,}197\,\Omega$

$X_S = \sqrt{0{,}197^2 - 0{,}131^2}$ soit $\boxed{X_S \approx 0{,}147\,\Omega}$ $L_S = \dfrac{0{,}147}{314} \approx 0{,}47\,\text{mH}$

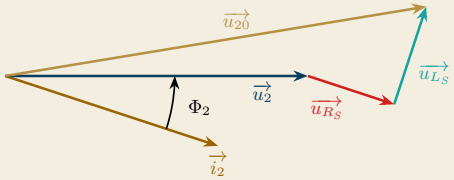
$u_{cc} = \dfrac{6{,}5}{230} \approx 2{,}8\,\% \leq 3\,\%$: **conforme**. Une faible tension de court-circuit garantit une faible chute de tension en charge.

Partie C – Tension fournie aux prises

C.1. $\cos(\Phi_2) = 0{,}95$ et $\sin(\Phi_2) = \sqrt{1 - 0{,}95^2} \approx 0{,}312$; $R_S I_2 \approx 3{,}07\,\text{V}$, $X_S I_2 \approx 3{,}46\,\text{V}$.

$\Delta U_2 \approx 3{,}07 \times 0{,}95 + 3{,}46 \times 0{,}312 \approx 4{,}0\,\text{V}$ $U_2 = 236 - 4{,}0$ soit $\boxed{U_2 \approx 232{,}0\,\text{V}}$

C.2. $\Phi_2 = \arccos(0{,}95) \approx 18{,}2°$; l'arc de Φ_2 part de $\overrightarrow{i_2}$ et arrive sur $\overrightarrow{u_2}$.



C.3. $I_2 = I_{2n} = 33{,}9\,\text{A}$, $\sin(\Phi_2) \approx 0{,}436$:

$$\Delta U_2 \approx 33{,}9 \times (0{,}131 \times 0{,}9 + 0{,}147 \times 0{,}436) \approx 6{,}2\,\text{V} \qquad U_2 \approx 229{,}8\,\text{V}$$

$225\,\text{V} \leq U_2 \leq 240\,\text{V}$ ✓ : la tension reste dans la plage imposée, même à pleine charge.

Partie D – Rendement et coût des pertes

D.1. $P_2 = U_2\, I_2 \cos(\Phi_2) = 232 \times 23{,}5 \times 0{,}95 \approx 5\,180\,\text{W}$; $P_{joule} = 0{,}130\,5 \times 23{,}5^2 \approx 72\,\text{W}$.

$$\eta = \frac{5\,180}{5180 + 58 + 72} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 97{,}6\,\%}$$

D.2. $I_{2opt} = \sqrt{\dfrac{58}{0{,}130\,5}}$ soit $\boxed{I_{2opt} \approx 21{,}1\,\text{A}}$

Le courant d'une intervention (23,5 A) est très proche de I_{2opt} : le transformateur travaille pratiquement à son rendement maximal ($\approx 97{,}6\,\%$). Le constructeur a équilibré pertes fer et pertes Joule pour la charge habituelle d'un bloc, autour de 60 % de la charge nominale, tout en gardant une réserve de puissance.

D.3. Pertes fer, toute l'année : $E_{fer} = 58 \times 8\,760 \approx 508\,\text{kW}\cdot\text{h}$. Pertes Joule, pendant les interventions : $E_j = 72 \times 2\,500 \approx 180\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

$$E_{pertes} \approx 688\,\text{kW}\cdot\text{h} \qquad \text{coût} = 688 \times 0{,}20 \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{coût} \approx 138\ \text{€ par an}}$$

D.4. Le nouveau transformateur est conforme au cahier des charges (courant à vide 1,9 %, $u_{cc} = 2{,}8\,\%$). Il délivre environ 232 V pendant une intervention et ne descend pas sous 229 V à pleine charge. Son rendement est voisin de son maximum pour la charge habituelle. Ses pertes coûtent environ 140 € par an, dont les trois quarts sont dus aux pertes fer : c'est le prix, modeste, de la continuité de service exigée en bloc opératoire.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ utiliser le rapport de transformation et la conservation des puissances ; — ex. 3.1, sujet A
- ☐ lire une plaque signalétique et calculer les courants nominaux ; — ex. 3.1 à 3.3
- ☐ expliquer le rôle d'un transformateur d'isolement ; — ex. 3.2, sujet B
- ☐ exploiter les essais à vide et en court-circuit pour identifier le modèle ; — ex. 3.4, 3.6
- ☐ calculer une chute de tension et tracer un diagramme de Kapp ; — ex. 3.5, sujet B
- ☐ calculer des pertes et un rendement. — ex. 3.3, 3.6

CHAPITRE

4

Transformateur triphasé

Couplages, indice horaire, modèle par phase, essais et mise en parallèle

Dans ce chapitre

- Constitution : circuit magnétique à trois colonnes
- Couplages étoile, triangle, zigzag et leur désignation
- Rapports de transformation global et par colonne
- Indice horaire et diagrammes vectoriels
- Modèle par phase, essais, chute de tension, rendement
- Mise en parallèle, transformateur de distribution HTA/BT

Objectifs

- ✓ Lire une plaque signalétique et la désignation d'un couplage
- ✓ Déterminer un indice horaire à partir du schéma de câblage
- ✓ Établir le modèle par phase à partir des essais
- ✓ Calculer chute de tension, rendement et répartition des charges en parallèle

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 4

Cours

Chapitre 4

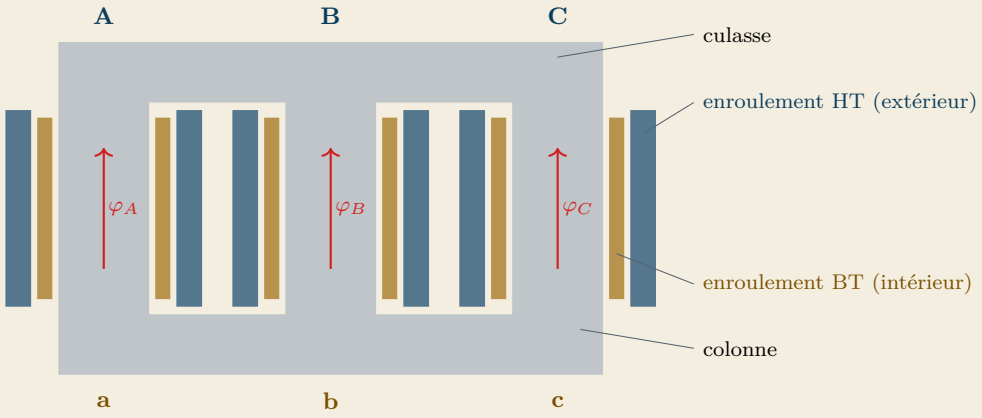
Le réseau de distribution transporte l'énergie en triphasé sous des tensions de plusieurs dizaines de kilovolts ; les usines, les immeubles et les ateliers l'utilisent sous 400 V. Entre les deux se trouve presque toujours un **transformateur triphasé**. Tout ce qui a été vu sur le transformateur monophasé (rapport de transformation, modèle, essais, rendement) reste valable ; il s'y ajoute une question propre au triphasé : la manière de **relier entre eux** les enroulements, qui fixe les tensions et introduit un déphasage entre le primaire et le secondaire.

4.1 Constitution

Circuit magnétique à trois colonnes

D

Définition Un **transformateur triphasé** comporte trois enroulements primaires de N_1 spires et trois enroulements secondaires de N_2 spires, placés sur un circuit magnétique feuilleté. Chaque **colonne** porte un enroulement primaire et un enroulement secondaire : ils sont traversés par le même flux et forment l'équivalent d'un transformateur monophasé.



Les trois flux $\varphi_A(t)$, $\varphi_B(t)$ et $\varphi_C(t)$ forment un système triphasé équilibré : leur somme est nulle à chaque instant. Il n'est donc pas nécessaire de prévoir une colonne de retour : le flux d'une colonne se referme par les deux autres. C'est le **circuit magnétique à flux forcés**, plus léger, moins encombrant et moins cher que trois transformateurs monophasés.

Sur chaque colonne, l'enroulement basse tension est placé contre le noyau et l'enroulement haute tension à l'extérieur, car il est plus facile à isoler loin de la masse.

Bornes et technologies

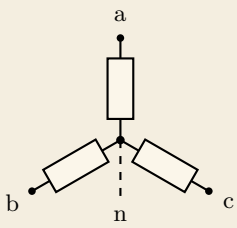
À retenir · Repérage des bornes Bornes **haute tension** (HT) : lettres majuscules A, B, C. Bornes **basse tension** (BT) : lettres minuscules a, b, c, et n pour le neutre s'il est sorti. Les enroulements HT et BT d'une même colonne portent la même lettre.

On distingue les transformateurs **immergés** (partie active plongée dans une cuve remplie d'huile minérale ou végétale, qui isole et évacue la chaleur) et les transformateurs **secs enrobés** (enroulements moulés dans de la résine), réservés aux locaux où l'on veut éviter tout risque d'incendie lié à l'huile : immeubles de grande hauteur, hôpitaux, parkings.

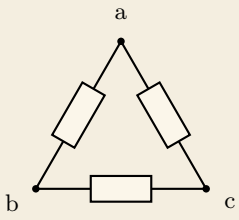
4.2 Couplages et désignation

Les trois couplages

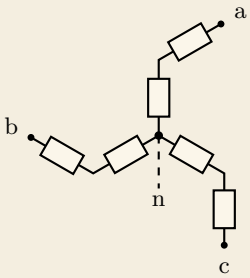
Les trois enroulements d'un même côté peuvent être reliés de trois façons :



étoile : Y ou y



triangle : D ou d



zigzag : z

- **Étoile** : une extrémité de chaque enroulement est reliée au point neutre. Chaque enroulement est soumis à la **tension simple** V ; le neutre peut être sorti.
- **Triangle** : les enroulements sont branchés entre deux bornes. Chaque enroulement est soumis à la **tension composée** $U = \sqrt{3}\,V$ (voir § 2.2) ; il n'y a pas de neutre.
- **Zigzag** (côté BT uniquement) : chaque phase est formée de deux demi-enroulements placés sur deux colonnes différentes, mis en série. Le neutre est disponible.

Désignation d'un couplage

À retenir · Désignation On écrit d'abord le couplage HT en **majuscule** (D, Y), puis le couplage BT en **minuscule** (d, y, z), puis la lettre n si le neutre BT est sorti, et enfin l'**indice horaire** h (nombre de 0 à 11).
Exemple : Dyn11 = HT en triangle, BT en étoile avec neutre sorti, indice horaire 11.

Piège classique La majuscule désigne toujours le côté **haute tension**, même lorsque celui-ci est le secondaire (transformateur élévateur d'une éolienne ou d'une centrale photovoltaïque). Un transformateur Dy11 utilisé en élévateur a donc son primaire (côté BT) en étoile.

Couplage	Atouts	Limites
Y, y	enroulement soumis à $V = U/\sqrt{3}$: moins de spires, isolation réduite ; neutre disponible	supporte mal les charges déséquilibrées sans précaution
D, d	les courants harmoniques de rang 3 circulent dans le triangle sans remonter sur le réseau HT	pas de neutre ; enroulement soumis à U
z	répartit une charge monophasée sur deux colonnes : très bonne tenue au déséquilibre	environ 15 % de cuivre en plus

4.3 Rapports de transformation

Rapport global

★ **À retenir · Rapport de transformation** Le rapport de transformation m se définit **à vide**, entre grandeurs de **même nature** (deux tensions composées ou deux tensions simples) :

$$m = \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{V_{20}}{V_1}$$

U_1 : tension composée primaire ; U_{20} : tension composée secondaire à vide. C'est m qu'on utilise dans le modèle par phase.

Rapport par colonne

D **Définition** Le **rapport par colonne** m_C compare les tensions aux bornes des deux enroulements d'une **même colonne** ; il est égal au rapport des nombres de spires :

$$m_C = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\text{tension d'un enroulement BT (à vide)}}{\text{tension d'un enroulement HT}}$$

Pour relier m à m_C, on regarde quelle tension reçoit chaque enroulement : V en étoile, $U = \sqrt{3}\,V$ en triangle.

Couplage	Enroulement HT	Enroulement BT	Rapport global
Yy, Dd	V_1 ou U_1	V_{20} ou U_{20}	$m = m_C$
Dy	U_1	V_{20}	$m = \sqrt{3}\,m_C$

\+ **Autres couplages** – hors programme Le même raisonnement donne, pour un Yd (enroulement HT sous V_1, enroulement BT sous U_{20}) : $m = \frac{m_C}{\sqrt{3}}$. Pour un Yz, chaque demi-enroulement BT de N_d spires délivre $\frac{V_{20}}{\sqrt{3}}$ (voir l'exemple 3 de l'indice horaire) : $m = \sqrt{3}\,\frac{N_d}{N_1}$.

Ex

Exemple : transformateur Dyn11 20 kV / 410 V Rapport global :

$$m = \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{410}{20\,000} = 0{,}020\,5$$

Un enroulement HT (triangle) reçoit $U_1 = 20\,\text{kV}$; un enroulement BT (étoile) délivre $V_{20} = \dfrac{410}{\sqrt{3}} \approx 236{,}7\,\text{V}$:

$$m_C = \frac{V_{20}}{U_1} = \frac{236{,}7}{20\,000} \approx 0{,}011\,84 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{3}\, m_C = 0{,}020\,5 = m$$

Avec $N_2 = 20$ spires par enroulement BT, il faut $N_1 = N_2/m_C \approx 1690$ spires par enroulement HT.

✗

Piège classique Écrire $m = N_2/N_1$ pour un transformateur triphasé : ce n'est vrai que pour les couplages Yy et Dd. Autre erreur fréquente : diviser une tension simple par une tension composée en croyant calculer m (on calcule alors m_C d'un Dy).

4.4 Indice horaire

Définition

D

Indice horaire Le couplage introduit un déphasage θ entre une tension BT et la tension HT de même nom : θ est l'angle orienté de $\overrightarrow{v_A}$ vers $\overrightarrow{v_a}$ (ou de $\overrightarrow{u_{AB}}$ vers $\overrightarrow{u_{ab}}$), **compté dans le sens des aiguilles d'une montre**. C'est toujours un multiple de 30°.

$$h = \frac{\theta}{30°} \qquad 0 \leq h \leq 11$$

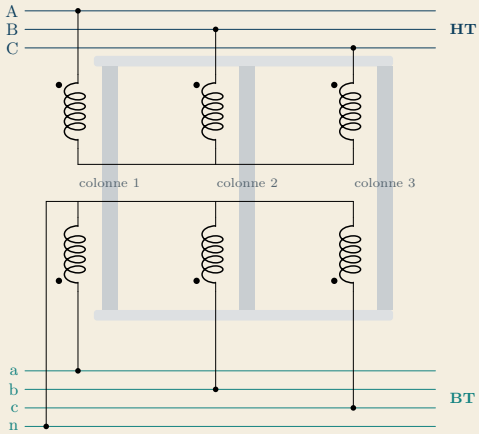
Méthode de l'horloge. On place le vecteur $\overrightarrow{v_A}$ sur 12 h (0) ; le vecteur $\overrightarrow{v_a}$ indique alors l'heure h. Chaque heure vaut 30°. Les vecteurs de Fresnel (voir § 1.5) tournent dans le sens trigonométrique : $\overrightarrow{v_B}$, en retard de 120° sur $\overrightarrow{v_A}$, est donc sur 4 h, et $\overrightarrow{v_C}$ sur 8 h.

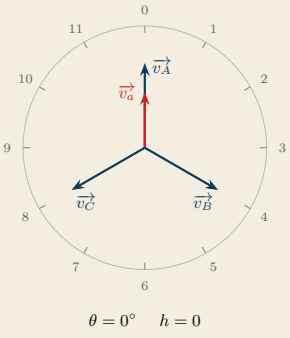
✎

Déterminer l'indice horaire.

1. Tracer l'étoile des tensions simples HT : $\overrightarrow{v_A}$ sur 12 h, $\overrightarrow{v_B}$ sur 4 h, $\overrightarrow{v_C}$ sur 8 h.
2. Sur la colonne 1, lire entre quelles bornes est branché l'enroulement HT : il est soumis à v_A (étoile) ou à une tension composée telle que $u_{AB} = v_A - v_B$ (triangle). La tracer.
3. L'enroulement BT de la même colonne a une tension **en phase** avec celle de l'enroulement HT (les bornes homologues, repérées par un point •, se correspondent). Si l'enroulement BT est branché « à l'envers » (point côté neutre), sa tension est en opposition de phase.
4. En déduire la direction de $\overrightarrow{v_a}$, lire l'heure sur le cadran : c'est h.

Exemple 1 : couplage Yy0

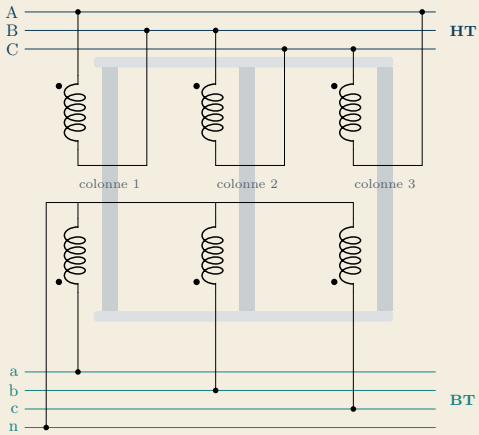


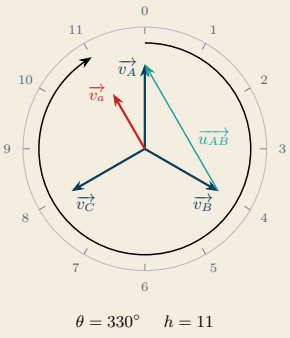


$\theta = 0°$ $h = 0$

Primaire en étoile : l'enroulement HT de la colonne 1 est branché entre A et le neutre, il est soumis à v_A. Secondaire en étoile, branché dans le même sens : l'enroulement BT de la colonne 1 délivre v_a, **en phase** avec v_A. Donc $\theta = 0°$ et $h = 0$: couplage **Yy0**.

Exemple 2 : couplage Dy11



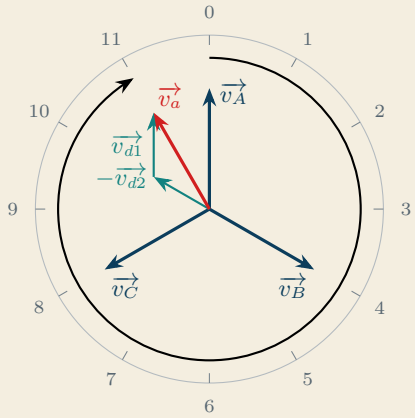


$\theta = 330°$ $h = 11$

Primaire en triangle : l'enroulement HT de la colonne 1 est branché entre A (côté pointé) et B, il est soumis à $u_{AB} = v_A - v_B$. On construit $\overrightarrow{u_{AB}} = \overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B}$: ce vecteur va de l'extrémité de $\overrightarrow{v_B}$ à celle de $\overrightarrow{v_A}$; il est **en avance de** 30° sur $\overrightarrow{v_A}$. L'enroulement BT de la colonne 1 (étoile) délivre v_a, en phase avec u_{AB} : $\overrightarrow{v_a}$ pointe sur 11 h. Donc $\theta = 330°$ et $h = 330/30 = 11$: couplage **Dy11**. La tension BT est en avance de 30° sur la tension HT.

Exemple 3 : couplage Yz11

Primaire en étoile ; au secondaire, la phase a est formée de la demi-bobine de la colonne 1, de tension v_{d1} (en phase avec v_A), en série avec la demi-bobine de la colonne 2 branchée à l'envers, de tension $-v_{d2}$ (en opposition avec v_B) : $v_a = v_{d1} - v_{d2}$.



$\overrightarrow{v_{d1}}$ est parallèle à $\overrightarrow{v_A}$, $-\overrightarrow{v_{d2}}$ est opposé à $\overrightarrow{v_B}$; leur somme $\overrightarrow{v_a}$ est en avance de 30° sur $\overrightarrow{v_A}$ et sa longueur vaut $\sqrt{3}\,V_d$.

$\theta = 330°$ $\quad h = 11$: couplage **Yz11**.

Couplages usuels

À retenir

Couplage	θ	h
Yy0, Dd0	0°	0
Dy5	150°	5
Yy6	180°	6
Dy11, Yd11, Yz11	330°	11

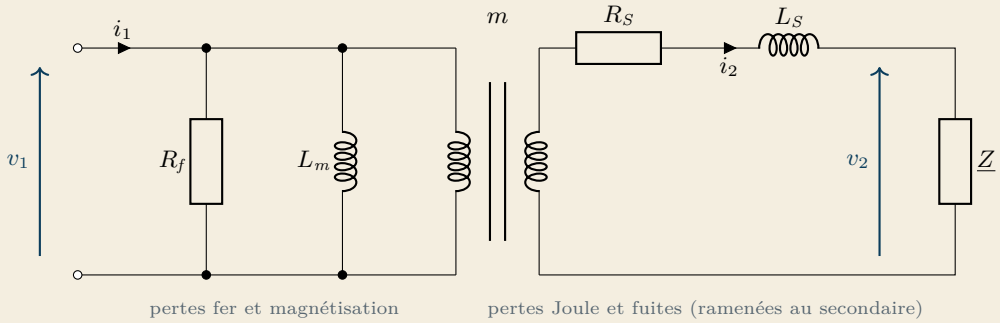
Retourner tous les enroulements BT (point côté neutre) ajoute 180°, soit 6 heures : Yy0 devient Yy6, Dy11 devient Dy5.

Piège classique Compter l'angle dans le sens trigonométrique : on trouverait $h = 1$ au lieu de 11 pour un Dy11. L'indice horaire se lit **comme sur une montre**, de la HT vers la BT.

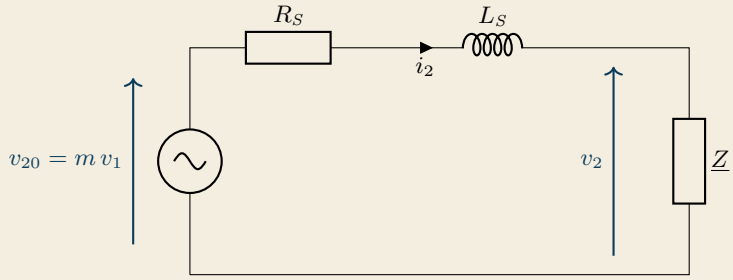
En ligne : horloge interactive : choisissez un couplage (Yy0, Dy5, Yy6, Dy11, Yd11, Yz11), le schéma de câblage et le diagramme de Fresnel s'affichent.

4.5 Schéma équivalent par phase

À retenir · Modèle par phase Quel que soit son couplage réel, un transformateur triphasé alimentant une charge équilibrée est équivalent à **trois transformateurs monophasés identiques couplés en étoile-étoile**. On étudie une seule phase, entre phase et neutre : tension simple $V_1 = \dfrac{U_1}{\sqrt{3}}$, courant de ligne I_1, rapport m.



R_f modélise les pertes fer, L_m l'inductance magnétisante ; R_S et L_S modélisent les pertes Joule et les fuites magnétiques des deux enroulements, **ramenées au secondaire**. Vu de la charge, le transformateur est un générateur de Thévenin par phase (voir § 1.4) :



À retenir

$$V_{20} = m\,V_1 \qquad \underline{v_{20}} = \underline{v_2} + (R_S + jL_S\omega)\,\underline{i_2} \qquad X_S = L_S\,\omega$$

Piège classique Mélanger tensions simples et composées dans le modèle : on y place **toujours** des tensions simples (V_1, V_{20}, V_2) et des courants de ligne. On repasse aux tensions composées à la fin, en multipliant par $\sqrt{3}$.

4.6 Puissance nominale et essais

Puissance apparente nominale

À retenir

$$S_n = \sqrt{3}\,U_{1n}\,I_{1n} = \sqrt{3}\,U_{2n}\,I_{2n}$$

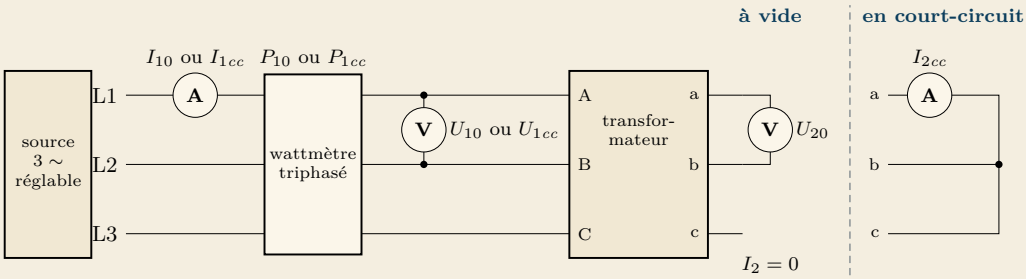
U : tensions composées ; I : courants de ligne. C'est S_n (en kVA) qui sert à choisir le transformateur.

Ex **Exemple : poste de livraison d'une usine de plasturgie** Transformateur 630 kVA, 20 kV / 410 V, Dyn11. Courants nominaux :

$$I_{1n} = \frac{630\,000}{\sqrt{3} \times 20\,000} \approx 18{,}2\,\text{A} \qquad I_{2n} = \frac{630\,000}{\sqrt{3} \times 410} \approx 887\,\text{A}$$

Montage des essais

Les deux essais se font sous tension triphasée réglable ; on mesure la tension entre phases, le courant de ligne et la puissance active totale (wattmètre triphasé ou méthode des deux wattmètres).



Essai à vide

Secondaire ouvert, primaire sous sa tension nominale $U_{10} = U_{1n}$. On mesure U_{20} (d'où m), le courant I_{10} et la puissance P_{10}. Le courant à vide est très faible (1 à 2 % de I_{1n}) : les pertes Joule sont négligeables et $P_{10} = P_{fer}$.

★ **À retenir · Essai à vide**

$$m = \frac{U_{20}}{U_{10}} \qquad P_{10} = P_{fer} = \frac{3V_{10}^2}{R_f} \;\Rightarrow\; R_f = \frac{3V_{10}^2}{P_{10}} = \frac{U_{10}^2}{P_{10}}$$

$$Q_{10} = \sqrt{S_{10}^2 - P_{10}^2} \quad \text{avec} \quad S_{10} = \sqrt{3}\,U_{10}\,I_{10} \qquad L_m = \frac{U_{10}^2}{\omega\, Q_{10}}$$

On passe de $3V_{10}^2$ à U_{10}^2 car $U_{10} = \sqrt{3}\,V_{10}$, donc $U_{10}^2 = 3V_{10}^2$.

Ex **Exemple : le transformateur de 630 kVA** Sous $U_{10} = 20\,\text{kV}$: $I_{10} = 0{,}25\,\text{A}$ et $P_{10} = 1{,}0\,\text{kW}$.

$$R_f = \frac{20\,000^2}{1000} = 400\,\text{k}\Omega \qquad S_{10} = \sqrt{3} \times 20\,000 \times 0{,}25 \approx 8\,660\,\text{VA}$$

$$Q_{10} = \sqrt{8660^2 - 1000^2} \approx 8\,602\,\text{VAR} \qquad L_m = \frac{20\,000^2}{314 \times 8602} \approx 148\,\text{H}$$

Essai en court-circuit

Secondaire en court-circuit, on augmente progressivement la tension primaire depuis zéro jusqu'à obtenir $I_{2cc} = I_{2n}$. Il suffit d'une tension **très réduite** U_{1cc} (4 à 6 % de U_{1n}) : le flux est faible, les pertes fer sont négligeables et P_{1cc} représente les pertes Joule.

★ **À retenir · Essai en court-circuit**

$$P_{1cc} = 3R_S I_{2cc}^2 \;\Rightarrow\; R_S = \frac{P_{1cc}}{3\,I_{2cc}^2}$$

$$Z_S = \frac{m\,V_{1cc}}{I_{2cc}} = \frac{m\,U_{1cc}}{\sqrt{3}\,I_{2cc}} \qquad X_S = L_S\omega = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$$

Secondaire en court-circuit ($v_2 = 0$), la f.é.m. $m\,v_{1cc}$ du modèle ne débite que dans R_S et L_S : c'est ce qui donne Z_S.

Ex **Exemple : le transformateur de 630 kVA** $U_{1cc} = 800\,\text{V}$, $I_{2cc} = I_{2n} = 887\,\text{A}$, $P_{1cc} = 6{,}5\,\text{kW}$.

$$R_S = \frac{6500}{3 \times 887^2} \approx 2{,}75\,\text{m}\Omega \qquad Z_S = \frac{0{,}020\,5 \times 800}{\sqrt{3} \times 887} = \frac{9{,}47\,\text{V}}{887\,\text{A}} \approx 10{,}7\,\text{m}\Omega$$

$$X_S = \sqrt{10{,}7^2 - 2{,}75^2} \approx 10{,}3\,\text{m}\Omega \qquad L_S = \frac{X_S}{\omega} \approx 33\,\mu\text{H}$$

✗ **Piège classique** Oublier le facteur 3 dans $R_S = P_{1cc}/(3\,I_{2cc}^2)$: le wattmètre mesure la puissance des **trois** phases. De même, Z_S se calcule avec la tension **simple** $m\,V_{1cc}$.

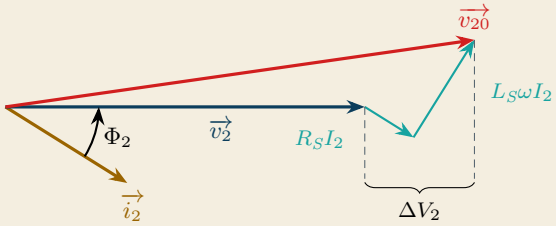
Tension de court-circuit

D **Définition** La **tension de court-circuit** est la tension U_{1cc} qui fait circuler le courant nominal secondaire en court-circuit, exprimée en pourcentage de U_{1n} : $U_{cc\%} = (U_{1cc}/U_{1n}) \times 100$. Elle figure sur la plaque signalétique (4 % jusqu'à 630 kVA, 6 % au-delà, pour les transformateurs de distribution).

\+ **Courant de court-circuit** – hors programme En cas de court-circuit franc aux bornes BT, sous tension primaire nominale, le courant vaut $I_k = V_{20}/Z_S$. Comme Z_S a été mesurée sous U_{1cc} avec I_{2n}, on obtient $I_k = I_{2n} \times 100/U_{cc\%}$. Pour le 630 kVA ($U_{cc\%} = 4$) : $I_k = 236{,}7/0{,}010\,67 \approx 22{,}2\,\text{kA} = 887 \times 100/4$. Le disjoncteur général BT doit avoir un **pouvoir de coupure** supérieur à 22 kA.

4.7 Chute de tension

Quand le transformateur débite, la tension secondaire diminue à cause de R_S et L_S. La loi des mailles du modèle par phase s'écrit avec des vecteurs de Fresnel : $\overrightarrow{v_{20}} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_{R_S}} + \overrightarrow{v_{L_S}}$ (diagramme de Kapp).



L'angle Φ_2 (de $\overrightarrow{i_2}$ vers $\overrightarrow{v_2}$) est imposé par la charge. Les vecteurs $R_S I_2$ et $L_S\omega I_2$ étant petits devant V_2, la différence des longueurs $V_{20} - V_2$ est pratiquement égale à la projection de ces deux vecteurs sur la direction de $\overrightarrow{v_2}$.

★ **À retenir · Chute de tension**

$$\Delta V_2 = V_{20} - V_2 \approx R_S\, I_2 \cos(\Phi_2) + L_S\omega\, I_2 \sin(\Phi_2)$$

$$\Delta U_2 = \sqrt{3}\,\Delta V_2 = \sqrt{3}\left(R_S\, I_2 \cos(\Phi_2) + L_S\omega\, I_2 \sin(\Phi_2)\right) \qquad U_2 = U_{20} - \Delta U_2$$

Ex **Exemple : le 630 kVA à pleine charge, $\cos(\Phi_2) = 0{,}85$ inductif**
$\sin(\Phi_2) = \sqrt{1 - 0{,}85^2} \approx 0{,}527$:

$$\Delta V_2 = 887 \times (0{,}002\,75 \times 0{,}85 + 0{,}010\,3 \times 0{,}527) \approx 6{,}9\,\text{V}$$

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} \times 6{,}9 \approx 11{,}9\,\text{V} \qquad U_2 = 410 - 11{,}9 \approx 398\,\text{V}$$

C'est pour compenser cette chute que la tension secondaire à vide vaut 410 V et non 400 V.

✗ **Piège classique** Pour une charge **capacitive**, $\Phi_2 < 0$ et $\sin(\Phi_2) < 0$: la chute de tension peut devenir négative, la tension en charge est alors supérieure à la tension à vide (cas d'une batterie de condensateurs surdimensionnée à faible charge).

4.8 Rendement

★ **À retenir · Rendement**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{fer} + P_{joule}} = \frac{\sqrt{3}\,U_2 I_2 \cos(\Phi_2)}{\sqrt{3}\,U_2 I_2 \cos(\Phi_2) + P_{fer} + 3R_S I_2^2}$$

Les pertes fer sont constantes (tension primaire fixée) ; les pertes Joule varient comme I_2^2.

Ex

Exemple : le 630 kVA à pleine charge

$$P_2 = \sqrt{3} \times 398 \times 887 \times 0{,}85 \approx 520\,\text{kW} \qquad P_{joule} = 3 \times 0{,}002\,75 \times 887^2 \approx 6{,}5\,\text{kW}$$

$$\eta = \frac{520}{520 + 1{,}0 + 6{,}5} \approx 0{,}986 \quad \text{soit} \quad 98{,}6\,\%$$

+

Rendement maximal – hors programme À tension et facteur de puissance fixés, le rendement est maximal lorsque les pertes Joule sont égales aux pertes fer :

$$3R_S I_2^2 = P_{fer}$$

Pour le 630 kVA, cela donne

$$I_2 = \sqrt{\frac{1000}{3 \times 0{,}002\,75}} \approx 348\,\text{A}$$

soit environ 40 % de la charge nominale : un transformateur de distribution est conçu pour un rendement optimal à charge partielle.

✗

Piège classique Un transformateur reste sous tension jour et nuit : même sans charge, il consomme ses pertes fer **en permanence**. Sur une année (8 760 h), les 1,0 kW de pertes à vide du 630 kVA représentent 8 760 kW · h.

4.9 Plaque signalétique et transformateur de distribution

La plaque signalétique rassemble toutes les données utiles à l'exploitant : puissance, tensions, couplage, tension de court-circuit et pertes. Avec elle, on retrouve sans aucun essai les courants nominaux, le modèle par phase, le courant de court-circuit et le rendement.

Lire la plaque signalétique

TRANSFORMATEUR TRIPHASÉ IMMERGÉ			**NF EN 60076**
Puissance assignée	**630 kVA**	Fréquence	50 Hz
Tension HT	**20 000 V**	Tension BT à vide	**410 V**
Courant HT	18,2 A	Courant BT	887 A
Couplage	**Dyn11**	Tension de court-circuit	**4 %**
Pertes à vide	1 000 W	Pertes dues à la charge	6 500 W
Refroidissement	ONAN	Masse totale	1 750 kg

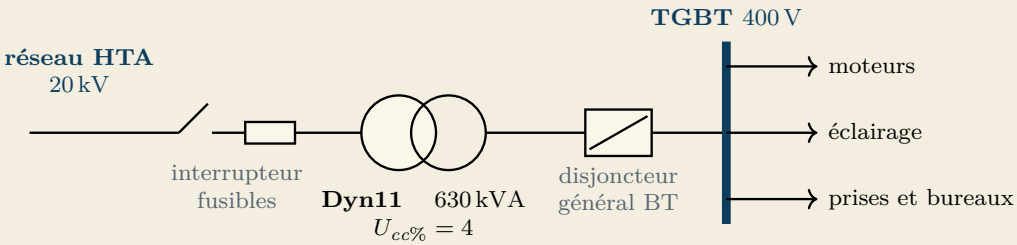
Prises HT (hors tension) : 21 000 – 20 500 – **20 000** – 19 500 – 19 000 V

▹ **Pertes à vide** : ce sont les pertes fer $P_{fer} = P_{10}$. **Pertes dues à la charge** : pertes Joule à courant nominal, P_{1cc} (à I_{2n}).

- ▷ **ONAN** : refroidissement naturel, huile (O) circulant naturellement (N) à l'intérieur, air (A) circulant naturellement (N) à l'extérieur.
- ▷ **Prises** : un commutateur, manœuvré transformateur hors tension, choisit le nombre de spires HT utilisées (±2,5 %, ±5 %). Si la tension du réseau vaut 20,5 kV, on se place sur la prise 20 500 V pour retrouver 410 V à vide.

Le transformateur de distribution HTA/BT

Le réseau public de distribution est exploité en **HTA** (en France, généralement 20 kV) ; les installations des clients sont en **BT** 230 V / 400 V. Le poste de transformation HTA/BT les relie.



À retenir · Pourquoi le couplage Dyn11 ?

- ▷ **D** côté HTA : le réseau HTA n'a pas besoin de neutre (trois fils) ; les courants harmoniques de rang 3 créés par les charges électroniques (variateurs, LED, informatique) circulent dans le triangle et ne remontent pas sur le réseau.
- ▷ **yn** côté BT : le neutre sorti fournit à la fois 400 V entre phases et 230 V entre phase et neutre ; un récepteur monophasé ne charge qu'une colonne, dont le courant primaire est fourni par deux lignes HTA, sans déséquilibre de flux.
- ▷ U_{20} = 410 V : la tension à vide est légèrement supérieure à 400 V pour compenser la chute de tension en charge.

Les puissances sont normalisées : 100, 160, 250, 400, 630, 800, 1000, 1250 kVA…

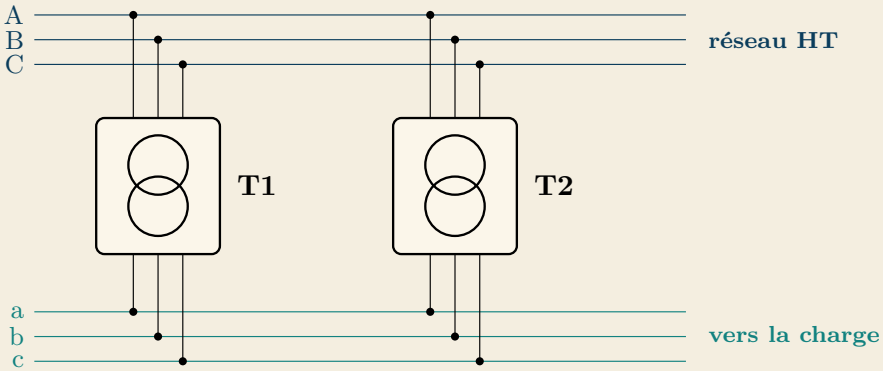
Sur les poteaux des zones rurales, les petits transformateurs (jusqu'à 160 kVA) sont souvent couplés en **Yzn11** : le zigzag répartit chaque charge monophasée sur deux colonnes et supporte très bien les déséquilibres importants des réseaux ruraux.

4.10 Mise en parallèle de transformateurs

Quand la puissance appelée dépasse celle du transformateur installé, ou pour assurer une continuité de service (un transformateur peut être arrêté pour maintenance), on place un second transformateur **en parallèle** : mêmes jeux de barres HT et BT.

À retenir · Conditions de mise en parallèle

1. **Même rapport de transformation** m (mêmes tensions HT et BT à vide, prises sur la même position).
2. **Même indice horaire** h : les tensions BT de même nom sont en phase.
3. **Même ordre des phases** : on relie a_1 à a_2, b_1 à b_2, c_1 à c_2.
4. **Tensions de court-circuit voisines** (écart inférieur à 10 %) et puissances dans un rapport inférieur à 2, pour une bonne répartition de la charge.



Piège classique Coupler deux transformateurs en reliant simplement les bornes de même lettre, sans contrôle. Avant de fermer le disjoncteur de couplage, on mesure la tension entre a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2, les deux transformateurs étant sous tension à vide : ces trois tensions doivent être pratiquement **nulles**. Une tension de plusieurs centaines de volts révèle une erreur d'ordre des phases ou d'indice horaire.

Si m ou h diffèrent, les deux secondaires n'ont pas la même f.é.m. : un **courant de circulation** s'établit dans la boucle formée par les deux transformateurs, même sans charge : pertes inutiles, échauffement, voire court-circuit.

Courant de circulation – hors programme Par phase, ce courant ne rencontre que les deux impédances internes :

$$I_{circ} = \frac{\left|\underline{v}_{20,1} - \underline{v}_{20,2}\right|}{Z_{S1} + Z_{S2}}$$

Exemple : deux 630 kVA identiques ($Z_S = 10{,}7\,\text{m}\Omega$), l'un réglé sur la prise $-2{,}5\,\%$. Le second délivre 420 V à vide au lieu de 410 V :

$$\Delta V = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}77\,\text{V par phase}$$

$$I_{circ} = \frac{5{,}77}{2 \times 0{,}010\,7} \approx 270\,\text{A}$$

soit 30 % du courant nominal, à vide !

Avec des indices horaires différents (Dy11 et Dy5 par exemple), les f.é.m. sont en opposition : le courant de circulation atteint plusieurs fois le courant nominal, c'est un court-circuit.

Répartition de la charge – hors programme Les deux transformateurs sont soumis à la même chute de tension ; ils se partagent le courant en raison inverse de leurs impédances. Comme Z_S est proportionnelle au rapport $U_{cc\%}/S_n$:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{Z_{S2}}{Z_{S1}} = \frac{S_{1n}/U_{cc1\%}}{S_{2n}/U_{cc2\%}}$$

Avec des tensions de court-circuit égales, chaque transformateur prend une part de la charge proportionnelle à sa puissance nominale ; sinon, celui qui a la plus **faible** tension de court-circuit est surchargé le premier.

Exemple : 630 kVA ($U_{cc\%} = 4$) et 400 kVA ($U_{cc\%} = 4{,}5$) alimentant 1 000 kVA.

$$\frac{630}{4} = 157{,}5 \qquad \frac{400}{4{,}5} \approx 88{,}9$$

$$S_1 = 1000 \times \frac{157{,}5}{157{,}5 + 88{,}9} \approx 639\,\text{kVA} \qquad S_2 = 1000 \times \frac{88{,}9}{157{,}5 + 88{,}9} \approx 361\,\text{kVA}$$

Le 630 kVA est déjà en légère surcharge alors que le 400 kVA n'est chargé qu'à 90 % : l'ensemble ne peut fournir que 986 kVA sans surcharge, et non $630 + 400 = 1\,030$ kVA.

Démarche pour étudier un transformateur triphasé.

1. **Lire la plaque** : S_n, U_{1n}, U_{20}, couplage, $U_{cc\%}$, pertes. En déduire I_{1n}, I_{2n} et
$$m = \frac{U_{20}}{U_{1n}}$$
2. **Couplage** : tension de chaque enroulement (V ou U), m_C, indice horaire (diagramme de Fresnel).
3. **Modèle par phase** (étoile équivalente) : R_f et L_m par l'essai à vide, R_S, Z_S et X_S par l'essai en court-circuit, toujours avec les tensions **simples** et le facteur 3 sur les puissances.
4. **En charge** : courant et chute de tension
$$I_2 = \frac{S}{\sqrt{3}\,U_2} \qquad \Delta U_2 = \sqrt{3}\,\Delta V_2$$
puis U_2 et le rendement.

En ligne : diagramme de Kapp interactif (faites varier I_2 et Φ_2), calculateur de rendement et fiches des essais à vide et en court-circuit.

L'essentiel

Chapitre 4

Couplages, rapports de transformation, indice horaire

Désignation d'un couplage	HT : D, Y BT : d, y, z n : neutre BT sorti
Exemple	Dyn11 : D (HT), yn (BT), $h = 11$
Enroulement en étoile	tension simple V
Enroulement en triangle	tension composée $U = \sqrt{3}\,V$
Rapport global (à vide)	$m = \dfrac{U_{20}}{U_1} = \dfrac{V_{20}}{V_1}$
Rapport par colonne	$m_C = \dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{\text{tension enroulement BT}}{\text{tension enroulement HT}}$
Yy, Dd	$m = m_C$
Dy	$m = \sqrt{3}\,m_C \qquad m_C = \dfrac{V_{20}}{U_1}$
Indice horaire	$h = \dfrac{\theta}{30^\circ} \qquad 0 \leq h \leq 11$
Angle θ	de $\overrightarrow{v_A}$ vers $\overrightarrow{v_a}$, sens horaire
Méthode de l'horloge	$\overrightarrow{v_A}$ sur 12 h ; $\overrightarrow{v_B}$ sur 4 h ; $\overrightarrow{v_C}$ sur 8 h
Tension composée	$\overrightarrow{u_{AB}} = \overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B}$: en avance de 30° sur $\overrightarrow{v_A}$
Bornes homologues	tensions HT et BT en phase
Couplages usuels	$h = 0$: Yy0, Dd0 $h = 11$: Dy11, Yd11, Yz11
Enroulements BT retournés	$+180^\circ$, soit $+6$ h (Dy11 $\rightarrow$ Dy5)
Transformateur de distribution	Dyn11, 20 kV / 410 V

Modèle par phase, essais, fonctionnement en charge

Modèle par phase	étoile équivalente : $V_1 = \dfrac{U_1}{\sqrt{3}}$; $V_{20} = m\,V_1$
Vu du secondaire	$\underline{v_{20}} = \underline{v_2} + (R_S + jX_S)\,\underline{i_2}$ $\quad X_S = L_S\omega$
Puissance nominale	$S_n = \sqrt{3}\,U_{1n}I_{1n} = \sqrt{3}\,U_{2n}I_{2n}$
Essai à vide	$m = \dfrac{U_{20}}{U_{10}}$ $\quad P_{10} = P_{fer}$ $\quad S_{10} = \sqrt{3}\,U_{10}I_{10}$
Pertes fer	$R_f = \dfrac{3V_{10}^2}{P_{10}} = \dfrac{U_{10}^2}{P_{10}}$
Inductance magnétisante	$L_m = \dfrac{U_{10}^2}{\omega\,Q_{10}}$ $\quad Q_{10} = \sqrt{S_{10}^2 - P_{10}^2}$
Essai en court-circuit	$P_{1cc} = 3R_SI_{2cc}^2 \;\Rightarrow\; R_S = \dfrac{P_{1cc}}{3I_{2cc}^2}$
Impédance interne	$Z_S = \dfrac{m\,V_{1cc}}{I_{2cc}} = \dfrac{m\,U_{1cc}}{\sqrt{3}\,I_{2cc}}$
Réactance de fuites	$X_S = L_S\omega = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$
Tension de court-circuit	$U_{cc\%} = \dfrac{U_{1cc}}{U_{1n}} \times 100$ $\quad$ (à $I_{2cc} = I_{2n}$)
Chute de tension (Kapp)	$\Delta V_2 \approx R_SI_2\cos(\Phi_2) + X_SI_2\sin(\Phi_2)$
Entre phases	$\Delta U_2 = \sqrt{3}\,\Delta V_2$ $\quad U_2 = U_{20} - \Delta U_2$
Rendement	$\eta = \dfrac{P_2}{P_2 + P_{fer} + P_{joule}}$
Puissances	$P_2 = \sqrt{3}\,U_2I_2\cos(\Phi_2)$ $\quad P_{joule} = 3R_SI_2^2$
Parallèle : conditions	mêmes m, h, ordre des phases ; $U_{cc\%}$ voisines

Exercices

Chapitre 4

Exercice 4.1 – Le poste de transformation d'une laiterie ★☆☆

Une laiterie coopérative remplace le transformateur de son poste de livraison, arrivé en fin de vie. Le nouvel appareil vient d'être livré sur site. Avant sa mise sous tension, le technicien de maintenance doit vérifier qu'il convient à l'installation et préparer le réglage des protections. Il relève la plaque signalétique :

$$400\,\text{kVA} \quad – \quad 20\,\text{kV} \,/\, 410\,\text{V} \quad – \quad 50\,\text{Hz} \quad – \quad \text{Dyn11} \quad – \quad U_{cc\%} = 4$$

1. Expliquer la signification de chacun des symboles D, y, n et 11. Pourquoi le neutre est-il sorti au secondaire ?
2. Calculer le rapport de transformation m. Le transformateur est-il abaisseur ou élévateur ?
3. Calculer les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}.
4. Préciser la tension aux bornes d'un enroulement HT, puis celle aux bornes d'un enroulement BT à vide. En déduire le rapport par colonne m_C et vérifier que $m = \sqrt{3}\, m_C$.
5. Chaque enroulement BT comporte $N_2 = 20$ spires. Calculer le nombre de spires N_1 d'un enroulement HT.
6. Aux heures de pointe (pasteurisation et groupes froids en marche), la laiterie appelle $P = 290\,\text{kW}$ avec $\cos(\Phi) = 0{,}8$, sous $U_2 \approx 400\,\text{V}$. Calculer la puissance apparente et le courant appelés. Le transformateur est-il correctement dimensionné ?

→ corrigé p. 133

Exercice 4.2 – Identifier les indices horaires d'un lot de transformateurs ★☆☆

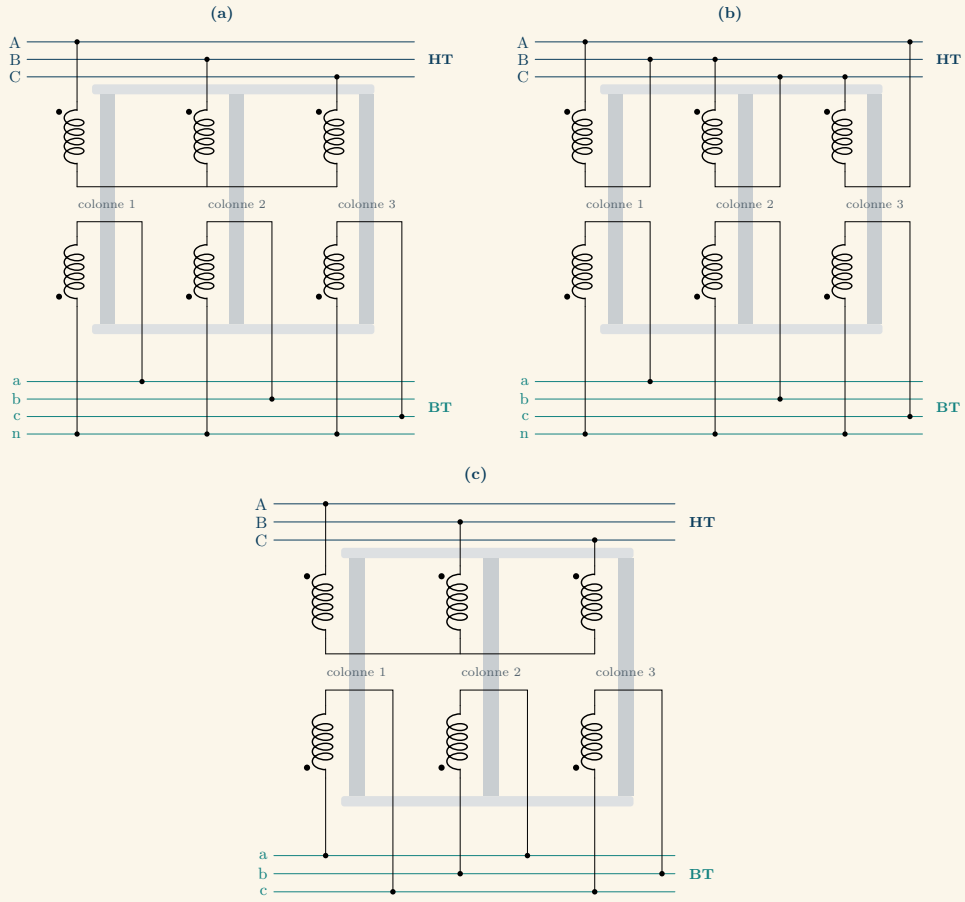
Une entreprise de location de postes de chantier récupère trois transformateurs 20 kV / 410 V dont les plaques signalétiques ont été arrachées. Tout son parc est en Dyn11 : avant de les remettre en location, elle doit savoir lesquels pourront fonctionner en parallèle avec ses autres appareils. Après dépose des capots, le technicien relève le câblage des enroulements reproduit à la suite des questions (les points • repèrent les bornes homologues des enroulements d'une même colonne).

1. Pour chaque montage, indiquer le couplage HT et le couplage BT (lettres D, Y, d, y, n).
2. Montage (a) : quelle tension reçoit l'enroulement HT de la colonne 1 ? En déduire la tension v_a, tracer le diagramme de Fresnel ($\overrightarrow{v_A}$ sur 12 h) et donner l'indice horaire.
3. Montage (b) : même question. On construira la tension aux bornes de l'enroulement HT de la colonne 1.
4. Montage (c) : l'enroulement BT de la colonne 1 est branché entre a (côté pointé)

et c. Montrer que $\overrightarrow{u_{ac}}$ est en phase avec $\overrightarrow{v_A}$, puis placer $\overrightarrow{v_a}$ et donner l'indice horaire.

5. Lequel de ces transformateurs peut être mis en parallèle avec un Dyn11 ? Peut-il alimenter des récepteurs monophasés 230 V ?

6. Sur le transformateur (b), on retourne les trois enroulements BT (point côté borne a, b, c au lieu du neutre). Quel couplage obtient-on ?



→ corrigé p. 134

Exercice 4.3 – Essais de réception d'un transformateur de 250 kVA ★★☆

Sur la plateforme d'essais d'un constructeur, chaque transformateur subit avant livraison des essais individuels de réception. Le technicien d'essais teste un transformateur 250 kVA, 20 kV / 410 V, Dyn11, destiné au poste d'un supermarché. Il doit établir le modèle équivalent par phase et vérifier les valeurs garanties au client.

Données

- Essai à vide sous $U_{10} = U_{1n} = 20\,\text{kV}$: $U_{20} = 410\,\text{V}$; $I_{10} = 0{,}10\,\text{A}$; $P_{10} = 650\,\text{W}$.
- Essai en court-circuit : $U_{1cc} = 820\,\text{V}$; $I_{2cc} = 352\,\text{A}$; $P_{1cc} = 3{,}25\,\text{kW}$.
- Fréquence : $50\,\text{Hz}$.

I- Essai à vide

1. Calculer le rapport de transformation m, puis les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}. Exprimer I_{10} en pourcentage de I_{1n}.
2. Justifier que P_{10} représente les pertes fer. Calculer la résistance R_f du modèle.
3. Calculer la puissance apparente S_{10} et la puissance réactive Q_{10} absorbées à vide, puis l'inductance magnétisante L_m.

II- Essai en court-circuit

4. Vérifier que l'essai est réalisé au courant nominal. Calculer la tension de court-circuit $U_{cc\%}$.
5. Les pertes fer variant comme le carré de la tension, estimer les pertes fer pendant l'essai. Conclure.
6. Calculer la résistance R_S ramenée au secondaire.
7. Calculer la tension simple $m\,V_{1cc}$, puis l'impédance Z_S, la réactance X_S et l'inductance L_S.
8. Dessiner le modèle équivalent par phase vu du secondaire, en indiquant les valeurs numériques.
9. En cas de court-circuit franc aux bornes BT, le courant vaut $I_k = V_{20}/Z_S$. Le calculer. Le disjoncteur général prévu a un pouvoir de coupure de $10\,\text{kA}$: convient-il ?

→ corrigé p. 135

Exercice 4.4 – Chute de tension dans une boulangerie industrielle ★★☆

Une boulangerie industrielle est alimentée par son propre transformateur 400 kVA, 20 kV / 410 V, Dyn11. Chaque matin, lorsque les fours, les pétrins et les compresseurs frigorifiques fonctionnent ensemble, les automates des fours se mettent en défaut : leur notice exige une tension entre phases d'au moins 400 V. Le responsable maintenance vous demande d'expliquer le phénomène et de vérifier si l'installation d'une batterie de condensateurs réglerait le problème.

Données

- Modèle par phase vu du secondaire : $R_S = 4{,}8\,\text{m}\Omega$; $X_S = L_S\omega = 16\,\text{m}\Omega$. Pertes fer : $P_{fer} = 930\,\text{W}$.
- Pointe du matin : $I_2 = 520\,\text{A}$; $\cos(\Phi_2) = 0{,}82$ (inductif).

1. Calculer le courant nominal I_{2n} et le taux de charge du transformateur pendant la pointe.
2. Dessiner le modèle équivalent par phase vu du secondaire, charge comprise.
3. Calculer la chute de tension ΔU_2 entre phases, puis la tension U_2 pendant la pointe. Expliquer la mise en défaut des fours.
4. Comparer les deux termes de la chute de tension. Lequel est prépondérant ? Pourquoi peut-on espérer qu'un relèvement du facteur de puissance soit efficace ?
5. On installe une batterie de condensateurs qui porte le facteur de puissance à 0,96, sans modifier la puissance active. En négligeant la variation de U_2, montrer que le courant devient $I_2' \approx 444\,\text{A}$. Calculer la nouvelle tension U_2'. Le problème est-il résolu ?
6. Calculer le rendement du transformateur avant et après compensation.
7. On admet que le rendement est maximal lorsque les pertes Joule sont égales aux pertes fer. Pour quelle intensité I_2 est-ce le cas ? Quel taux de charge cela représente-t-il ?

→ corrigé p. 136

Exercice 4.5 – Transformateur Yzn11 sur poteau en zone rurale ★★★

Le gestionnaire du réseau de distribution remplace le transformateur sur poteau qui alimente un hameau : une vingtaine d'habitations et une exploitation agricole équipée de moteurs monophasés. Les charges y sont très déséquilibrées entre phases. Le technicien d'exploitation doit justifier le choix du nouveau transformateur, vérifier ses tensions à partir des données du constructeur et prévoir les protections.

Données

- Plaque : 100 kVA ; 20 kV / 410 V ; Yzn11 ; $U_{cc\%} = 4$; pertes dues à la charge : 1,25 kW.
- Chaque enroulement HT comporte $N_1 = 3380$ spires ; chaque demi-enroulement BT comporte $N_d = 40$ spires.
- La phase a est formée de la demi-bobine BT de la colonne 1, de tension v_{d1} en phase avec v_A, en série avec la demi-bobine BT de la colonne 2 branchée à l'envers, qui apporte la tension $-v_{d2}$ (v_{d2} étant en phase avec v_B).

I- Couplage

1. Donner la signification de Yzn11. Pourquoi choisit-on un secondaire zigzag pour ce hameau ?
2. Construire le diagramme de Fresnel donnant $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_{d1}} - \overrightarrow{v_{d2}}$, avec $\overrightarrow{v_A}$ sur 12 h. Retrouver l'indice horaire.
3. Calculer la tension V_1 aux bornes d'un enroulement HT, puis la tension V_d aux bornes d'un demi-enroulement BT.

4. À l'aide du diagramme, montrer que $V_{20} = \sqrt{3}\,V_d$. Calculer V_{20} et U_{20}, puis le rapport m. Comparer à la plaque.
5. Avec un secondaire en étoile, combien faudrait-il de spires par phase BT pour obtenir la même tension ? Comparer au nombre total de spires d'une phase zigzag et conclure.

II- Fonctionnement en charge

6. Calculer I_{2n}, puis l'impédance Z_S à partir de $U_{cc\%}$, la résistance R_S à partir des pertes dues à la charge, et la réactance X_S.
7. Un soir d'hiver, le transformateur débite $I_2 = 120\,\text{A}$ avec $\cos(\Phi_2) = 0{,}9$. Calculer la tension entre phases U_2.
8. Calculer le courant de court-circuit $I_k = \frac{V_{20}}{Z_S}$ aux bornes BT du transformateur.

→ corrigé p. 137

Exercice 4.6 – Second transformateur d'un centre de données ★★★

Un centre de données est alimenté par un transformateur T1 de 1 000 kVA. La mise en service d'une nouvelle salle de serveurs portera la puissance appelée à 1 800 kVA. Le bureau d'études prévoit d'installer un second transformateur T2 **en parallèle** sur T1 et reçoit trois offres. Vous devez analyser ces offres et rédiger une recommandation.

Données

- T1 (existant) : 1 000 kVA ; 20 kV / 410 V ; Dyn11 ; $U_{cc\%} = 6$.
- Offre (a) : 800 kVA ; 20 kV / 410 V ; Dyn11 ; $U_{cc\%} = 6$.
- Offre (b) : 1 000 kVA ; 20 kV / 410 V ; Dyn5 ; $U_{cc\%} = 6$ (disponible immédiatement).
- Offre (c) : 1 000 kVA ; 20 kV / 410 V ; Dyn11 ; $U_{cc\%} = 4{,}5$.
- On admet que les impédances internes ont toutes le même argument : en parallèle, les courants se répartissent en raison inverse des modules Z_S. Si les deux f.é.m. à vide diffèrent, le courant de circulation vaut

$$I_{circ} = \frac{|\underline{v}_{20,1} - \underline{v}_{20,2}|}{Z_{S1} + Z_{S2}}$$

1. Rappeler les conditions de mise en parallèle de deux transformateurs triphasés.
2. Montrer que l'impédance interne d'un transformateur s'écrit

$$Z_S = \frac{U_{cc\%}}{100} \times \frac{V_{20}}{I_{2n}}$$

   Calculer Z_S pour T1 et pour chacune des trois offres.
3. Offre (b) : placer sur un même cadran d'horloge $\overrightarrow{v_{a1}}$ (T1) et $\overrightarrow{v_{a2}}$ (T2). Calculer la tension à vide entre les bornes a_1 et a_2, puis le courant de circulation qui s'établirait. Conclure.

4. Offre (c) : calculer la puissance fournie par chaque transformateur pour 1 800 kVA appelés. Quelle puissance maximale l'ensemble peut-il fournir sans surcharge ?
5. Offre (a) : même question. Commenter.
6. Lors de la mise en service de l'offre (a), le commutateur de prises de T2 est laissé sur une mauvaise position : T2 délivre 420 V à vide au lieu de 410 V. Calculer le courant de circulation à vide et l'exprimer en pourcentage du courant nominal de chaque transformateur.
7. Rédiger en quelques lignes une recommandation au bureau d'études.

→ corrigé p. 139

Sujets de type BTS

Sujet BTS 4.A – Poste de transformation d'une station d'épuration

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 h 30

Une communauté d'agglomération modernise sa station d'épuration : de nouvelles pompes de relevage et des surpresseurs d'aération pilotés par variateurs ont été installés. Le poste de livraison HTA/BT existant doit-il être remplacé ? On vous demande de vérifier le transformateur en place, puis d'étudier l'intérêt d'une compensation de l'énergie réactive.

Données

- Plaque du transformateur : 800 kVA ; 20 kV / 410 V ; 50 Hz ; Dyn11 ; $U_{cc\%} = 6$; refroidissement ONAN.
- Essai à vide sous $U_{10} = 20\,\text{kV}$: $P_{10} = 1{,}1\,\text{kW}$; $I_{10} = 0{,}30\,\text{A}$.
- Essai en court-circuit : $U_{1cc} = 1\,200\,\text{V}$; $I_{2cc} = I_{2n}$; $P_{1cc} = 8{,}4\,\text{kW}$.
- Charges en fonctionnement simultané : pompes de relevage (moteurs asynchrones) $P = 480\,\text{kW}$, $\cos(\Phi) = 0{,}84$; surpresseurs (variateurs) $P = 150\,\text{kW}$, $\cos(\Phi) = 0{,}95$; éclairage et bâtiments $P = 40\,\text{kW}$, $\cos(\Phi) = 1$.
- Cahier des charges : tension entre phases au tableau général BT d'au moins 400 V à pleine charge. Pour le calcul des courants, on prendra $U_2 = 400\,\text{V}$.
- Prix moyen de l'énergie : 0,15 € le kW · h.

Partie A – Couplage du transformateur

A.1. Donner la signification de la désignation Dyn11. Préciser la tension aux bornes d'un enroulement HT et celle aux bornes d'un enroulement BT, à vide.

A.2. L'enroulement HT de la colonne 1 est branché entre A (côté pointé) et B ; l'enroulement BT de la même colonne entre a (côté pointé) et n. Tracer le

diagramme de Fresnel ($\overrightarrow{v_A}$ sur 12 h) faisant apparaître $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$, $\overrightarrow{u_{AB}}$ et $\overrightarrow{v_a}$. Retrouver l'indice horaire.

A.3. Calculer le rapport de transformation m et le rapport par colonne m_C.

Partie B – Modèle équivalent par phase

B.1. Calculer les courants nominaux I_{1n} et I_{2n}.

B.2. Que représente P_{10} ? Calculer la résistance R_f du modèle.

B.3. Calculer la résistance R_S ramenée au secondaire.

B.4. Calculer la tension simple $m\,V_{1cc}$, puis l'impédance Z_S et la réactance X_S. Dessiner le modèle par phase vu du secondaire.

Partie C – Bilan de puissance et chute de tension

C.1. Par la méthode de Boucherot, calculer les puissances active, réactive et apparente appelées, ainsi que le facteur de puissance $\cos(\Phi_2)$ de l'installation.

C.2. Calculer le taux de charge du transformateur et le courant I_2.

C.3. Calculer la chute de tension ΔU_2 et la tension U_2. Le cahier des charges est-il respecté ?

Partie D – Compensation de l'énergie réactive

On installe une batterie de condensateurs au tableau général BT pour porter le facteur de puissance à 0,96.

D.1. Calculer la puissance réactive Q_c que doit fournir la batterie.

D.2. Calculer la nouvelle puissance apparente, le nouveau courant I_2' et la nouvelle tension U_2'. Conclure.

Partie E – Rendement et pertes annuelles

E.1. Dans la situation compensée, calculer les pertes Joule et le rendement du transformateur.

E.2. Le transformateur reste sous tension toute l'année (8 760 h) ; la charge étudiée est appelée 5 000 h par an, la charge est négligeable le reste du temps. Calculer l'énergie perdue chaque année dans le transformateur et son coût.

Partie F – Court-circuit

F.1. Lors d'un court-circuit franc aux bornes BT, le courant vaut $I_k = V_{20}/Z_S$. Le calculer.

F.2. Le disjoncteur général BT existe avec des pouvoirs de coupure de 16 kA, 25 kA et 36 kA. Lequel choisir ? Justifier.

→ corrigé p. 140

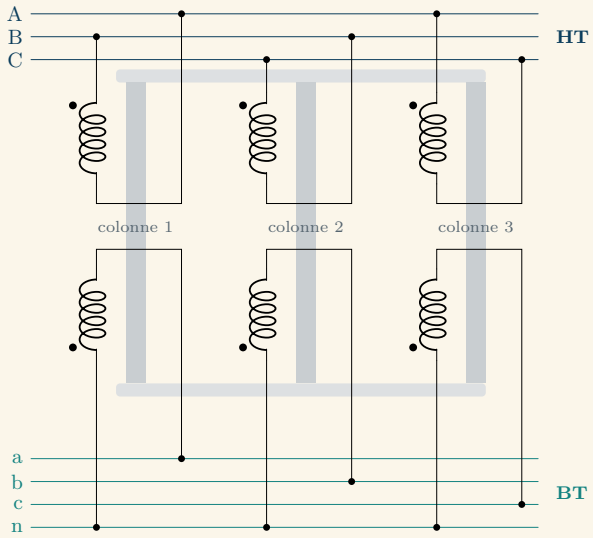
Sujet BTS 4.B – Raccordement d'une centrale photovoltaïque

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 h 15

Une centrale photovoltaïque au sol injecte sa production sur le réseau HTA 20 kV. Les onduleurs délivrent une tension triphasée 400 V ($\cos(\Phi) = 1$) ; un transformateur **élévateur** relie leur sortie au réseau. Le bureau d'études doit vérifier le câblage proposé et choisir entre deux offres de transformateurs qui ne diffèrent que par leurs pertes.

Données

- Transformateur : 1 250 kVA ; 20 kV / 400 V (tensions à vide) ; Dyn11 (côté HT relié au réseau, côté BT relié aux onduleurs) ; $U_{cc\%} = 6$.
- Offre 1 (standard) : pertes à vide 1,70 kW ; pertes dues à la charge (à S_n) 13,9 kW ; prix 21 000 €.
- Offre 2 (pertes réduites) : pertes à vide 1,35 kW ; pertes dues à la charge (à S_n) 11,0 kW ; prix 25 500 €.
- Journée moyenne de production : 3 h à 1 100 kVA, 4 h à 700 kVA, 4 h à 300 kVA et 13 h sans production. Le transformateur reste sous tension 24 h sur 24.
- L'énergie injectée est vendue 0,10 € le kW · h. Durée d'exploitation prévue : 20 ans.
- Câblage proposé par le constructeur (les points • repèrent les bornes homologues) :



Partie A – Couplage et indice horaire

A.1. Dans cette utilisation, quel côté du transformateur est le primaire ? Pourquoi le couplage s'écrit-il néanmoins Dyn11 et non YNd11 ?

A.2. Entre quelles bornes est branché l'enroulement HT de la colonne 1, et de quel côté est son point ? En déduire la tension u appliquée à cet enroulement (orientée vers la borne pointée).

A.3. L'enroulement BT de la colonne 1 a son point côté neutre. Exprimer v_a en fonction de cette tension, tracer le diagramme de Fresnel ($\overrightarrow{v_A}$ sur 12 h) et vérifier que le câblage réalise bien un Dyn11.

Partie B – Rapports et courants

B.1. Calculer le rapport de transformation m dans le sens de transfert de l'énergie (onduleurs vers réseau).

B.2. Calculer la tension aux bornes d'un enroulement BT et celle aux bornes d'un enroulement HT. En déduire le rapport par colonne m_C et vérifier que, pour ce couplage,

$$m = \frac{m_C}{\sqrt{3}}$$

B.3. Calculer les courants nominaux côté BT et côté HT.

Partie C – Rendement à pleine production

C.1. Justifier que les pertes Joule pour une puissance apparente S valent

$$P_{joule} = P_{cc} \times \left(\frac{S}{S_n}\right)^2$$

où P_{cc} désigne les pertes dues à la charge à S_n.

C.2. Les onduleurs fournissent 1 100 kW. Calculer, pour chaque offre, les pertes et le rendement du transformateur.

Partie D – Bilan d'une journée moyenne

D.1. Calculer l'énergie fournie par les onduleurs au transformateur pendant la journée moyenne.

D.2. Pour chaque offre, calculer l'énergie perdue par les pertes à vide, puis par les pertes Joule, sur la journée.

D.3. En déduire le rendement énergétique journalier de chaque offre. Pourquoi est-il inférieur au rendement à pleine production ?

Partie E – Choix du transformateur

E.1. Calculer l'énergie économisée chaque année avec l'offre 2 et le gain financier correspondant.

E.2. Calculer le temps de retour du surcoût de l'offre 2, puis le gain net sur 20 ans. Rédiger la recommandation.

→ corrigé p. 143

Corrigés

Chapitre 4

✓ Corrigé de l'exercice 4.1 – Le poste de transformation d'une laiterie

1. **D** : enroulements HT couplés en triangle ; **y** : enroulements BT couplés en étoile ; **n** : neutre BT sorti ; **11** : indice horaire, la tension v_a est décalée de $\theta = 11 \times 30° = 330°$ (sens horaire) par rapport à v_A, c'est-à-dire en avance de 30°.

   Le neutre sorti permet de disposer à la fois de 400 V entre phases (moteurs, groupes froids) et de 230 V entre phase et neutre (éclairage, prises, bureaux).

2. À vide, avec les tensions composées : $m = \dfrac{U_{20}}{U_{1n}} = \dfrac{410}{20\,000}$ soit $\boxed{m = 0{,}020\,5}$

   $m < 1$: transformateur **abaisseur**.

3. $S_n = \sqrt{3}\,U_{1n} I_{1n} = \sqrt{3}\,U_{2n} I_{2n}$, d'où :

$$I_{1n} = \frac{400\,000}{\sqrt{3} \times 20\,000} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{1n} \approx 11{,}5\ \text{A}}$$

$$I_{2n} = \frac{400\,000}{\sqrt{3} \times 410} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{2n} \approx 563\ \text{A}}$$

4. Primaire en triangle : chaque enroulement HT reçoit la tension composée $U_1 = 20\,\text{kV}$. Secondaire en étoile : chaque enroulement BT délivre la tension simple $V_{20} = 410/\sqrt{3} \approx 236{,}7\,\text{V}$.

$$m_C = \frac{V_{20}}{U_1} = \frac{236{,}7}{20\,000} \quad \text{soit} \quad \boxed{m_C \approx 0{,}011\,84}$$

   Vérification : $\sqrt{3} \times 0{,}011\,84 \approx 0{,}020\,5 = m$ ✓.

5. $m_C = \dfrac{N_2}{N_1}$, d'où $N_1 = \dfrac{N_2}{m_C} = \dfrac{20}{0{,}011\,836}$ soit $\boxed{N_1 \approx 1690 \text{ spires}}$

6. $S = \dfrac{P}{\cos(\Phi)} = \dfrac{290}{0{,}8}$ soit $\boxed{S = 362{,}5\,\text{kVA}}$

$$I_2 = \frac{S}{\sqrt{3}\,U_2} = \frac{362\,500}{\sqrt{3} \times 400} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_2 \approx 523\ \text{A}}$$

   $S < S_n$ et $I_2 < I_{2n}$: le transformateur est chargé à 91 % de sa puissance nominale à la pointe. Il est **correctement dimensionné**, avec une marge réduite pour une future extension.

Méthode Pour un transformateur triphasé, $S_n = \sqrt{3}\,U\,I$ s'applique avec la tension **composée** et le courant de **ligne**, quel que soit le couplage des enroulements. Contrôle rapide : $I_{1n}/I_{2n} = m$ (ici $11{,}5/563 \approx 0{,}020\,5$).

✓ Corrigé de l'exercice 4.2 – Identifier les indices horaires d'un lot de transformateurs

1. (a) primaire étoile, secondaire étoile avec neutre sorti : **Yyn** ; (b) primaire triangle, secondaire étoile avec neutre : **Dyn** ; (c) primaire étoile, secondaire triangle : **Yd**.

2. L'enroulement HT de la colonne 1 est branché entre A (côté pointé) et le neutre : il reçoit v_A. L'enroulement BT de la colonne 1 a son point côté neutre et son autre extrémité sur a : la tension « point moins autre extrémité » vaut $v_n - v_a = -v_a$ et elle est en phase avec v_A. Donc $\overrightarrow{v_a}$ est **opposé** à $\overrightarrow{v_A}$: il pointe sur 6 h, $\theta = 180°$ et $\boxed{h = 6}$: couplage **Yyn6**.

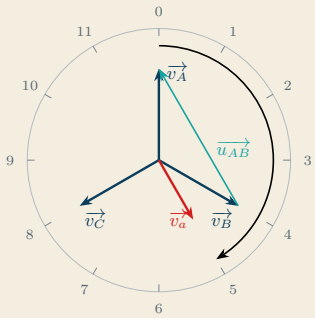
3. L'enroulement HT de la colonne 1 est branché entre A (côté pointé) et B : il reçoit $u_{AB} = v_A - v_B$. On construit $\overrightarrow{u_{AB}}$, de l'extrémité de $\overrightarrow{v_B}$ à celle de $\overrightarrow{v_A}$: il pointe sur 11 h (30° d'avance sur $\overrightarrow{v_A}$). L'enroulement BT de la colonne 1 a son point côté neutre : v_a est en **opposition** avec u_{AB}, $\overrightarrow{v_a}$ pointe sur 5 h : $\theta = 150°$ et $\boxed{h = 5}$: couplage **Dyn5**.

4. Primaire étoile : l'enroulement HT de la colonne 1 reçoit v_A. L'enroulement BT de la colonne 1 est branché entre a (côté pointé) et c : sa tension $u_{ac} = v_a - v_c$ est en phase avec v_A, donc $\overrightarrow{u_{ac}}$ pointe sur 12 h. Or $\overrightarrow{u_{ac}}$ est en retard de 30° sur $\overrightarrow{v_a}$ (de même que $\overrightarrow{u_{AC}}$ est en retard de 30° sur $\overrightarrow{v_A}$) : $\overrightarrow{v_a}$ pointe donc sur 11 h, $\theta = 330°$ et $\boxed{h = 11}$: couplage **Yd11**.

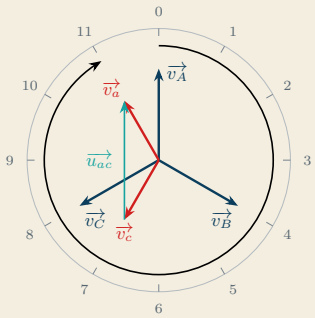
(a) Yyn6



(b) Dyn5



(c) Yd11



5. Seul le transformateur **(c)** a l'indice horaire 11 : il peut être mis en parallèle avec un Dyn11 (mêmes tensions, même indice, à condition de respecter l'ordre des phases et d'avoir des tensions de court-circuit voisines). En revanche, son secondaire en triangle n'a **pas de neutre** : utilisé seul, il ne peut pas alimenter de récepteurs monophasés 230 V entre phase et neutre.

6. Retourner les trois enroulements BT ajoute 180°, soit 6 heures : v_a est alors en phase avec u_{AB}, en avance de 30° sur v_A ($\overrightarrow{v_a}$ sur 11 h). On obtient un $\boxed{\text{Dyn11}}$ (c'est le câblage étudié dans le cours).

Méthode Pour chaque colonne : (1) lire les bornes de l'enroulement HT et le côté du point ; (2) tracer la tension correspondante ; (3) la tension BT de la même colonne lui est parallèle, de même sens si les points se correspondent, de sens opposé sinon.

✓ Corrigé de l'exercice 4.3 – Essais de réception d'un transformateur de 250 kVA

I- Essai à vide

1. $m = \dfrac{U_{20}}{U_{10}} = \dfrac{410}{20\,000}$ soit $\boxed{m = 0{,}020\,5}$

$$I_{1n} = \frac{250\,000}{\sqrt{3} \times 20\,000} \approx 7{,}22\,\text{A} \qquad I_{2n} = \frac{250\,000}{\sqrt{3} \times 410} \approx 352\,\text{A}$$

$\dfrac{I_{10}}{I_{1n}} = \dfrac{0{,}10}{7{,}22} \approx 1{,}4\,\%$: le courant à vide est très faible, comme attendu.

2. À vide, $I_2 = 0$ et I_{10} est très faible : les pertes Joule ($\propto I^2$) sont négligeables. Le transformateur étant sous tension nominale, le flux est nominal : P_{10} représente les **pertes fer**.

$$R_f = \frac{U_{10}^2}{P_{10}} = \frac{20\,000^2}{650} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_f \approx 615\,\text{k}\Omega}$$

3. $S_{10} = \sqrt{3}\,U_{10}I_{10} = \sqrt{3} \times 20\,000 \times 0{,}10 \approx 3\,464\,\text{VA}$; $Q_{10} = \sqrt{3464^2 - 650^2} \approx 3\,403\,\text{VAR}$.

$$L_m = \frac{U_{10}^2}{\omega\, Q_{10}} = \frac{20\,000^2}{2\pi \times 50 \times 3403} \quad \text{soit} \quad \boxed{L_m \approx 374\,\text{H}}$$

II- Essai en court-circuit

4. $I_{2cc} = 352\,\text{A} = I_{2n}$ ✓. $U_{cc\%} = \dfrac{820}{20\,000} \times 100$ soit $\boxed{U_{cc\%} = 4{,}1}$

5. $P_{fer,cc} \approx P_{10} \times \left(\dfrac{U_{1cc}}{U_{1n}}\right)^2 = 650 \times 0{,}041^2 \approx 1{,}1\,\text{W}$, soit 0,03 % de P_{1cc} : les pertes fer sont bien négligeables, P_{1cc} représente les pertes Joule.

6. $R_S = \dfrac{P_{1cc}}{3\,I_{2cc}^2} = \dfrac{3250}{3 \times 352^2}$ soit $\boxed{R_S \approx 8{,}74\,\text{m}\Omega}$

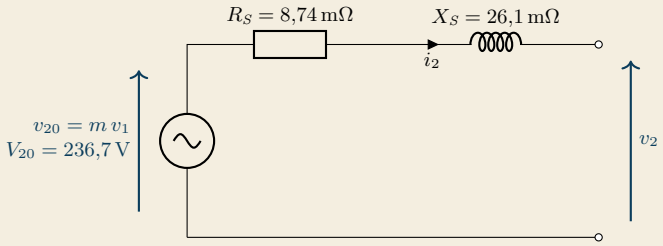
7. $m\,V_{1cc} = \dfrac{m\,U_{1cc}}{\sqrt{3}} = \dfrac{0{,}020\,5 \times 820}{\sqrt{3}} \approx 9{,}71\,\text{V}$: c'est la f.é.m. par phase du modèle pendant l'essai.

$$Z_S = \frac{9{,}71}{352} \quad \text{soit} \quad \boxed{Z_S \approx 27{,}6\,\text{m}\Omega}$$

$$X_S = \sqrt{27{,}6^2 - 8{,}74^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{X_S \approx 26{,}1\,\text{m}\Omega}$$

$L_S = \dfrac{X_S}{\omega} = \dfrac{0{,}026\,1}{314} \approx 83\,\mu\text{H}$.

8. Modèle par phase vu du secondaire ($V_{20} = 236{,}7\,\text{V}$) :



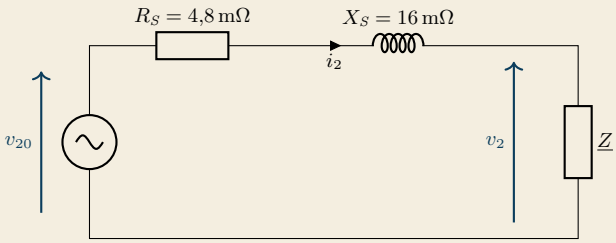
9. $I_k = \dfrac{V_{20}}{Z_S} = \dfrac{236{,}7}{0{,}027\,6}$ soit $\boxed{I_k \approx 8{,}6\,\text{kA}}$ (on retrouve $I_{2n} \times \dfrac{100}{4{,}1} \approx 8{,}6\,\text{kA}$).

Le pouvoir de coupure de 10 kA est supérieur à 8,6 kA : le disjoncteur **convient**, mais avec une marge faible ; un modèle de 16 kA offrirait plus de sécurité si l'on envisage un jour un transformateur plus puissant.

✓ Corrigé de l'exercice 4.4 – Chute de tension dans une boulangerie industrielle

1. $I_{2n} = \dfrac{400\,000}{\sqrt{3} \times 410} \approx 563\,\text{A}$; taux de charge : $\dfrac{520}{563}$ soit $\boxed{\approx 92\,\%}$

2. Une phase : source $v_{20} = m\,v_1$ ($V_{20} = 236{,}7\,\text{V}$), en série avec R_S et L_S, débitant le courant i_2 dans l'impédance de charge $\underline{Z}$ (une phase de la charge équivalente en étoile), sous la tension v_2 :



3. $\sin(\Phi_2) = \sqrt{1 - 0{,}82^2} \approx 0{,}572$.

$$\Delta V_2 = R_S I_2 \cos(\Phi_2) + X_S I_2 \sin(\Phi_2)$$

$$\Delta V_2 = 0{,}004\,8 \times 520 \times 0{,}82 + 0{,}016 \times 520 \times 0{,}572 \approx 2{,}05 + 4{,}76 = 6{,}81\,\text{V}$$

$\Delta U_2 = \sqrt{3} \times 6{,}81$ soit $\boxed{\Delta U_2 \approx 11{,}8\,\text{V}}$ $U_2 = 410 - 11{,}8$ soit $\boxed{U_2 \approx 398\,\text{V}}$

$U_2 < 400\,\text{V}$: la tension descend sous le seuil exigé par les automates des fours, d'où leur mise en défaut à chaque pointe.

4. Le terme dû à la réactance (4,76 V) est plus de deux fois plus grand que le terme résistif (2,05 V). Il est proportionnel à $I_2 \sin(\Phi_2)$, c'est-à-dire au courant réactif : en relevant le facteur de puissance, on diminue à la fois I_2 et $\sin(\Phi_2)$, donc surtout ce terme prépondérant.

5. À puissance active et tension constantes, $I_2\cos(\Phi_2)$ est constant :

$$I'_2 = I_2 \times \frac{\cos(\Phi_2)}{\cos(\Phi'_2)} = 520 \times \frac{0{,}82}{0{,}96} \approx 444\,\text{A}$$

Avec $\sin(\Phi'_2) = 0{,}28$:

$$\Delta V'_2 = 0{,}004\,8 \times 444 \times 0{,}96 + 0{,}016 \times 444 \times 0{,}28 \approx 2{,}05 + 1{,}99 = 4{,}04\,\text{V}$$

$$\Delta U'_2 = \sqrt{3} \times 4{,}04 \approx 7{,}0\,\text{V} \qquad U'_2 = 410 - 7{,}0 \quad \text{soit} \quad \boxed{U'_2 \approx 403\,\text{V}}$$

$U'_2 > 400\,\text{V}$: **le problème est résolu**, avec une marge de 3 V.

6. Avant compensation : $P_2 = \sqrt{3}\times 398 \times 520 \times 0{,}82 \approx 293{,}9\,\text{kW}$ et $P_{joule} = 3 \times 0{,}004\,8 \times 520^2 \approx 3{,}89\,\text{kW}$.

$$\eta = \frac{293{,}9}{293{,}9 + 0{,}93 + 3{,}89} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 98{,}4\,\%}$$

Après : la puissance active est inchangée, $P'_2 = P_2 \approx 293{,}9\,\text{kW}$, et $P'_{joule} = 3 \times 0{,}004\,8 \times 444^2 \approx 2{,}84\,\text{kW}$.

$$\eta' = \frac{293{,}9}{293{,}9 + 0{,}93 + 2{,}84} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta' \approx 98{,}7\,\%}$$

Le rendement s'améliore car les pertes Joule diminuent comme le carré du courant.

7. Rendement maximal pour $3R_S I_2^2 = P_{fer}$:

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_{fer}}{3R_S}} = \sqrt{\frac{930}{3 \times 0{,}004\,8}} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_2 \approx 254\,\text{A}}$$

soit $254/563 \approx 45\,\%$ de la charge nominale, ce qui correspond à la charge moyenne d'une journée de production.

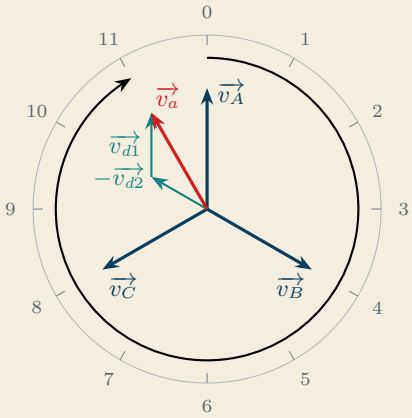
✓ Corrigé de l'exercice 4.5 – Transformateur Yzn11 sur poteau en zone rurale

I- Couplage

1. **Y** : HT en étoile ; **z** : BT en zigzag ; **n** : neutre BT sorti ; **11** : v_a en avance de 30° sur v_A ($\theta = 330°$).

Dans un hameau, les récepteurs sont surtout monophasés et inégalement répartis. Avec un secondaire zigzag, le courant d'une phase BT traverse deux demi-enroulements situés sur deux colonnes différentes : la charge est répartie sur deux colonnes et le déséquilibre des flux est fortement réduit. C'est ce qui permet d'avoir un primaire en étoile, plus économique en HTA.

2. On trace $-\overrightarrow{v_{d2}}$ (sens opposé à $\overrightarrow{v_B}$, donc sur 10 h) puis, à sa suite, $\overrightarrow{v_{d1}}$ (parallèle à $\overrightarrow{v_A}$) :



Le triangle formé par $-\overrightarrow{v_{d2}}$, $\overrightarrow{v_{d1}}$ et $\overrightarrow{v_a}$ est isocèle, avec un angle de 120° entre ses deux côtés égaux.

$\overrightarrow{v_a}$ pointe sur 11 h : $\theta = 330°$, $h = 11$.

3. Primaire en étoile : $V_1 = 20\,000/\sqrt{3} \approx 11\,547$ V. Demi-enroulement :

$$V_d = \frac{N_d}{N_1} V_1 = \frac{40}{3380} \times 11\,547 \quad \text{soit} \quad \boxed{V_d \approx 136{,}7\,\text{V}}$$

4. Les deux vecteurs de longueur V_d ont des directions qui font un angle de 60° (10 h et 12 h) : leur somme a pour longueur $2V_d\cos(30°) = \sqrt{3}\,V_d$.

$$V_{20} = \sqrt{3} \times 136{,}7 \approx 236{,}7\,\text{V} \qquad U_{20} = \sqrt{3}\,V_{20} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{20} \approx 410\,\text{V}}$$

$$m = \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{410}{20\,000} = 0{,}020\,5$$

On retrouve la plaque. Vérification : $m = \sqrt{3}\,N_d/N_1 = \sqrt{3} \times 40/3380 \approx 0{,}020\,5$ ✓.

5. En étoile, un enroulement BT de N_2 spires délivre directement V_{20} :

$$N_2 = N_1 \frac{V_{20}}{V_1} = 3380 \times \frac{236{,}7}{11\,547} \approx 69{,}3 \text{ spires.}$$

En zigzag, une phase comporte $2 \times 40 = 80$ spires, soit $80/69{,}3 \approx 1{,}155$:

$$\boxed{\text{environ } 15{,}5\,\% \text{ de cuivre en plus}}$$

car les deux demi-tensions ne sont pas en phase ($2/\sqrt{3} \approx 1{,}155$). C'est le prix de la bonne tenue aux déséquilibres.

II- Fonctionnement en charge

6. $I_{2n} = \dfrac{100\,000}{\sqrt{3} \times 410} \approx 140{,}8$ A. L'essai en court-circuit à I_{2n} se ferait sous $U_{1cc} = 0{,}04 \times 20\,000 = 800$ V :

$$Z_S = \frac{m\,U_{1cc}}{\sqrt{3}\,I_{2n}} = \frac{0{,}020\,5 \times 800}{\sqrt{3} \times 140{,}8} \quad \text{soit} \quad \boxed{Z_S \approx 67{,}2\,\text{m}\Omega}$$

$$R_S = \frac{1250}{3 \times 140{,}8^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_S \approx 21{,}0\,\text{m}\Omega}$$

$$X_S = \sqrt{67{,}2^2 - 21{,}0^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{X_S \approx 63{,}9\,\text{m}\Omega}$$

7. $\sin(\Phi_2) = \sqrt{1-0{,}9^2} \approx 0{,}436$; $\Delta V_2 = 120 \times (0{,}021 \times 0{,}9 + 0{,}063\,9 \times 0{,}436) \approx 5{,}61\,\text{V}$.

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} \times 5{,}61 \approx 9{,}7\,\text{V} \qquad U_2 = 410 - 9{,}7 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_2 \approx 400\,\text{V}}$$

8. $I_k = \dfrac{V_{20}}{Z_S} = \dfrac{236{,}7}{0{,}067\,2}$ soit $\boxed{I_k \approx 3{,}5\,\text{kA}}$ $= I_{2n} \times \dfrac{100}{4}$.

Pour un petit transformateur, le courant de court-circuit reste modéré ; il sera encore réduit par l'impédance des lignes BT aériennes, ce qu'il faudra vérifier pour s'assurer que les fusibles fondent rapidement en bout de ligne.

✓ Corrigé de l'exercice 4.6 – Second transformateur d'un centre de données

1. Même rapport de transformation (mêmes tensions HT et BT à vide), même indice horaire, même ordre des phases, tensions de court-circuit voisines (et puissances dans un rapport inférieur à 2).

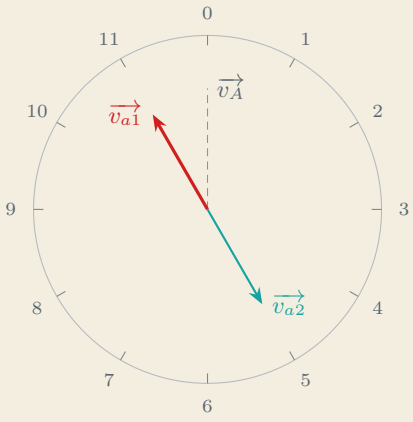
2. L'essai en court-circuit à I_{2n} se fait sous $U_{1cc} = \dfrac{U_{cc\%}}{100} U_{1n}$, d'où

$$Z_S = \frac{m\,U_{1cc}}{\sqrt{3}\,I_{2n}} = \frac{U_{cc\%}}{100} \times \frac{m\,U_{1n}}{\sqrt{3}\,I_{2n}} = \frac{U_{cc\%}}{100} \times \frac{V_{20}}{I_{2n}}$$

Avec $V_{20} = 236{,}7\,\text{V}$; $I_{2n} = 1\,408\,\text{A}$ pour $1\,000\,\text{kVA}$ et $1\,127\,\text{A}$ pour $800\,\text{kVA}$:

	T1	(a)	(b)	(c)
Z_S (mΩ)	10,09	12,61	10,09	7,56

3. T1 est un Dyn11 : $\overrightarrow{v_{a1}}$ pointe sur 11 h ; T2 est un Dyn5 : $\overrightarrow{v_{a2}}$ pointe sur 5 h. Les deux vecteurs sont **opposés** :



Tension à vide entre a_1 et a_2 : $|\underline{v_{a1}} - \underline{v_{a2}}| = 2\,V_{20} \approx 473\,\text{V}$.

$$I_{circ} = \frac{2\,V_{20}}{Z_{S1} + Z_{S2}} = \frac{473}{2 \times 0{,}010\,09} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{circ} \approx 23{,}5\,\text{kA}}$$

soit près de 17 fois le courant nominal : c'est un **court-circuit**, les protections déclencheraient immédiatement. L'offre (b) est **à exclure**, même si elle est disponible tout de suite.

4. Les puissances se partagent en raison inverse des impédances :

$$S_1 = 1800 \times \frac{Z_{S2}}{Z_{S1}+Z_{S2}} = 1800 \times \frac{7{,}56}{10{,}09+7{,}56} \approx 771\,\text{kVA}$$

$$S_2 = 1800 - 771 \approx 1\,029\,\text{kVA}$$

T2 est en **surcharge** (103 %) alors que T1 n'est chargé qu'à 77 %. T2 atteint 1 000 kVA lorsque la charge totale vaut :

$$S_{max} = 1000 \times \frac{10{,}09+7{,}56}{10{,}09} \quad \text{soit} \quad \boxed{S_{max} \approx 1\,750\,\text{kVA} < 1\,800\,\text{kVA}}$$

5. $S_1 = 1800 \times \dfrac{12{,}61}{10{,}09+12{,}61} \approx 1\,000\,\text{kVA}$ et $S_2 \approx 800\,\text{kVA}$: avec des tensions de court-circuit égales, **chaque transformateur prend une charge proportionnelle à sa puissance nominale**. Les deux sont exactement à pleine charge pour 1 800 kVA.

6. $\Delta V = \dfrac{420-410}{\sqrt{3}} \approx 5{,}77\,\text{V}$ par phase :

$$I_{circ} = \frac{5{,}77}{0{,}010\,09+0{,}012\,61} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{circ} \approx 254\,\text{A}}$$

soit 18 % de I_{2n} de T1 (1 408 A) et 23 % de celui de T2 (1 127 A). Ce courant circule même à vide : il crée des pertes Joule inutiles et réduit d'autant la puissance disponible pour les serveurs. Il faut placer les deux commutateurs de prises sur la même position.

7. **Recommandation :** retenir l'offre **(a)** (800 kVA, Dyn11, $U_{cc\%} = 6$), seule compatible avec T1 : même indice horaire et même tension de court-circuit, donc une répartition proportionnelle aux puissances. Exclure l'offre (b) (indice 5 : court-circuit) et l'offre (c) (tension de court-circuit trop faible : surcharge de T2 au-delà de 1 750 kVA). Vérifier à la mise en service la position des prises et l'ordre des phases. Attention : à 1 800 kVA, l'ensemble est à pleine charge et ne laisse aucune réserve ; si la croissance de la charge se poursuit, il faudra prévoir un troisième transformateur.

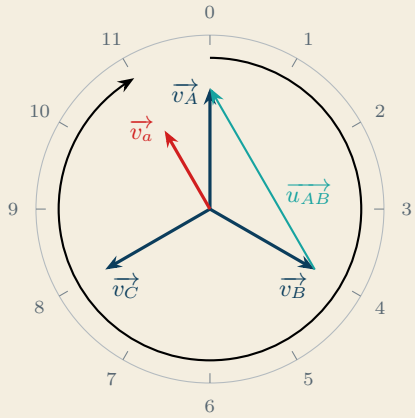
Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 4.A – Poste de transformation d'une station d'épuration

Partie A – Couplage du transformateur

A.1. HT en triangle (D), BT en étoile (y) avec neutre sorti (n), indice horaire 11 : v_a en avance de 30° sur v_A. Un enroulement HT reçoit la tension composée 20 kV ; un enroulement BT délivre à vide la tension simple $V_{20} = 410/\sqrt{3} \approx 236{,}7\,\text{V}$.

A.2. L'enroulement HT de la colonne 1 reçoit $u_{AB} = v_A - v_B$: $\overrightarrow{u_{AB}}$ va de l'extrémité de $\overrightarrow{v_B}$ à celle de $\overrightarrow{v_A}$ et pointe sur 11 h. L'enroulement BT de la même colonne, branché dans le même sens, délivre v_a en phase avec u_{AB} :



$\overrightarrow{v_a}$ pointe sur 11 h : $\theta = 330°$, $h = 11$.

A.3. $m = 410/20\,000$ soit $\boxed{m = 0{,}020\,5}$; rapport par colonne :

$$m_C = \frac{V_{20}}{U_1} = \frac{236{,}7}{20\,000} \quad \text{soit} \quad \boxed{m_C \approx 0{,}011\,84} = \frac{m}{\sqrt{3}}$$

Partie B – Modèle équivalent par phase

B.1. $I_{1n} = \dfrac{800\,000}{\sqrt{3} \times 20\,000}$ soit $\boxed{I_{1n} \approx 23{,}1\,\text{A}}$;

$$I_{2n} = \frac{800\,000}{\sqrt{3} \times 410} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{2n} \approx 1\,127\,\text{A}}$$

B.2. P_{10} représente les pertes fer (à vide, les pertes Joule sont négligeables) :

$$R_f = \frac{U_{10}^2}{P_{10}} = \frac{20\,000^2}{1100} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_f \approx 364\,\text{k}\Omega}$$

B.3. $R_S = \dfrac{P_{1cc}}{3\,I_{2cc}^2} = \dfrac{8400}{3 \times 1127^2}$ soit $\boxed{R_S \approx 2{,}21\,\text{m}\Omega}$

B.4. $m\,V_{1cc} = \dfrac{0{,}020\,5 \times 1200}{\sqrt{3}} \approx 14{,}2\,\text{V}$; $Z_S = \dfrac{14{,}2}{1127}$ soit $\boxed{Z_S \approx 12{,}6\,\text{m}\Omega}$

$$X_S = \sqrt{12{,}6^2 - 2{,}21^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{X_S \approx 12{,}4\,\text{m}\Omega}$$

Modèle vu du secondaire : source v_{20} ($V_{20} = 236{,}7\,\text{V}$) en série avec $R_S = 2{,}21\,\text{m}\Omega$ et $X_S = 12{,}4\,\text{m}\Omega$, débitant i_2 dans une phase de la charge (schéma identique à celui du cours).

Partie C – Bilan de puissance et chute de tension

C.1. $Q = P\tan(\Phi)$ pour chaque groupe de récepteurs :

Récepteurs	P (kW)	Q (kVAR)
Pompes ($\cos(\Phi) = 0{,}84$)	480	310,0
Surpresseurs ($\cos(\Phi) = 0{,}95$)	150	49,3
Éclairage, bâtiments	40	0
Installation	**670**	359,4

$$S = \sqrt{670^2 + 359{,}4^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{S \approx 760\,\text{kVA}}$$

$$\cos(\Phi_2) = \frac{670}{760} \quad \text{soit} \quad \boxed{\cos(\Phi_2) \approx 0{,}881}$$

C.2. Taux de charge : $\dfrac{760}{800} \approx 95\,\%$. $\quad I_2 = \dfrac{S}{\sqrt{3}\,U_2} = \dfrac{760\,300}{\sqrt{3} \times 400}$ soit $\boxed{I_2 \approx 1\,097\,\text{A}}$

C.3. $\sin(\Phi_2) = \dfrac{Q}{S} \approx 0{,}473$:

$\Delta U_2 = \sqrt{3} \times 1097 \times (0{,}002\,21 \times 0{,}881 + 0{,}012\,4 \times 0{,}473)$ soit $\boxed{\Delta U_2 \approx 14{,}8\,\text{V}}$

$U_2 = 410 - 14{,}8 \approx 395\,\text{V} < 400\,\text{V}$: **le cahier des charges n'est pas respecté** à pleine charge.

Partie D – Compensation de l'énergie réactive

D.1. Puissance réactive visée : $Q' = P\tan(\Phi') = 670 \times \tan(\arccos(0{,}96)) = 670 \times 0{,}291\,7 \approx 195{,}4\,\text{kVAR}$.

$$Q_c = Q' - Q = 195{,}4 - 359{,}4 \approx -164\,\text{kVAR}$$

En convention récepteur, la batterie absorbe $Q_c \approx -164\,\text{kVAR}$: elle **fournit** donc $\boxed{|Q_c| \approx 164\,\text{kVAR}}$ à l'installation.

D.2. $S' = \dfrac{P}{\cos(\Phi')} = \dfrac{670}{0{,}96} \approx 698\,\text{kVA}\,;\quad I_2' = \dfrac{697\,900}{\sqrt{3} \times 400}$ soit $\boxed{I_2' \approx 1\,007\,\text{A}}$

$\Delta U_2' = \sqrt{3} \times 1007 \times (0{,}002\,21 \times 0{,}96 + 0{,}012\,4 \times 0{,}28) \approx 9{,}8\,\text{V}$ $\quad \boxed{U_2' \approx 400{,}2\,\text{V}}$

Le cahier des charges est respecté, de justesse. La compensation évite le remplacement du transformateur, qui n'est plus chargé qu'à 87 %.

Partie E – Rendement et pertes annuelles

E.1. $P_{joule} = 3R_S I_2'^2 = 3 \times 0{,}002\,21 \times 1007^2$ soit $\boxed{P_{joule} \approx 6{,}72\,\text{kW}}$

$$\eta = \frac{670}{670 + 1{,}1 + 6{,}72} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 98{,}8\,\%}$$

E.2. Pertes fer pendant 8 760 h : $1{,}1 \times 8760 \approx 9\,636\,\text{kW}\cdot\text{h}$; pertes Joule pendant 5 000 h : $6{,}72 \times 5000 = 33\,600\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

$$E_{perdue} \approx 43\,200\,\text{kW}\cdot\text{h par an}$$

$$\text{coût} \approx 43\,200 \times 0{,}15 \quad \text{soit} \quad \boxed{\approx 6\,480\ \text{€ par an}}$$

Partie F – Court-circuit

F.1. $I_k = \dfrac{V_{20}}{Z_S} = \dfrac{236{,}7}{0{,}012\,6}$ soit $\boxed{I_k \approx 18{,}8\,\text{kA}}$ (ou $I_{2n} \times 100/6$).

F.2. Le pouvoir de coupure doit être supérieur au courant de court-circuit présumé : 16 kA est insuffisant ; on choisit $\boxed{25\,\text{kA}}$, la valeur normalisée immédiatement supérieure.

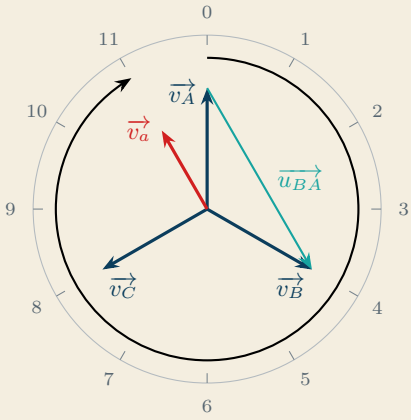
✓ Corrigé du sujet BTS 4.B – Raccordement d'une centrale photovoltaïque

Partie A – Couplage et indice horaire

A.1. L'énergie va des onduleurs vers le réseau : le **primaire** est le côté BT (400 V), le secondaire le côté HT. Mais la désignation ne dépend pas du sens de transfert : la majuscule désigne toujours le côté **haute tension** (triangle), la minuscule le côté basse tension (étoile). Le neutre BT étant sorti, c'est donc bien un Dyn11.

A.2. L'enroulement HT de la colonne 1 est branché entre B (côté pointé) et A. Sa tension, orientée vers la borne pointée, est $u = v_B - v_A = u_{BA}$: $\overrightarrow{u_{BA}}$ va de l'extrémité de $\overrightarrow{v_A}$ à celle de $\overrightarrow{v_B}$, il pointe sur 5 h.

A.3. L'enroulement BT a son point côté neutre : sa tension « point moins autre extrémité » vaut $-v_a$, en phase avec u_{BA}. Donc v_a est en phase avec $-u_{BA} = u_{AB}$: $\overrightarrow{v_a}$ pointe sur 11 h, $\theta = 330°$ et $h = 11$. Les deux inversions (enroulement HT et enroulement BT) se compensent : le câblage réalise bien un $\boxed{\text{Dyn11}}$



$\overrightarrow{v_a}$ est opposé à $\overrightarrow{u_{BA}}$: $\theta = 330°$, $h = 11$.

Partie B – Rapports et courants

B.1. Primaire côté BT : $m = \dfrac{U_{20}}{U_1} = \dfrac{20\,000}{400}$ soit $\boxed{m = 50}$ (transformateur élévateur).

B.2. Enroulement BT (étoile) : $V_1 = 400/\sqrt{3} \approx 230{,}9\,\text{V}$; enroulement HT (triangle) : $U_{20} = 20\,\text{kV}$.

$$m_C = \frac{20\,000}{230{,}9} \quad \text{soit} \quad \boxed{m_C \approx 86{,}6} \qquad \frac{m_C}{\sqrt{3}} = \frac{86{,}6}{\sqrt{3}} = 50 = m$$

Vu du primaire, le transformateur est un « étoile-triangle » : $m = m_C/\sqrt{3}$, comme pour un Yd.

B.3. $I_{BT} = \dfrac{1\,250\,000}{\sqrt{3} \times 400}$ soit $\boxed{I_{BT} \approx 1\,804\,\text{A}}$;

$$I_{HT} = \frac{1\,250\,000}{\sqrt{3} \times 20\,000} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{HT} \approx 36{,}1\,\text{A}}$$

Partie C – Rendement à pleine production

C.1. $P_{joule} = 3RI^2$ et, à tension constante, $I = S/(\sqrt{3}\,U)$ est proportionnel à S. Les pertes Joule sont donc proportionnelles à S^2 ; elles valent P_{cc} pour $S = S_n$, d'où $P_{joule} = P_{cc}\,(S/S_n)^2$.

C.2. $S/S_n = 1100/1250 = 0{,}88$ et $(S/S_n)^2 \approx 0{,}774$. Le rendement s'écrit

$$\eta = \frac{P_1 - \text{pertes}}{P_1} \quad \text{avec} \quad P_1 = 1\,100\,\text{kW}$$

	P_{joule} (kW)	pertes totales (kW)	η
Offre 1	$13{,}9 \times 0{,}774 \approx 10{,}76$	12,46	98,87 %
Offre 2	$11{,}0 \times 0{,}774 \approx 8{,}52$	9,87	99,10 %

Partie D – Bilan d'une journée moyenne

D.1. Avec $\cos(\Phi) = 1$, $P = S$:

$$E = 1100 \times 3 + 700 \times 4 + 300 \times 4 \quad \text{soit} \quad \boxed{E = 7\,300\,\text{kW} \cdot \text{h}}$$

D.2. Pertes à vide pendant 24 h ; pertes Joule : $P_{cc} \sum (S/S_n)^2 \, \Delta t$ avec $\sum (S/S_n)^2 \, \Delta t = 0{,}88^2 \times 3 + 0{,}56^2 \times 4 + 0{,}24^2 \times 4 \approx 3{,}808$ h.

	à vide (kW · h)	Joule (kW · h)	total (kW · h)
Offre 1	$1{,}70 \times 24 = 40{,}8$	$13{,}9 \times 3{,}808 \approx 52{,}9$	93,7
Offre 2	$1{,}35 \times 24 = 32{,}4$	$11{,}0 \times 3{,}808 \approx 41{,}9$	74,3

D.3. $\eta_j = \dfrac{7300 - 93{,}7}{7300} \approx 98{,}72\,\%$ (offre 1) ; $\eta_j = \dfrac{7300 - 74{,}3}{7300} \approx 98{,}98\,\%$ (offre 2).
Il est plus faible qu'à pleine production car les pertes à vide courent 24 h sur 24 alors que la production ne dure que 11 h : la nuit, le transformateur consomme sans rien transmettre. Les pertes à vide représentent plus de 40 % des pertes de la journée.

Partie E – Choix du transformateur

E.1. Économie : $93{,}7 - 74{,}3 \approx 19{,}4$ kW · h par jour, soit $19{,}4 \times 365 \approx 7\,100$ kW · h par an, d'où :

$$\boxed{\text{gain} \approx 710 \text{ € par an}}$$

E.2. Surcoût : $25\,500 - 21\,000 = 4\,500$ €. Temps de retour : $4500/710 \approx 6{,}3$ ans. Sur 20 ans : $20 \times 710 - 4500 \approx 9\,700$ € de gain net.

Recommandation : choisir l'**offre 2** (pertes réduites). Son surcoût est remboursé en un peu plus de 6 ans, pour une durée d'exploitation de 20 ans ; elle injecte chaque année environ 7 MW · h de plus sur le réseau. Les pertes à vide étant subies en permanence, elles sont un critère de choix essentiel pour un transformateur de centrale solaire.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ lire une plaque, calculer m et m_C ; ex. 4.1, sujet A
- ☐ déterminer un indice horaire par Fresnel ; ex. 4.2, sujet B
- ☐ exploiter les essais, la chute de tension, le rendement ; ex. 4.3, 4.4
- ☐ vérifier une mise en parallèle. ex. 4.6

Notes

CHAPITRE

5

Qualité de l'énergie électrique

Harmoniques, puissances en régime déformé et perturbations du réseau

Dans ce chapitre

- Série de Fourier, spectre et harmoniques
- Valeur efficace et taux de distorsion harmonique
- Charges non linéaires et pollution du réseau
- Puissances P, Q, S, D et facteur de puissance
- Effets des harmoniques et filtrage
- Creux de tension, flicker et normes

Objectifs

- ✓ Lire un spectre et calculer une valeur efficace et un THD
- ✓ Faire le bilan des puissances d'une charge non linéaire
- ✓ Expliquer la surcharge du neutre et le risque de résonance
- ✓ Choisir et dimensionner une solution de filtrage

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 5

Cours

Chapitre 5

Le réseau fournit une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz. Mais une part croissante des récepteurs (variateurs de vitesse, chargeurs, alimentations d'ordinateurs, éclairage LED) absorbe un courant qui n'est **pas** sinusoïdal. Ces courants « déformés » échauffent les câbles et les transformateurs, surchargent le neutre, font vieillir les condensateurs et finissent par déformer la tension elle-même, au détriment de tous les utilisateurs. Ce chapitre donne les outils pour décrire ces signaux, calculer les puissances mises en jeu et choisir les remèdes.

5.1 Signaux périodiques et série de Fourier

Décomposition en série de Fourier

D

Théorème de Fourier Tout signal périodique $s(t)$ de fréquence f_0 (période $T_0 = 1/f_0$) peut s'écrire comme la somme :

- d'un terme constant, égal à sa **valeur moyenne** $\langle s \rangle$;
- d'une sinusoïde de même fréquence f_0 que le signal : le **fondamental** (rang 1) ;
- de sinusoïdes de fréquences multiples de f_0 : les **harmoniques** (rang $n \geq 2$, fréquence $f_n = n\,f_0$).

★

À retenir · Série de Fourier

$$s(t) = \langle s \rangle + \sum_{n \geq 1} S_{n\,max} \sin(n\,\omega_0 t + \Phi_n) \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$f_n = n \times f_0 \qquad S_{n\,eff} = \frac{S_{n\,max}}{\sqrt{2}}$$

$S_{n\,max}$: amplitude de l'harmonique de rang n ; Φ_n : sa phase à l'origine.

Sur le réseau à 50 Hz, l'harmonique de rang 3 a pour fréquence 150 Hz, celui de rang 5 250 Hz, celui de rang 7 350 Hz, etc. Deux propriétés de symétrie simplifient beaucoup les calculs :

- un signal **alternatif** (même aire au-dessus et au-dessous de l'axe) a une valeur moyenne nulle ;
- un signal dont l'alternance négative reproduit l'alternance positive, retournée (cas des courants absorbés sur le réseau), ne contient **que des harmoniques de rangs impairs** (3, 5, 7…). C'est pourquoi les rangs pairs sont presque absents des relevés industriels.

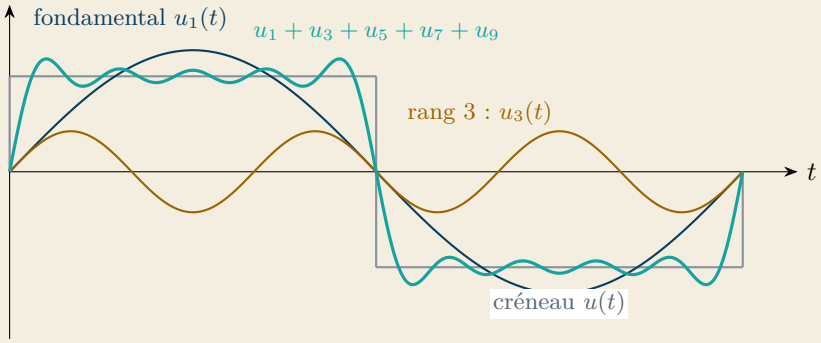
Ex

Exemple : le signal créneau Un créneau alternatif d'amplitude E (il vaut $+E$ pendant une demi-période, $-E$ pendant l'autre) a pour décomposition :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \dots\right)$$

Les harmoniques sont de rangs impairs et d'amplitude $4E/(n\pi)$: leur amplitude décroît comme $1/n$. Pour $E = 100\,\text{V}$: $U_{1\,max} \approx 127\,\text{V}$, $U_{3\,max} \approx 42{,}4\,\text{V}$, $U_{5\,max} \approx 25{,}5\,\text{V}$, $U_{7\,max} \approx 18{,}2\,\text{V}$.

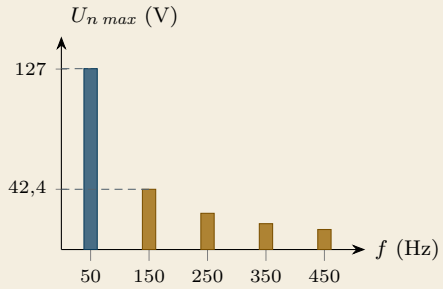
La figure montre qu'en ajoutant au fondamental l'harmonique de rang 3, puis les suivants, on se rapproche du créneau : le fondamental donne l'allure générale, les harmoniques « dessinent » les fronts raides.



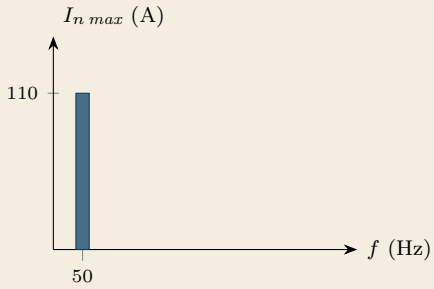
Spectre en amplitude

D

Définition Le **spectre en amplitude** d'un signal périodique représente, en fonction de la fréquence (ou du rang n), l'amplitude $S_{n\,max}$ (ou la valeur efficace $S_{n\,eff}$) de chacune de ses composantes. C'est un diagramme en **raies** : une raie au rang 0 pour la valeur moyenne, une raie à f_0 pour le fondamental, une raie à $n\,f_0$ pour chaque harmonique.



Créneau $E = 100\,\text{V}$, $f_0 = 50\,\text{Hz}$



Courant sinusoïdal : une seule raie

Un signal **sinusoïdal** n'a qu'une raie. Plus le spectre contient de raies importantes, plus le signal est **déformé**. Les analyseurs de réseau affichent souvent les raies en **valeur**

efficace, ou en **pourcentage du fondamental** : il faut toujours lire l'échelle avant d'exploiter un spectre.

✗ **Piège classique** Confondre amplitude et valeur efficace : sur un spectre gradué en $S_{n\,max}$, il faut diviser chaque raie par $\sqrt{2}$ avant d'appliquer les formules de valeur efficace et de taux de distorsion. Une raie en % du fondamental se convertit en multipliant par $S_{1\,eff}$.

5.2 Valeur efficace et taux de distorsion

Valeur efficace d'un signal non sinusoïdal

La valeur efficace d'un courant est la valeur du courant continu qui produirait le même échauffement dans une résistance. Chaque composante de Fourier produit son propre effet Joule, et ces effets s'additionnent : c'est la **relation de Parseval**.

★ **À retenir · Relation de Parseval**

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s \rangle^2 + S_{1\,eff}^2 + S_{2\,eff}^2 + S_{3\,eff}^2 + \dots}$$

Signaux alternatifs symétriques usuels :

créneau $\pm S_{max}$: $S_{eff} = S_{max}$ triangle : $S_{eff} = \dfrac{S_{max}}{\sqrt{3}}$

La valeur efficace dépend de **toutes** les composantes : un courant chargé d'harmoniques a une valeur efficace nettement supérieure à celle de son seul fondamental. Elle se mesure avec un appareil **TRMS** (*True Root Mean Square*, valeur efficace vraie).

✗ **Piège classique** Un multimètre ou une pince d'entrée de gamme (non TRMS) mesure la valeur moyenne du signal redressé et la multiplie par 1,11 : ce calcul n'est juste que pour une sinusoïde. Sur un courant en impulsions, l'erreur dépasse souvent 30 %, et toujours dans le sens d'une sous-estimation dangereuse pour le dimensionnement.

Taux de distorsion harmonique

D **Définition** Le **taux de distorsion harmonique** (THD, noté aussi T_{DH}) mesure l'écart entre un signal et la sinusoïde de son fondamental : c'est le rapport entre la valeur efficace de l'ensemble des harmoniques et celle du fondamental. Il est nul pour une sinusoïde.

★ **À retenir · Taux de distorsion harmonique (signal sans valeur moyenne)**

$$\mathrm{THD}_i = \frac{\sqrt{I_{2\,eff}^2 + I_{3\,eff}^2 + I_{4\,eff}^2 + \dots}}{I_{1\,eff}} \times 100 = \frac{\sqrt{I_{eff}^2 - I_{1\,eff}^2}}{I_{1\,eff}} \times 100$$

Même définition pour la tension (THD_u). La seconde forme découle de Parseval.

Ex **Exemple : courant d'un tableau bureautique** Un analyseur relève le spectre du courant d'un départ alimentant des ordinateurs sous 230 V : $I_{1\,eff} = 12\,\mathrm{A}$, $I_{3\,eff} = 7{,}2\,\mathrm{A}$, $I_{5\,eff} = 4{,}8\,\mathrm{A}$, $I_{7\,eff} = 2{,}4\,\mathrm{A}$ (raies suivantes négligeables).

$$I_{eff} = \sqrt{12^2 + 7{,}2^2 + 4{,}8^2 + 2{,}4^2} \approx 15{,}0\,\mathrm{A}$$

$$\mathrm{THD}_i = \frac{\sqrt{7{,}2^2 + 4{,}8^2 + 2{,}4^2}}{12} \times 100 \approx 75\,\%$$

Le courant efficace est supérieur de 25 % à celui du fondamental : les câbles et la protection doivent être choisis pour 15 A, pas pour 12 A.

Ordres de grandeur. Créneau : THD ≈ 48 % ; triangle : THD ≈ 12 % ; pont redresseur triphasé à courant lissé : $\mathrm{THD}_i \approx 31\,\%$; redresseur monophasé avec condensateur de filtrage (ordinateurs, LED) : THDi de 70 % à 130 %. Côté tension, l'EN 50160 fixe pour le réseau public $\mathrm{THD}_u \leq 8\,\%$, évalué sur 95 % des moyennes sur 10 min d'une semaine ; une installation saine reste sous 5 %.

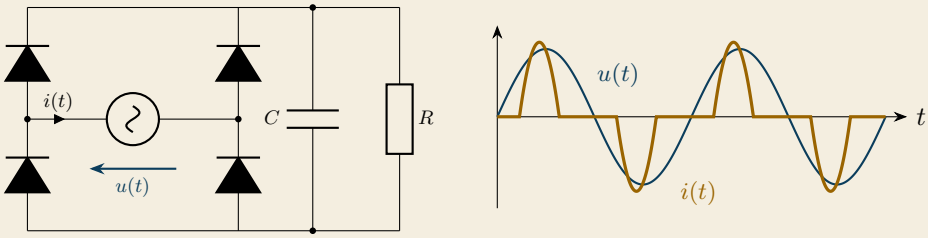
5.3 Charges non linéaires

Charges linéaires et non linéaires

D **Définition** Une charge est **linéaire** si, alimentée par une tension sinusoïdale, elle absorbe un courant sinusoïdal (de même fréquence, éventuellement déphasé) : résistances, bobines, condensateurs, moteurs alimentés directement. Une charge **non linéaire** absorbe un courant non sinusoïdal sous une tension sinusoïdale : elle **génère des courants harmoniques**.

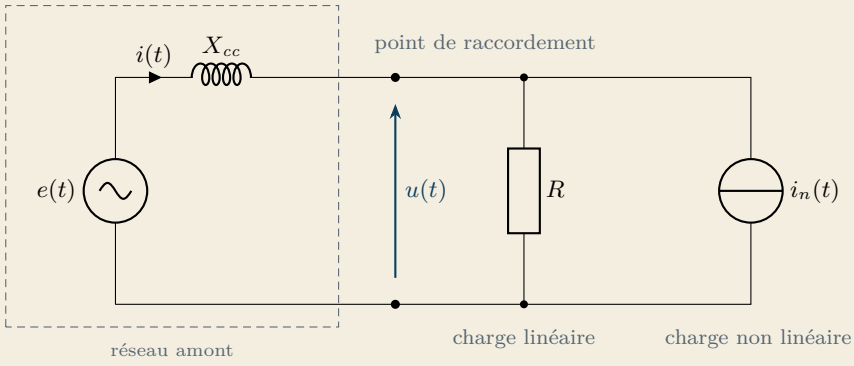
Les charges non linéaires contiennent presque toujours de l'électronique de puissance (diodes, thyristors, transistors) ou un arc électrique : variateurs de vitesse, redresseurs et chargeurs, alimentations à découpage (ordinateurs, téléviseurs, LED), alimentations sans interruption (ASI), fours à arc et à induction, postes de soudure, lampes à décharge.

Le cas typique est le **redresseur à condensateur** placé en entrée de presque tous les appareils électroniques (voir § 8.4) : le condensateur ne se recharge qu'au voisinage du maximum de la tension. Le courant est donc formé de brèves impulsions, très riches en harmoniques de rangs 3, 5, 7…



Comment les harmoniques de courant déforment la tension

Le réseau n'est pas une source parfaite : vu du point de raccordement, il se comporte comme une f.é.m. sinusoïdale $e(t)$ en série avec une réactance X_{cc} (transformateur et lignes), fixée par la **puissance de court-circuit** S_{cc}. Une charge non linéaire se modélise par une **source de courants harmoniques** $i_n(t)$.



Chaque courant harmonique crée, dans la réactance du réseau, une chute de tension harmonique : la tension au point de raccordement se déforme. Plus le réseau est « faible » (S_{cc} petite, bout de ligne rurale, alimentation par groupe électrogène), plus la tension est déformée, et cette tension déformée est imposée à **tous** les récepteurs voisins.

Estimer la tension harmonique – hors programme

$$X_{cc} = \frac{U^2}{S_{cc}} \qquad U_{n\,eff} = n\,X_{cc}\,I_{n\,eff}$$

U : tension composée ; $U_{n\,eff}$: tension harmonique (simple) de rang n, créée par le courant $I_{n\,eff}$ dans la réactance du réseau, qui vaut $n\,X_{cc}$ à la fréquence $n\,f_0$.
Un atelier est alimenté sous $U = 400\,\text{V}$ par un réseau de puissance de court-circuit $S_{cc} = 5\,\text{MVA}$:

$$X_{cc} = \frac{400^2}{5 \times 10^6} = 32\,\text{m}\Omega$$

Un variateur absorbe un courant harmonique de rang 5 de 40 A : $U_{5\,eff} = 5 \times 0{,}032 \times 40 = 6{,}4\,\text{V}$, soit 2,8 % de la tension simple de 231 V.

Les courants harmoniques de toutes les charges non linéaires d'une installation (variateurs, alimentations électroniques, éclairage LED) s'ajoutent : c'est leur ensemble qui fixe la déformation de la tension mesurée en tête de l'installation.

5.4 Puissances en régime non sinusoïdal

Puissances active et réactive

Le produit de deux sinusoïdes de fréquences **différentes** a une valeur moyenne nulle. Seuls les termes de **même fréquence** de la tension et du courant produisent donc de la puissance active (et réactive). Deux cas se présentent selon le signal qui est sinusoïdal.

À retenir · Puissances P et Q en régime déformé **Cas 1 : courant sinusoïdal, tension déformée**

$$P = U_{1\,eff}\, I_{eff} \cos(\Phi_1) \qquad Q = U_{1\,eff}\, I_{eff} \sin(\Phi_1)$$

Cas 2 (réseau) : tension sinusoïdale, courant déformé

$$P = U_{eff}\, I_{1\,eff} \cos(\Phi_1) \qquad Q = U_{eff}\, I_{1\,eff} \sin(\Phi_1)$$

Φ_1 : déphasage entre le signal sinusoïdal et le **fondamental** du signal déformé (toujours tension par rapport au courant).

Le cas 2 est celui des installations alimentées par le réseau : la tension reste quasi sinusoïdale et ce sont les charges non linéaires qui absorbent un courant déformé. Le cas 1 se rencontre en sortie d'onduleur (tension en créneaux, courant filtré par une charge inductive).

Puissance apparente, puissance déformante, facteur de puissance

La puissance apparente se calcule toujours avec les valeurs efficaces **vraies**. Elle n'est plus égale à $\sqrt{P^2+Q^2}$ (voir § 1.7) : la différence est la **puissance déformante** D, due aux harmoniques.

À retenir · Puissances apparente et déformante, facteurs

$$S = U_{eff}\, I_{eff}\ \text{(VA)} \qquad S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \qquad D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}\ \text{(VAD)}$$

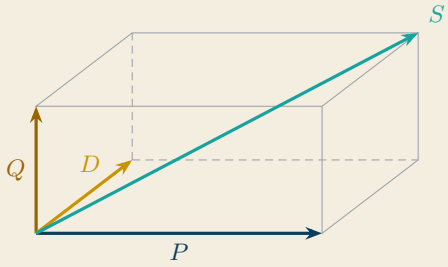
$$f_p = \frac{P}{S} \qquad f_d = \cos(\Phi_1) \qquad f_p = \frac{\cos(\Phi_1)}{\sqrt{1+\text{THD}_i^2}}\ \text{(cas 2)}$$

f_p : facteur de puissance ; f_d : facteur de déplacement (DPF des analyseurs) ; THD_i en valeur décimale. En triphasé équilibré : $P = \sqrt{3}\,U\, I_{1\,eff}\cos(\Phi_1)$, $Q = \sqrt{3}\,U\, I_{1\,eff}\sin(\Phi_1)$, $S = \sqrt{3}\,U\, I_{eff}$ (U : tension composée).

Démonstration (cas 2). $S^2 = U_{eff}^2 I_{eff}^2 = U_{eff}^2\left(I_{1\,eff}^2 + I_{2\,eff}^2 + \dots\right)$. Or $U_{eff}^2 I_{1\,eff}^2 = P^2+Q^2$, d'où $D = U_{eff}\sqrt{I_{2\,eff}^2 + I_{3\,eff}^2 + \dots} = U_{eff}\, I_{1\,eff}\,\text{THD}_i$. Enfin :

$$f_p = \frac{U_{eff} I_{1\,eff}\cos(\Phi_1)}{U_{eff} I_{1\,eff}\sqrt{1+\text{THD}_i^2}}$$

Les trois puissances P, Q et D sont « orthogonales » : on peut les représenter sur les trois arêtes d'un pavé, dont la grande diagonale est S. Le facteur de puissance est dégradé par deux causes indépendantes : le **déphasage** du fondamental (puissance Q) et la **déformation** du courant (puissance D).



Ex

Exemple : bilan de puissances du départ bureautique Reprenons le courant précédent ($I_{1\,eff} = 12\,\text{A}$, $I_{eff} \approx 15{,}0\,\text{A}$, $\text{THD}_i \approx 0{,}748$), sous $U_{eff} = 230\,\text{V}$ sinusoïdale, avec $\Phi_1 = 25°$.

$$P = 230 \times 12 \times \cos(25°) \approx 2\,501\,\text{W} \qquad Q = 230 \times 12 \times \sin(25°) \approx 1\,166\,\text{VAR}$$

$$S = 230 \times 14{,}99 \approx 3\,447\,\text{VA} \qquad D = \sqrt{3447^2 - 2501^2 - 1166^2} \approx 2\,065\,\text{VAD}$$

$$f_p = \frac{2501}{3447} \approx 0{,}73 \quad \text{alors que} \quad f_d = \cos(25°) \approx 0{,}91$$

Vérification : $f_p = 0{,}906/\sqrt{1 + 0{,}748^2} \approx 0{,}73$ ✓. Ici, la déformation pénalise davantage le facteur de puissance que le déphasage.

✗

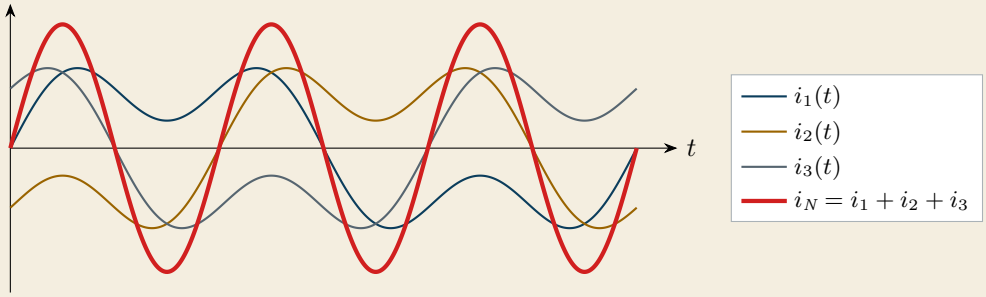
Piège classique En régime déformé, $f_p \neq \cos(\Phi_1)$ et $S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$. Une batterie de condensateurs (voir § 2.7) annule au mieux Q : elle ne fait rien contre D. Même avec $Q = 0$, le facteur de puissance ne peut pas dépasser $1/\sqrt{1 + \text{THD}_i^2}$: pour l'améliorer davantage, il faut **filtrer** les harmoniques.

En ligne : construction d'un signal par ajout d'harmoniques avec son spectre, calculateur des puissances P, Q, S, D et du facteur de puissance.

5.5 Effets des harmoniques

Surcharge du conducteur neutre

Dans un réseau triphasé équilibré, les fondamentaux des trois courants de phase sont décalés de 120° (soit $T/3$) : leur somme est nulle et le neutre n'est parcouru par aucun courant. Pour l'harmonique de rang 3, un décalage de $T/3$ correspond à une période entière de cet harmonique ($3 \times 120° = 360°$) : les trois harmoniques de rang 3 sont **en phase** et s'**additionnent** dans le neutre.



★ **À retenir · Courant dans le neutre**

$$I_N = 3\,I_{3\,eff}$$

Les harmoniques de rang 3 des trois phases s'additionnent dans le neutre ; les rangs 5, 7, 11… s'y compensent, comme les fondamentaux.

Il en va de même pour tous les rangs multiples de 3 (9, 15…) : s'ils ne sont pas négligeables, le courant de neutre vaut

$$I_N = 3\sqrt{I_{3\,eff}^2 + I_{9\,eff}^2 + \dots}$$

Ex **Exemple** Sur un départ triphasé alimentant des postes informatiques, chaque phase est parcourue par un fondamental de 30 A et un harmonique de rang 3 de 18 A ($\mathrm{THD}_i = 60\,\%$). Courant de phase : $\sqrt{30^2 + 18^2} \approx 35$ A. Courant de neutre : $3 \times 18 = 54$ A, soit 1,5 fois le courant de phase ! Un neutre de section réduite (autorisé pour des charges linéaires) serait dangereusement surchargé.

Remèdes : neutre de section au moins égale (souvent double) à celle des phases, déclassement des câbles, protection du neutre ; transformateur de couplage **Dy** ou **Yz** en amont (voir § 4.2), dont l'enroulement triangle (ou zigzag) piège les harmoniques de rang 3 ; filtre de rang 3 sur le neutre.

Échauffements et vieillissement

- **Câbles** : les pertes Joule $R\,I_{eff}^2$ augmentent avec le courant efficace vrai ; aux fréquences élevées, l'effet de peau augmente en plus la résistance apparente des gros conducteurs.
- **Transformateurs** : les pertes par courants de Foucault dans les enroulements croissent à peu près comme n^2 ; un transformateur alimentant des charges non linéaires doit être **déclassé** (ou choisi avec un « facteur K »).
- **Moteurs** : les harmoniques de rang 5 créent un champ tournant en sens inverse, ceux de rang 7 un champ direct, mais à des vitesses très différentes de celle du rotor : couples pulsatoires, vibrations, bruit et pertes supplémentaires.
- **Condensateurs** : leur impédance $1/(nC\omega)$ diminue avec le rang : ils « aspirent » les courants harmoniques, s'échauffent et vieillissent prématurément.

Résonance des batteries de condensateurs

Une batterie de condensateurs de relèvement (puissance Q_c) forme, avec la réactance du réseau, un circuit LC **parallèle** vu par les courants harmoniques. À sa fréquence de résonance, l'impédance devient très grande : un faible courant harmonique y crée une forte tension harmonique, et un courant intense circule entre le réseau et les condensateurs. Le danger apparaît quand cette fréquence est proche de celle d'un harmonique présent dans l'installation (rangs 5, 7, 11, 13) : on protège alors les condensateurs par des **selfs anti-harmoniques** (paragraphe suivant).

Rang de résonance parallèle – hors programme

$$n_r = \frac{f_r}{f_0} \approx \sqrt{\frac{S_{cc}}{Q_c}}$$

Transformateur de 630 kVA, $U_{cc\%} = 4$: $S_{cc} \approx 100\,S_n/U_{cc\%} = 630/0{,}04 = 15{,}75$ MVA. Avec une batterie de 250 kVAR : $n_r \approx \sqrt{15750/250} \approx 7{,}9$, tout près du rang 7 : les condensateurs risquent d'être détruits.

Dysfonctionnements

Déclenchements intempestifs des protections (disjoncteurs sensibles à la valeur crête, dispositifs différentiels perturbés par les fuites capacitives à haute fréquence), erreurs des appareils de mesure non TRMS, perturbation des automates et des systèmes communiquant par courant porteur, passages par zéro multiples de la tension qui dérèglent les variateurs à thyristors.

5.6 Remèdes : réduire et filtrer les harmoniques

Agir sur l'installation

- **Structure** : alimenter les charges polluantes par un départ séparé, le plus en amont possible (là où S_{cc} est grande), ou par un transformateur dédié.
- **Couplage des transformateurs** : un couplage Dy ou Yz arrête les harmoniques de rangs multiples de 3.
- **Inductances de ligne** (ou self de lissage du bus continu) en entrée des variateurs : elles « adoucissent » les impulsions de courant et réduisent le THD_i (typiquement de 80 % à 40 %).
- **Selfs anti-harmoniques** en série avec les condensateurs de relèvement : l'ensemble est accordé vers 190 Hz (rang 3,8) ; au-dessus, la branche est inductive et ne peut plus résonner avec le réseau aux rangs 5, 7, 11…

Filtrage passif

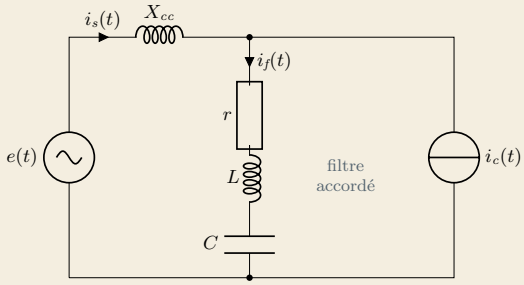
Lorsque ces mesures ne suffisent pas, on installe un **filtre**, c'est-à-dire un circuit qui offre aux courants harmoniques un chemin de faible impédance, ou qui les compense, pour qu'ils ne remontent pas vers le réseau.

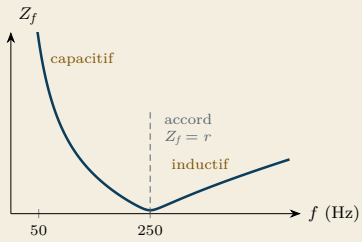
D **Définition** Un **filtre passif** est constitué de composants passifs (bobines, condensateurs, résistances). Le filtre **shunt accordé** est une branche r, L, C série placée en parallèle sur la charge polluante, dont la fréquence propre est égale à celle de l'harmonique à éliminer.

★ **À retenir · Filtre LC accordé**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}} \qquad \text{rang filtré : } n = \frac{f_0}{50\,\text{Hz}}$$

La branche est un circuit r, L, C série (chapitre 1) : $Z_f = r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. À f_0, sa réactance s'annule et son impédance se réduit à r, très faible : le courant harmonique s'y dérive au lieu de remonter vers le réseau.





Au-dessous de sa fréquence d'accord, la branche est **capacitive** : à 50 Hz, elle fournit de la puissance réactive et relève le facteur de déplacement de l'installation. Un filtre ne traite qu'**un** rang (on en place un par rang gênant : 5, 7, 11…). On l'accorde en pratique un peu au-dessous du rang visé (vers 4,7 pour le rang 5), pour qu'une dérive des composants ne le fasse pas résonner avec le réseau.

Ex **Exemple** Pour un filtre de rang 5 avec $C = 200\,\mu\text{F}$:

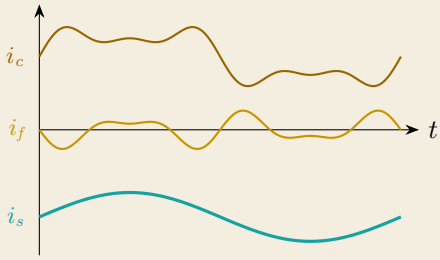
$$L = \frac{1}{(2\pi \times 250)^2 \times 200 \times 10^{-6}} \approx 2{,}03\,\text{mH}$$

À 50 Hz : $L\omega - 1/(C\omega) \approx 0{,}64 - 15{,}92 \approx -15{,}3\,\Omega$: branche capacitive. À 250 Hz, la réactance s'annule ; à 350 Hz, elle vaut environ $2{,}18\,\Omega$: branche inductive.

✗ **Piège classique** Croire qu'un filtre accordé sur le rang 5 « nettoie » tout le courant : au rang 7, sa branche est déjà inductive et laisse passer l'essentiel de l'harmonique vers le réseau. Oublier aussi qu'il reste raccordé quand la charge polluante s'arrête : il continue de fournir sa puissance réactive et peut surcompenser l'installation.

Filtrage actif et hybride

Un **filtre actif** est un onduleur à transistors piloté par une commande rapide : il mesure le courant de la charge, en extrait les harmoniques et injecte des courants harmoniques **égaux et opposés**. Le réseau ne fournit plus que le fondamental : $i_s = i_c + i_f$ redevient sinusoïdal.



	Filtre passif accordé	**Filtre actif**
Action	un seul rang par branche	tous les rangs (jusqu'au 50e environ)
Avantages	simple, robuste, peu coûteux ; fournit du réactif à 50 Hz	s'adapte à l'évolution de la charge ; pas de risque de résonance
Limites	risque de résonance ; surcompensation à faible charge	coûteux ; puissance limitée (calibre en ampères harmoniques) ; alimentation nécessaire

Le **filtre hybride** associe un filtre passif (qui traite le gros rang 5 à moindre coût) et un filtre actif de petit calibre (qui traite le reste). Enfin, le meilleur remède est souvent de ne pas produire d'harmoniques : redresseurs à 12 impulsions, variateurs à **redresseur actif** (« *active front end* ») ou alimentations à **PFC** (correction du facteur de puissance), dont le courant d'entrée est quasi sinusoïdal.

+ **Dimensionner un filtre actif** – hors programme

1. Relever $I_{1\,eff}$ et THD_i (ou le spectre) du courant de la charge.
2. Calculer le courant harmonique total à compenser :
$$I_h = \sqrt{I_{eff}^2 - I_{1\,eff}^2} = I_{1\,eff}\,\mathrm{THD}_i$$
3. Choisir le calibre normalisé immédiatement supérieur, avec une marge de 10 % à 20 % pour les extensions futures.

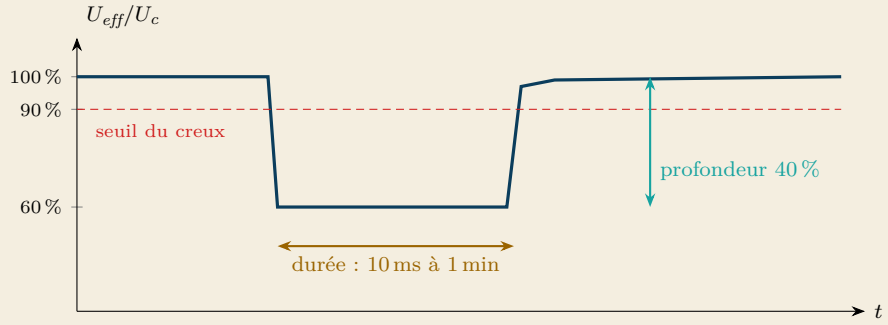
5.7 Creux de tension, flicker et autres perturbations

Creux de tension et coupures brèves

D **Définition** Un **creux de tension** est une baisse brutale de la valeur efficace de la tension en dessous de 90 % de sa valeur de référence, suivie d'un rétablissement après une durée de 10 ms à 1 min. En dessous de 5 % (selon la norme EN 50160), on parle de **coupure** (brève si elle dure moins de 3 min).

Causes : courts-circuits sur le réseau (y compris chez un voisin, éliminés par les protections en quelques centaines de millisecondes), manœuvres de réenclenchement, démarrage de gros moteurs ou mise sous tension de gros transformateurs. **Effets** :

retombée des contacteurs, arrêt des variateurs (sous-tension du bus continu), redémarrage des automates et des ordinateurs, perte de production sur une ligne entière pour un creux de 200 ms. **Remèdes** : alimentation sans interruption (ASI) pour les équipements sensibles, contacteurs à retombée temporisée, variateurs avec reprise à la volée, démarrage progressif des moteurs.



Variation de tension due à un appel de puissance – hors programme

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{\Delta S}{S_{cc}}$$

ΔS : puissance apparente appelée brusquement (démarrage d'un moteur, par exemple) ; S_{cc} : puissance de court-circuit au point de raccordement. Exemple : un compresseur démarré en direct appelle $\Delta S \approx 300\,\text{kVA}$ sur un réseau de 5 MVA :

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{300}{5000} = 6\,\%$$

Ce n'est pas un creux au sens de la norme, mais si le démarrage se répète, l'éclairage voisin papillote.

Fluctuations de tension et flicker

Des variations de tension faibles (quelques pour cent) mais **répétées** font varier le flux lumineux des lampes. L'œil y est très sensible entre 0,5 Hz et 25 Hz (maximum vers 9 Hz) : c'est le **flicker**, ou papillotement, source de fatigue visuelle et de plaintes. Il est produit par les charges dont la puissance varie rapidement : fours à arc, postes de soudure, démarrages répétés de moteurs, éoliennes. Il se mesure par un indicateur de courte durée P_{st} (sur 10 min) et de longue durée P_{lt} (sur 2 h) : la valeur 1 correspond au seuil de gêne. Pour le réduire : raccorder la charge à un réseau plus puissant (S_{cc} plus grande), limiter les appels de courant (démarreur progressif, variateur), ou compenser en temps réel la puissance réactive (compensateur statique, STATCOM).

Autres perturbations. Surtensions transitoires (foudre, manœuvres) : parafoudres. **Déséquilibre** des tensions (charges monophasées mal réparties) : échauffement des moteurs. Toutes ces perturbations relèvent de la **compatibilité électromagnétique** (CEM) : l'aptitude d'un appareil à fonctionner dans son environnement (**immunité**) sans le perturber (**émission**).

5.8 Normes de qualité de l'énergie

Normes de qualité de l'énergie – hors programme Les normes fixent d'un côté ce que le distributeur garantit, de l'autre ce que chaque utilisateur a le droit d'injecter.

- **EN 50160** : caractéristiques de la tension fournie par les réseaux publics (fréquence, amplitude, creux, flicker, harmoniques, déséquilibre).
- **EN 61000-3-2** (appareils de courant $\leq 16\,\text{A}$ par phase) et **EN 61000-3-12** (de 16 A à 75 A) : limites des courants harmoniques émis par les appareils ; **EN 61000-3-3** : limites de flicker.
- **EN 61000-2-2 et 2-4** : niveaux de compatibilité dans les réseaux publics et industriels ; **EN 61000-4-x** : essais d'immunité (dont les creux de tension) ; **EN 61000-6-x** : normes génériques CEM.
- **Arrêté du 17 mars 2003** : pour une installation de puissance souscrite supérieure à 100 kVA, les courants harmoniques injectés sont limités, rang par rang, en proportion du courant correspondant à la puissance souscrite.

Valeurs garanties par l'EN 50160

Caractéristique (réseau BT)	Valeur garantie par l'EN 50160
Fréquence	50 Hz ±1 % pendant 99,5 % de l'année
Amplitude ($U_c = 230\,\text{V}$)	±10 % pour 95 % des moyennes sur 10 min d'une semaine
Flicker	$P_{lt} \leq 1$ pendant 95 % du temps
Déséquilibre	tension inverse $\leq 2\,\%$ de la tension directe
Harmoniques	$\text{THD}_u \leq 8\,\%$; rang 3 : 5 %, rang 5 : 6 %, rang 7 : 5 %, rang 11 : 3,5 % (95 % des moyennes sur 10 min)
Creux de tension	non limités : nombre indicatif de quelques dizaines à un millier par an

Méthode : diagnostiquer un problème de qualité de l'énergie.

1. Mesurer avec un **analyseur de réseau** (appareil TRMS) au point de raccordement et en tête des départs suspects : U_{eff}, I_{eff}, spectres, THD_u, THD_i, P, Q, S, f_p, f_d, courant de neutre, enregistrement des creux et du flicker sur au moins une semaine.
2. Identifier les charges polluantes (rangs présents, signature : rangs 3 et 9 pour le monophasé, rangs $6k \pm 1$ pour les ponts triphasés).
3. Comparer aux normes (EN 50160 pour la tension, arrêté de 2003 ou EN 61000-3-x pour les courants).
4. Choisir le remède le plus simple (réorganisation, inductances de ligne, selfs anti-harmoniques, filtres) et vérifier l'absence de résonance.

L'essentiel

Chapitre 5

Qualité de l'énergie électrique

Pulsation du fondamental	$\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$
Série de Fourier	$s(t) = \langle s \rangle + \sum_{n \geq 1} S_{n\,max} \sin(n\,\omega_0 t + \Phi_n)$
Harmonique de rang n	$f_n = n \times f_0 \qquad S_{n\,eff} = \dfrac{S_{n\,max}}{\sqrt{2}}$
Valeur efficace (Parseval)	$S_{eff} = \sqrt{\langle s \rangle^2 + S_{1\,eff}^2 + S_{2\,eff}^2 + \dots}$
Créneau, triangle	$S_{eff} = S_{max} \qquad S_{eff} = \dfrac{S_{max}}{\sqrt{3}}$
Taux de distorsion du courant	$\mathrm{THD}_i = \dfrac{\sqrt{I_{eff}^2 - I_{1\,eff}^2}}{I_{1\,eff}} \times 100$
Taux de distorsion de la tension	$\mathrm{THD}_u = \dfrac{\sqrt{U_{eff}^2 - U_{1\,eff}^2}}{U_{1\,eff}} \times 100$
Puissances (tension sinusoïdale)	$P = U_{eff}\, I_{1\,eff} \cos(\Phi_1) \qquad Q = U_{eff}\, I_{1\,eff} \sin(\Phi_1)$
Puissances (courant sinusoïdal)	$P = U_{1\,eff}\, I_{eff} \cos(\Phi_1) \qquad Q = U_{1\,eff}\, I_{eff} \sin(\Phi_1)$
Puissance apparente	$S = U_{eff}\, I_{eff} \qquad S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$
Puissance déformante	$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ (VAD)
Facteur de puissance	$f_p = \dfrac{P}{S} = \dfrac{\cos(\Phi_1)}{\sqrt{1 + \mathrm{THD}_i^2}}$
Facteur de déplacement	$f_d = \cos(\Phi_1)$
Triphasé équilibré	$P = \sqrt{3}\, U I_{1\,eff} \cos(\Phi_1) \quad Q = \sqrt{3}\, U I_{1\,eff} \sin(\Phi_1)$
Triphasé : puissance apparente	$S = \sqrt{3}\, U I_{eff}$
Rang 3 en triphasé	$3 \times 120° = 360°$ (harmoniques en phase)
Courant de neutre	$I_N = 3\, I_{3\,eff}$
Filtre LC accordé	$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad n = \dfrac{f_0}{50\,\mathrm{Hz}}$

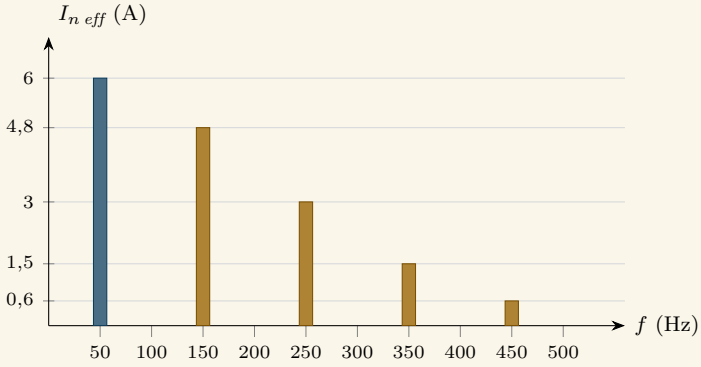
Exercices

Chapitre 5

Signaux déformés et puissances

Exercice 5.1 – Le départ informatique d'un open space ★☆☆

Dans les bureaux d'un cabinet d'architectes, le disjoncteur 10 A qui alimente les postes de travail d'un open space déclenche de temps en temps, alors que la somme des puissances indiquées sur les alimentations ne justifie pas un tel courant. L'électricien de maintenance branche un analyseur de réseau sur ce départ monophasé, alimenté sous une tension sinusoïdale de 230 V, 50 Hz. Il obtient le spectre ci-dessous, gradué en **valeurs efficaces**. On lui demande d'interpréter ce relevé.



1. Identifier la raie du fondamental et donner les rangs des autres raies. Pourquoi n'observe-t-on pas d'harmoniques de rangs pairs ?
2. Calculer l'amplitude $I_{1\,max}$ du fondamental.
3. Calculer la valeur efficace I_{eff} du courant absorbé.
4. Calculer le taux de distorsion harmonique THD_i par les deux expressions du cours.
5. L'installateur avait choisi le câble et la protection en ne tenant compte que du fondamental. De quel facteur a-t-il sous-estimé le courant efficace ? Et les pertes par effet Joule dans le câble ?

→ corrigé p. 171

Exercice 5.2 – Un onduleur de secours à sortie en créneaux ★☆☆

Un petit club nautique a acheté un onduleur de secours bon marché pour alimenter, en cas de coupure, son pompage de cale et son éclairage. Sur la fiche technique, la tension de sortie est annoncée « 230 V, 50 Hz », sans autre précision. Un adhérent

électrotechnicien relève à l'oscilloscope une tension en créneaux : $u(t) = +E$ pendant une demi-période, $-E$ pendant l'autre, avec $E = 230\,\text{V}$ et $T = 20\,\text{ms}$. Sa décomposition en série de Fourier est :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \dots\right)$$

1. Donner la fréquence du fondamental et celles des harmoniques de rangs 3, 5 et 7.
2. Calculer les amplitudes $U_{1\,max}$, $U_{3\,max}$, $U_{5\,max}$ et $U_{7\,max}$, puis tracer le spectre en amplitude limité à ces quatre raies.
3. Justifier, à partir de la courbe $u(t)$, que la valeur efficace de la tension vaut $U_{eff} = E$. L'indication « 230 V » de la fiche est-elle exacte ?
4. Calculer la valeur efficace $U_{1\,eff}$ du fondamental, puis le taux de distorsion THD_u. Le comparer au repère de 8 % fixé par l'EN 50160 pour le réseau public.
5. Comparer la valeur maximale de $u(t)$ à celle d'une tension sinusoïdale de même valeur efficace. Expliquer pourquoi l'éclairage (résistif) fonctionne normalement, alors que le moteur de la pompe chauffe anormalement.

→ corrigé p. 171

Exercice 5.3 – Les chargeurs des chariots élévateurs ★★☆

Un entrepôt logistique recharge chaque nuit sa flotte de chariots élévateurs. Le fournisseur d'énergie signale un facteur de puissance médiocre, et le responsable technique envisage d'installer une batterie de condensateurs. Avant de commander, il fait mesurer un chargeur, alimenté par une tension sinusoïdale. L'analyseur de réseau affiche les valeurs ci-dessous ; on demande au technicien de faire le bilan des puissances et de dire si les condensateurs sont la bonne solution.

Données

- Tension : $U_{eff} = 230\,\text{V}$, sinusoïdale, 50 Hz.
- Courant : fondamental $I_{1\,eff} = 16\,\text{A}$, en retard de $\Phi_1 = 20°$ sur la tension ; $\text{THD}_i = 45\,\%$.

I- Bilan des puissances

1. Calculer la valeur efficace I_{eff} du courant absorbé.
2. Calculer les puissances active P, réactive Q et apparente S.
3. En déduire la puissance déformante D. Vérifier le résultat avec l'expression $D = U_{eff}\,I_{1\,eff}\,\text{THD}_i$.
4. Calculer le facteur de déplacement f_d et le facteur de puissance f_p. Lequel l'analyseur affiche-t-il sous le nom « DPF », et lequel sous le nom « PF » ?

II- Choix d'une solution

5. On suppose qu'une batterie de condensateurs annule exactement Q. Calculer le facteur de puissance obtenu. Conclure sur l'intérêt de cette solution.

6. Le constructeur propose un nouveau modèle de chargeur à correction du facteur de puissance (PFC) : pour la même puissance active, $\cos(\Phi_1) = 0{,}99$ et $\text{THD}_i = 5\,\%$. Calculer le nouveau courant efficace et le nouveau facteur de puissance.

7. De quel pourcentage diminuent le courant en ligne et les pertes Joule dans les câbles ? Rédiger une recommandation.

→ corrigé p. 172

Effets des harmoniques et remèdes

Exercice 5.4 – Le neutre qui chauffe ★★☆

Dans un immeuble de bureaux rénové, une caméra thermique révèle, lors de la visite annuelle de maintenance, un point chaud sur le conducteur **neutre** du câble qui alimente un étage, alors que les trois phases sont à température normale. L'étage est équipé de plusieurs centaines d'ordinateurs, d'écrans et de luminaires LED, répartis équitablement sur les trois phases d'un réseau 230 V / 400 V. On demande au technicien d'expliquer le phénomène et de proposer une solution.

Données

- Spectre du courant de chaque phase (valeurs efficaces, les trois phases sont équilibrées) : $I_{1\,eff} = 50\,\text{A}$; $I_{3\,eff} = 35\,\text{A}$; $I_{5\,eff} = 20\,\text{A}$; $I_{7\,eff} = 10\,\text{A}$; $I_{9\,eff} = 5\,\text{A}$.
- Câble 5G16 mm^2 (phases et neutre de même section), longueur $\ell = 45\,\text{m}$, cuivre de résistivité $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m}$; courant admissible par conducteur : 75 A.

1. Calculer la valeur efficace du courant de phase I_{ph} et le taux de distorsion THD_i. Le courant de phase est-il admissible ?

2. Les fondamentaux des trois phases sont décalés de 120°. Montrer que les harmoniques de rang 3 des trois phases sont en phase. Qu'en est-il des harmoniques de rang 9 ? et de rangs 5 et 7 ?

3. En déduire la valeur efficace I_N du courant dans le neutre. Comparer au courant de phase et au courant admissible. Conclure.

4. Calculer la résistance R d'un conducteur du câble, puis les pertes Joule dans le neutre et dans chaque phase. Que vaudraient les pertes totales du câble si chaque phase n'absorbait que son fondamental ?

5. Proposer deux solutions pour supprimer le point chaud.

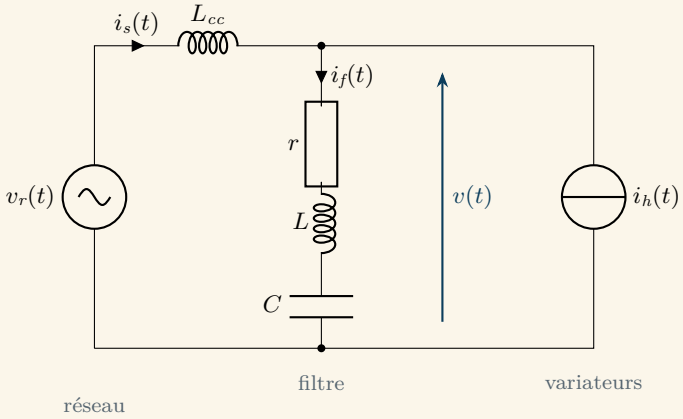
→ corrigé p. 173

Exercice 5.5 – Filtre accordé sur le rang 5 d'une station de pompage ★★★

Une station de pompage d'eau potable alimente plusieurs pompes par des variateurs de vitesse, raccordés au même tableau 400 V. Les automates et les capteurs de la station, sensibles aux perturbations, imposent par cahier des charges un taux de distorsion de la tension $\text{THD}_u \leq 3\,\%$ sur le tableau. Le bureau d'études propose un filtre passif accordé sur le rang 5, couplé en étoile ; on vous demande de vérifier son efficacité. On raisonne sur le schéma monophasé équivalent (une phase et le neutre fictif), avec la tension simple $V = 400/\sqrt{3} \approx 231\,\text{V}$.

Données

- Réseau amont : puissance de court-circuit au tableau $S_{cc} = 6{,}4\,\text{MVA}$; il est modélisé par une inductance L_{cc} par phase.
- Courants harmoniques injectés par les variateurs, par phase : $I_{5\,eff} = 60\,\text{A}$; $I_{7\,eff} = 35\,\text{A}$ (autres rangs négligés).
- Au rang n, la réactance du réseau vaut $n\,X_{cc}$; sans filtre, la tension harmonique simple créée au tableau vaut $V_{n\,eff} = n\,X_{cc}\,I_{n\,eff}$.
- Filtre, par phase : résistance $r = 20\,\text{m}\Omega$, inductance L, condensateur $C = 500\,\mu\text{F}$, en série.



A- Sans filtre

1. Calculer la réactance du réseau $X_{cc} = U^2/S_{cc}$ à 50 Hz, puis l'inductance L_{cc}.

2. Calculer les tensions harmoniques $V_{5\,eff}$ et $V_{7\,eff}$ créées au tableau, puis le taux THD_u (la tension du réseau amont est supposée parfaitement sinusoïdale). Le cahier des charges est-il respecté ?

B- Dimensionnement du filtre

3. Calculer l'inductance L pour que le filtre soit accordé sur le rang 5.

4. Calculer l'impédance du filtre à 50 Hz. Est-il inductif ou capacitif ? En déduire le courant fondamental I_{f1} qui le traverse et la puissance réactive fournie par les trois branches.

C- Efficacité du filtre

5. À 250 Hz, calculer l'impédance du filtre et celle du réseau. Le courant harmonique $I_{5\,eff}$ se partage entre ces deux branches en parallèle : calculer la part I_{s5} qui remonte vers le réseau, puis la nouvelle tension $V_{5\,eff}$.

6. Reprendre le calcul à 350 Hz. Le filtre est-il encore efficace sur le rang 7 ?

7. Calculer le nouveau THD_u et conclure. Calculer la valeur efficace du courant total dans une branche du filtre, qui sert à choisir ses composants.

D- Antirésonance

8. Vu des variateurs, le filtre et le réseau forment un circuit LC parallèle. Montrer que sa fréquence de résonance vaut

$$f_{ar} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L + L_{cc})\,C}}$$

et la calculer. À quel « rang » correspond-elle ? Pourquoi n'est-ce pas gênant ici, et pourquoi accorde-t-on souvent le filtre légèrement au-dessous de 250 Hz ?

→ corrigé p. 174

Exercice 5.6 – Les condensateurs qui grillaient dans une imprimerie ★★★

Une imprimerie a installé il y a deux ans une batterie automatique de condensateurs pour supprimer ses pénalités d'énergie réactive. Depuis l'arrivée de nouvelles rotatives pilotées par variateurs, les fusibles de la batterie fondent régulièrement et deux gradins ont gonflé. Le chargé d'affaires soupçonne une résonance avec les harmoniques des variateurs (rangs 5, 7, 11 et 13) et vous demande une étude.

Données

- Transformateur HTA/BT : $S_n = 800$ kVA, tension de court-circuit $U_{cc\%} = 6$; réseau 400 V, 50 Hz. Le réseau HTA amont est supposé de puissance infinie : $S_{cc} \approx 100\,S_n/U_{cc\%}$.
- Batterie automatique : 5 gradins de 60 kVAR sous 400 V, enclenchés selon le besoin (de 60 kVAR à 300 kVAR).
- Rang de résonance parallèle entre la batterie (puissance Q_c) et le réseau : $n_r \approx \sqrt{S_{cc}/Q_c}$.
- Le fournisseur propose une batterie « anti-harmoniques » de 300 kVAR : chaque gradin est associé en série à une self, l'ensemble étant accordé à 189 Hz.

A- Diagnostic

1. Calculer la puissance de court-circuit S_{cc} au tableau général.

2. Calculer le rang de résonance parallèle n_r pour chacune des cinq puissances possibles de la batterie. Présenter les résultats dans un tableau.

3. Quelles configurations sont dangereuses ? Expliquer pourquoi les condensateurs se détériorent.

B- Batterie avec selfs anti-harmoniques

On étudie la batterie complète (300 kVAR) à l'aide d'un schéma équivalent étoile : par phase, une capacité C en série avec une inductance L, sous la tension simple.

4. Calculer la capacité C (par phase, schéma étoile) d'une batterie de 300 kVAR sous 400 V sans self, en utilisant $Q = C\,\omega\,U^2$.

5. Calculer l'inductance L qui accorde la branche à 189 Hz. À quel rang correspond cette fréquence ? Vérifier que le rapport $L\omega/(1/(C\omega))$ à 50 Hz vaut environ 7 %.

6. Calculer la réactance d'une branche aux rangs 5, 7 et 11. Est-elle inductive ou capacitive ? Expliquer pourquoi la résonance avec le réseau devient impossible pour ces rangs.

7. La self modifie le fonctionnement à 50 Hz. Montrer que la tension aux bornes des condensateurs est multipliée par $X_C/(X_C - X_L)$ et calculer la tension composée qu'ils doivent supporter. Calculer la puissance réactive réellement fournie par la batterie à 50 Hz. Conclure sur le choix du matériel.

→ corrigé p. 176

Sujets de type BTS

Sujet BTS 5.A – Pollution harmonique d'une ligne d'extrusion

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une usine de plasturgie a mis en service une nouvelle ligne d'extrusion de tubes : extrudeuse, pompes à vide, tireuse et scie sont toutes entraînées par des moteurs asynchrones alimentés par des variateurs de vitesse. Depuis, le gestionnaire du réseau public a informé l'usine que ses injections de courants harmoniques dépassaient les limites réglementaires. Un analyseur de réseau triphasé a été placé en tête du départ de la ligne, au régime de production nominal.

Données

- Réseau triphasé 400 V ($V = 231$ V entre phase et neutre), 50 Hz, tension supposée sinusoïdale.
- Mesures par phase (système équilibré) : fondamental du courant $I_{1\,eff} = 220$ A ; facteur de déplacement DPF $= \cos(\Phi_1) = 0{,}96$ (inductif).
- Spectre du courant, en pourcentage du fondamental : rang 5 : 38 % ; rang 7 : 20 % ; rang 11 : 8 % ; rang 13 : 5 % ; autres rangs négligeables.
- Puissance souscrite par l'usine : $S_{ref} = 250$ kVA. Arrêté du 17 mars 2003 : le courant harmonique de rang n injecté doit rester inférieur à $K_n\,I_{ref}$, avec

$$I_{ref} = \frac{S_{ref}}{\sqrt{3}\,U}\ ;$$

$K_5 = K_7 = 5\,\%$, $K_{11} = K_{13} = 3\,\%$. (La ligne d'extrusion est la seule charge polluante de l'usine.)

▷ Calibres des filtres actifs du catalogue (courant harmonique compensable par phase) : 30 A, 60 A, 100 A, 120 A et 200 A.

Partie A – Analyse du courant

A.1. Donner les fréquences et les valeurs efficaces des quatre courants harmoniques relevés.

A.2. Les variateurs sont alimentés par des ponts redresseurs triphasés sans neutre. Expliquer pourquoi le spectre ne contient pas d'harmoniques de rangs pairs ni de rangs multiples de 3.

A.3. Calculer le taux de distorsion harmonique THD_i, puis la valeur efficace I_{eff} du courant de ligne.

Partie B – Bilan des puissances de la ligne

B.1. Calculer les puissances active P, réactive Q et apparente S absorbées par la ligne.

B.2. Calculer la puissance déformante D.

B.3. Calculer le facteur de puissance f_p par deux méthodes. Le comparer au facteur de déplacement et commenter.

Partie C – Respect de la réglementation

C.1. Calculer le courant de référence I_{ref}.

C.2. Calculer les courants harmoniques maximaux autorisés pour les rangs 5, 7, 11 et 13, et les comparer aux courants mesurés dans un tableau. Conclure.

C.3. Pourquoi le gestionnaire du réseau public limite-t-il les courants harmoniques injectés par ses clients ? Citer deux conséquences de ces courants pour le réseau et pour les autres usagers.

Partie D – Solution par filtre actif

D.1. Expliquer en quelques lignes le principe d'un filtre actif parallèle. Pourquoi est-il préféré ici à des filtres passifs accordés ?

D.2. Le courant harmonique total que le filtre doit injecter par phase vaut

$$I_h = \sqrt{I_{eff}^2 - I_{1\,eff}^2}$$

Le calculer. Choisir son calibre dans le catalogue.

D.3. Avec le filtre, le THD_i du courant fourni par le réseau tombe à 5 %. Les courants harmoniques résiduels respectent-ils l'arrêté ? (On admettra qu'aucun rang ne dépasse alors 4 % du fondamental.)

D.4. Calculer le nouveau courant efficace de ligne, la nouvelle puissance apparente et le nouveau facteur de puissance.

Partie E – Compensation complémentaire

E.1. Le directeur technique souhaite atteindre $f_p \approx 0{,}99$. Le filtre actif peut aussi fournir de la puissance réactive. Calculer la puissance réactive qu'il doit fournir pour amener le facteur de déplacement à 0,99 (on rappelle que $Q = P\tan(\Phi_1)$).

E.2. Calculer alors le fondamental du courant, le courant efficace et le facteur de puissance obtenus. Le câble d'alimentation de la ligne a une résistance de $8\,\text{m}\Omega$ par phase : calculer les pertes Joule avant et après les deux améliorations.

→ corrigé p. 177

Sujet BTS 5.B – Raccordement d'une scierie en bout de ligne rurale

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une scierie installée en zone rurale remplace sa scie de tête par une machine plus puissante, entraînée par un moteur asynchrone de 75 kW. Elle est alimentée par le même poste de distribution que plusieurs habitations voisines. Lors des essais avec un démarrage direct, les riverains se sont plaints de l'éclairage qui « baisse » à chaque démarrage, et un artisan voisin a vu son automate redémarrer. Le gestionnaire du réseau demande à la scierie de proposer un mode de démarrage acceptable, puis de vérifier qu'il ne pollue pas le réseau.

Données

- Réseau au point de raccordement : 400 V entre phases ($V = 231$ V entre phase et neutre), 50 Hz ; puissance de court-circuit $S_{cc} = 4$ MVA.
- Moteur : $P_u = 75$ kW, rendement $\eta = 0{,}93$, $\cos(\Phi_n) = 0{,}86$; en démarrage direct, le courant de démarrage vaut $6{,}5\,I_n$.
- Variation de tension due à un appel de puissance apparente ΔS : $\Delta U/U \approx \Delta S/S_{cc}$.
- Le contrat de raccordement limite la variation de tension à 3 % pour une machine qui démarre plus d'une fois toutes les 10 min (cas de la scie, qui redémarre à chaque grume).
- Modes de démarrage envisagés et courant d'appel correspondant : étoile-triangle ($6{,}5\,I_n/3$) ; démarreur progressif réglé à $3\,I_n$; variateur de vitesse ($1{,}2\,I_n$).
- Variateur en fonctionnement nominal : rendement 0,97 ; facteur de déplacement 0,98 ; spectre du courant d'entrée en % du fondamental : rang 5 : 40 ; rang 7 : 25 ; rang 11 : 9 ; rang 13 : 6. Avec une inductance de ligne : rang 5 : 30 ; rang 7 : 12 ; rang 11 : 7 ; rang 13 : 5.
- EN 50160 : $\text{THD}_u \leq 8\,\%$; tensions harmoniques individuelles : rang 5 : 6 % ; rang 7 : 5 % ; rang 11 : 3,5 % ; rang 13 : 3 %.

Partie A – Démarrage direct

A.1. Calculer le courant nominal I_n du moteur, puis son courant de démarrage direct I_d.

A.2. Calculer la puissance apparente ΔS appelée au démarrage et la variation relative de tension $\Delta U/U$ au point de raccordement.

A.3. Au sens de la norme EN 50160, cette baisse de tension est-elle un creux de tension ? Justifier, puis expliquer les plaintes des riverains (éclairage, automate).

A.4. Quelle mesure le gestionnaire du réseau peut-il réaliser pour objectiver ces plaintes ? Préciser l'appareil, le point de mesure, la durée et les grandeurs enregistrées.

Partie B – Choix du mode de démarrage

B.1. Calculer la variation de tension pour chacun des trois autres modes de démarrage. Présenter les résultats dans un tableau.

B.2. Quel mode respecte le contrat de raccordement ? Expliquer pourquoi des variations de tension répétées sont plus gênantes qu'une variation isolée (phénomène de flicker).

B.3. Citer un inconvénient du démarrage étoile-triangle et un inconvénient du démarreur progressif, en dehors de la variation de tension.

Partie C – Pollution harmonique du variateur

C.1. Calculer la puissance active absorbée par le variateur au régime nominal, puis la valeur efficace $I_{1\,eff}$ du fondamental du courant de ligne.

C.2. Calculer le THD_i et la valeur efficace I_{eff} du courant de ligne.

C.3. Calculer la réactance du réseau $X_{cc} = U^2/S_{cc}$. En déduire les tensions harmoniques simples $V_{n\,eff} = n\,X_{cc}\,I_{n\,eff}$ créées au point de raccordement pour les rangs 5, 7, 11 et 13, puis le THD_u.

C.4. Comparer aux limites de la norme EN 50160. Pourquoi le gestionnaire du réseau jugerait-il ce résultat préoccupant, même s'il est conforme ?

Partie D – Inductance de ligne et bilan

D.1. On ajoute une inductance de ligne en amont du variateur. Calculer les nouveaux THD_i, I_{eff} et THD_u (le fondamental est inchangé).

D.2. Calculer, avec l'inductance de ligne, les puissances P, Q, S, D et le facteur de puissance du variateur.

D.3. Rédiger une conclusion d'une dizaine de lignes à l'intention du gestionnaire du réseau.

→ corrigé p. 180

Corrigés

Chapitre 5

Signaux déformés et puissances

✓ Corrigé de l'exercice 5.1 – Le départ informatique d'un open space

1. Le fondamental est la raie à $f_0 = 50\,\text{Hz}$ (fréquence du réseau). Les autres raies, à 150 Hz, 250 Hz, 350 Hz et 450 Hz, sont les harmoniques de rangs 3, 5, 7 et 9. Le courant absorbé par les alimentations a une alternance négative symétrique de l'alternance positive : un tel signal ne contient que des harmoniques de rangs impairs.

2. $I_{1\,max} = I_{1\,eff}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ soit $\boxed{I_{1\,max} \approx 8{,}49\,\text{A}}$

3. Relation de Parseval (pas de valeur moyenne) :

$$I_{eff} = \sqrt{6^2 + 4{,}8^2 + 3^2 + 1{,}5^2 + 0{,}6^2} = \sqrt{70{,}65} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{eff} \approx 8{,}41\,\text{A}}$$

4. Première expression :

$$\text{THD}_i = \frac{\sqrt{4{,}8^2 + 3^2 + 1{,}5^2 + 0{,}6^2}}{6} = \frac{\sqrt{34{,}65}}{6} \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{THD}_i \approx 98\,\%}$$

Seconde expression : $\text{THD}_i = \sqrt{70{,}65 - 36}/6 = 5{,}89/6 \approx 98\,\%$ ✓. L'ensemble des harmoniques a presque la même valeur efficace que le fondamental : le courant est très déformé (impulsions des redresseurs à condensateur).

5. $I_{eff}/I_{1\,eff} = 8{,}41/6 \approx 1{,}40$: le courant efficace réel est supérieur de 40 % à celui du fondamental. Les pertes Joule varient comme I_{eff}^2 : elles sont multipliées par $1{,}40^2 \approx 1{,}96$, c'est-à-dire presque **doublées**. Le courant efficace vrai atteint déjà 84 % du calibre du disjoncteur (8,41 A pour 10 A), alors que le fondamental (6 A) laissait croire à une marge confortable. Pour expliquer les déclenchements, il faut enregistrer le courant (valeur efficace vraie, pointes) et sa durée, puis les confronter à la courbe du disjoncteur.

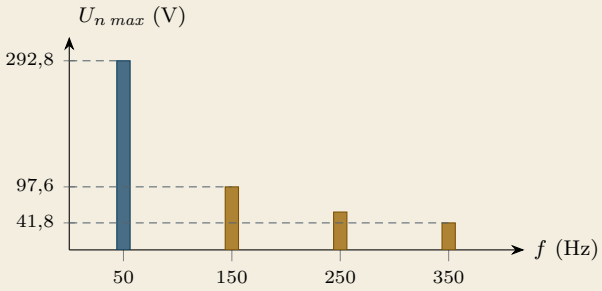
✓ Corrigé de l'exercice 5.2 – Un onduleur de secours à sortie en créneaux

1. $f_1 = \dfrac{1}{T} = 50\,\text{Hz}$; $\quad f_3 = 150\,\text{Hz}$, $\quad f_5 = 250\,\text{Hz}$, $\quad f_7 = 350\,\text{Hz}$.

2. $U_{n\,max} = \dfrac{4E}{n\pi}$:

$$U_{1\,max} = \frac{4 \times 230}{\pi} \approx 292{,}8\,\text{V} \; ; \quad U_{3\,max} \approx 97{,}6\,\text{V}$$

$$U_{5\,max} \approx 58{,}6\,\text{V} \; ; \quad U_{7\,max} \approx 41{,}8\,\text{V}$$



3. À chaque instant $u^2(t) = E^2$: la moyenne de u^2 vaut E^2, donc

$$U_{eff} = \sqrt{E^2} = E \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{eff} = 230\,\text{V}}$$

L'indication de la fiche est exacte… pour la valeur efficace seulement : elle ne dit rien de la forme d'onde.

4. $U_{1\,eff} = \dfrac{292{,}8}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{U_{1\,eff} \approx 207{,}1\,\text{V}}$

$$\text{THD}_u = \frac{\sqrt{U_{eff}^2 - U_{1\,eff}^2}}{U_{1\,eff}} = \frac{\sqrt{230^2 - 207{,}1^2}}{207{,}1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{THD}_u \approx 48\,\%}$$

C'est six fois le repère de 8 % que l'EN 50160 fixe pour la tension du réseau public : même sans critère propre à cet onduleur, sa tension est très déformée.

5. Une sinusoïde de 230 V efficaces culmine à $230\sqrt{2} \approx 325$ V, contre 230 V pour le créneau. L'éclairage résistif ne dépend que de la valeur efficace ($P = U_{eff}^2/R$) : il reçoit sa puissance normale. Le moteur, lui, ne « travaille » qu'avec le fondamental, réduit à 207 V ($-10\,\%$) : son couple baisse et son courant augmente. Les tensions harmoniques (150 Hz, 250 Hz, 350 Hz…) font circuler des courants harmoniques qui ne donnent pas de couple utile : pertes supplémentaires (le moteur chauffe), couples parasites et vibrations. Il faut un onduleur à sortie sinusoïdale.

✓ Corrigé de l'exercice 5.3 – Les chargeurs des chariots élévateurs

I- Bilan des puissances

1. $I_{eff} = I_{1\,eff}\sqrt{1 + \text{THD}_i^2} = 16\sqrt{1 + 0{,}45^2}$ soit $\boxed{I_{eff} \approx 17{,}5\,\text{A}}$

2. La tension est sinusoïdale : seul le fondamental du courant produit P et Q (cas 2).

$$P = U_{eff} I_{1\,eff} \cos(\Phi_1) = 230 \times 16 \times \cos(20°) \quad \text{soit} \quad \boxed{P \approx 3\,458\,\text{W}}$$

$$Q = 230 \times 16 \times \sin(20°) \quad \text{soit} \quad \boxed{Q \approx 1\,259\,\text{VAR}}$$

$$S = U_{eff} I_{eff} = 230 \times 17{,}55 \quad \text{soit} \quad \boxed{S \approx 4\,035\,\text{VA}}$$

3. $D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{4035^2 - 3458^2 - 1259^2}$ soit $\boxed{D \approx 1\,656\,\text{VAD}}$

Vérification : $D = 230 \times 16 \times 0{,}45 = 1\,656\,\text{VAD}$ ✓.

4. $f_d = \cos(\Phi_1) = \cos(20°) \approx 0{,}940$ et $f_p = \dfrac{P}{S} = \dfrac{3458}{4035}$ soit $\boxed{f_p \approx 0{,}857}$

Contrôle : $0{,}940/\sqrt{1 + 0{,}45^2} \approx 0{,}857$ ✓. L'analyseur affiche f_d sous le nom DPF (*Displacement Power Factor*) et f_p sous le nom PF (*Power Factor*).

II- Choix d'une solution

5. Les condensateurs annulent Q mais ne modifient ni P ni les courants harmoniques du chargeur, donc ni D :

$$S' = \sqrt{P^2 + D^2} = \sqrt{3458^2 + 1656^2} \approx 3\,834\,\text{VA} \qquad f'_p = \frac{3458}{3834} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'_p \approx 0{,}90}$$

Le gain est modeste (de 0,857 à 0,90) : c'est la déformation du courant, et non le déphasage, qui dégrade surtout le facteur de puissance. De plus, les condensateurs risquent d'absorber les courants harmoniques et de vieillir prématurément : ce n'est **pas** la bonne solution.

6. $I'_{1\,eff} = \dfrac{P}{U_{eff}\cos(\Phi'_1)} = \dfrac{3458}{230 \times 0{,}99} \approx 15{,}19\,\text{A}$;

$$I'_{eff} = 15{,}19\sqrt{1 + 0{,}05^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{I'_{eff} \approx 15{,}2\,\text{A}}$$

$$f'_p = \frac{0{,}99}{\sqrt{1 + 0{,}05^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'_p \approx 0{,}989}$$

7. Courant et pertes Joule :

$$\frac{17{,}55 - 15{,}21}{17{,}55} \approx 13\,\% \text{ de moins} \qquad \left(\frac{15{,}21}{17{,}55}\right)^2 \approx 0{,}75, \text{ soit } 25\,\% \text{ de moins}$$

Recommandation : renoncer à la batterie de condensateurs, inefficace ici, et remplacer progressivement les chargeurs par des modèles à PFC : le facteur de puissance passe de 0,86 à 0,99, sans risque de résonance, et l'installation électrique gagne de la réserve de puissance.

Effets des harmoniques et remèdes

✓ Corrigé de l'exercice 5.4 – Le neutre qui chauffe

1. $I_{ph} = \sqrt{50^2 + 35^2 + 20^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{4250}$ soit $\boxed{I_{ph} \approx 65{,}2\,\text{A}}$

$$\text{THD}_i = \frac{\sqrt{35^2 + 20^2 + 10^2 + 5^2}}{50} \approx 84\,\%$$

$65{,}2\,\text{A} < 75\,\text{A}$: les conducteurs de phase sont correctement dimensionnés.

2. Le fondamental de la phase 2 est décalé de $T/3$ (soit 120°) par rapport à celui de la phase 1. Pour l'harmonique de rang n, ce même décalage temporel correspond à un déphasage de $n \times 120°$:
   - ▷ rang 3 : $3 \times 120° = 360° \equiv 0°$: les trois harmoniques de rang 3 sont **en phase** ;
   - ▷ rang 9 : $9 \times 120° = 1\,080° = 3 \times 360° \equiv 0°$: également en phase ;
   - ▷ rang 5 : $600° \equiv 240°$; rang 7 : $840° \equiv 120°$: ils forment des systèmes triphasés équilibrés (inverse pour le rang 5, direct pour le rang 7), de somme nulle.

3. Dans le neutre, $i_N = i_1 + i_2 + i_3$: seuls subsistent les rangs 3 et 9, chacun multiplié par 3.

$$I_N = \sqrt{(3\times 35)^2 + (3\times 5)^2} = 3\sqrt{35^2+5^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_N \approx 106\,\text{A}}$$

(on trouverait 105 A avec la seule formule $I_N = 3\,I_{3\,eff}$). Le neutre transporte $106/65{,}2 \approx 1{,}6$ fois le courant d'une phase et dépasse de plus de 40 % le courant admissible de 75 A : il chauffe dangereusement, alors qu'aucune protection ne le surveille.

4. $R = \rho\dfrac{\ell}{S} = 1{,}7\times10^{-8} \times \dfrac{45}{16\times10^{-6}}$ soit $\boxed{R \approx 47{,}8\,\text{m}\Omega}$

Neutre : $P_N = R\,I_N^2 = 0{,}047\,8 \times 106^2 \approx 538\,\text{W}$; chaque phase :

$$R\,I_{ph}^2 = 0{,}047\,8 \times 65{,}2^2 \approx 203\,\text{W}$$

Total : $3 \times 203 + 538 \approx 1\,148\,\text{W}$. Avec des courants sinusoïdaux (50 A par phase, neutre nul) : $3 \times 0{,}047\,8 \times 50^2 \approx 359\,\text{W}$. Les harmoniques multiplient les pertes du câble par plus de 3, dont près de la moitié dans le neutre.

5. **Solutions :** remplacer le câble par un câble à neutre de section double (ou augmenter toutes les sections) avec protection du neutre ; installer un filtre de rang 3 (ou un filtre actif) en tête du départ ; alimenter l'étage par un transformateur de couplage Dy ou Yz, qui piège les harmoniques de rangs multiples de 3.

✓ Corrigé de l'exercice 5.5 – Filtre accordé sur le rang 5 d'une station de pompage

A- Sans filtre

1. $X_{cc} = \dfrac{400^2}{6{,}4\times10^6}$ soit $\boxed{X_{cc} = 25\,\text{m}\Omega}$ $\qquad L_{cc} = \dfrac{X_{cc}}{2\pi\times50} \approx 79{,}6\,\mu\text{H}$

2. La réactance du réseau vaut $n\,X_{cc}$ au rang n : $\quad V_{5\,eff} = 5\times0{,}025\times60 = 7{,}5\,\text{V}$ (3,25 % de 231 V) ; $\quad V_{7\,eff} = 7\times0{,}025\times35 \approx 6{,}13\,\text{V}$ (2,65 %).

$$\text{THD}_u = \frac{\sqrt{7{,}5^2+6{,}13^2}}{231} \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{THD}_u \approx 4{,}2\,\%} > 3\,\%$$

Le cahier des charges n'est pas respecté (le rang 5 suffit à le dépasser).

B- Dimensionnement du filtre

3. Accord à $f_0 = 250\,\text{Hz}$:

$$L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \times 250)^2 \times 500 \times 10^{-6}} \quad \text{soit} \quad \boxed{L \approx 0{,}811\,\text{mH}}$$

4. À 50 Hz : $L\omega \approx 0{,}255\,\Omega$ et $1/(C\omega) \approx 6{,}366\,\Omega$, d'où $X_f \approx -6{,}11\,\Omega$; r est négligeable : $Z_f \approx 6{,}11\,\Omega$. La réactance est négative : le filtre est **capacitif** à 50 Hz.

$$I_{f1} = \frac{V}{Z_f} = \frac{231}{6{,}11} \approx 37{,}8\,\text{A}$$

$$Q_f = 3\,X_f\,I_{f1}^2 = 3 \times (-6{,}11) \times 37{,}8^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_f \approx -26{,}2\,\text{kVAR}}$$

Le filtre fournit environ 26 kVAR au réseau : il relève le facteur de déplacement de la station.

C- Efficacité du filtre

5. À 250 Hz, le filtre est accordé : $\underline{Z_f} = r = 0{,}020\,\Omega$. Réseau : $\underline{Z_s} = j\,5X_{cc} = j\,0{,}125\,\Omega$. Diviseur de courant :

$$I_{s5} = I_{5\,eff}\,\frac{|\underline{Z_f}|}{|\underline{Z_f} + \underline{Z_s}|} = 60 \times \frac{0{,}020}{\sqrt{0{,}020^2 + 0{,}125^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{s5} \approx 9{,}5\,\text{A}}$$

Le filtre absorbe donc environ 59 A sur 60. Tension au tableau : $V_{5\,eff} = X_{cc5}\,I_{s5} = 0{,}125 \times 9{,}48 \approx 1{,}18\,\text{V}$, soit 0,51 % (au lieu de 3,25 %).

6. À 350 Hz :

$$X_f = 7L\omega - \frac{1}{7C\omega} \approx 1{,}783 - 0{,}909 = 0{,}873\,\Omega$$

Le filtre est **inductif** et son impédance est 5 fois celle du réseau ($7X_{cc} = 0{,}175\,\Omega$).

$$I_{s7} = 35 \times \frac{0{,}873}{|0{,}020 + j(0{,}873 + 0{,}175)|} \approx 35 \times \frac{0{,}873}{1{,}048} \approx 29{,}2\,\text{A}$$

$$V_{7\,eff} = 0{,}175 \times 29{,}2 \approx 5{,}10\,\text{V}\ (2{,}21\,\%)$$

Le filtre ne dérive que 17 % du rang 7 : il est peu efficace hors de son rang d'accord.

7. $\text{THD}_u = \dfrac{\sqrt{1{,}18^2 + 5{,}10^2}}{231}$ soit $\boxed{\text{THD}_u \approx 2{,}3\,\%}$ $\leq 3\,\%$: le cahier des charges est respecté, grâce au seul traitement du rang 5. Un second filtre de rang 7 serait nécessaire si la marge devait augmenter.

Courant efficace dans une branche du filtre : fondamental $I_{f1} \approx 37{,}8\,\text{A}$, rang 5 dérivé $60 \times 0{,}125/0{,}126\,6 \approx 59{,}2\,\text{A}$, rang 7 dérivé $35 \times 0{,}175/1{,}048 \approx 5{,}8\,\text{A}$:

$$I_f = \sqrt{37{,}8^2 + 59{,}2^2 + 5{,}8^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_f \approx 70{,}5\,\text{A}}$$

C'est pour ce courant (près de deux fois le seul fondamental de 37,8 A) que l'on choisit l'inductance et les condensateurs du filtre.

D- Antirésonance

8. Vu des variateurs, les deux branches (réseau $jL_{cc}\omega$ et filtre, r négligée) sont en parallèle. L'impédance du parallèle devient infinie quand la somme des deux impédances s'annule :

$$jL_{cc}\omega + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0 \iff (L + L_{cc})\,C\,\omega^2 = 1 \iff f_{ar} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L + L_{cc})\,C}}$$

$$f_{ar} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(0{,}811 \times 10^{-3} + 0{,}080 \times 10^{-3}) \times 500 \times 10^{-6}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{f_{ar} \approx 239\,\text{Hz}}$$

Elle correspond au rang :

$$\frac{f_{ar}}{50} = \frac{239}{50} \approx 4{,}8$$

Aucun harmonique n'est produit à 239 Hz par des variateurs triphasés (rangs $6k \pm 1$: 5, 7, 11…) : l'antirésonance ne sera pas excitée. Mais si le filtre était accordé exactement sur 250 Hz et que ses composants dérivaient (vieillissement des condensateurs, température), l'antirésonance pourrait se rapprocher du rang 5 et l'amplifier : on accorde donc le filtre vers le rang 4,7, de sorte qu'une dérive l'éloigne plutôt du rang 5.

✓ Corrigé de l'exercice 5.6 – Les condensateurs qui grillaient dans une imprimerie

A- Diagnostic

1. $S_{cc} \approx \dfrac{100\,S_n}{U_{cc\%}} = \dfrac{100 \times 800}{6}$ soit $\boxed{S_{cc} \approx 13{,}3\,\text{MVA}}$

2. $n_r \approx \sqrt{\dfrac{S_{cc}}{Q_c}}$:

Q_c (kVAR)	60	120	180	240	300
n_r	14,9	10,5	8,6	7,5	6,7
f_r (Hz)	745	527	430	373	333

3. Les configurations à 120 kVAR ($n_r \approx 10{,}5$, près du rang 11), 240 kVAR (7,5) et 300 kVAR (6,7, encadrant le rang 7) sont dangereuses ; à 60 kVAR, $n_r \approx 15$ reste assez proche du rang 13. Au voisinage de la résonance parallèle, l'impédance vue par les variateurs devient très grande : les courants harmoniques créent de fortes tensions harmoniques, et un courant harmonique intense circule en boucle entre le transformateur et les condensateurs. Ceux-ci, dont l'impédance $1/(nC\omega)$ est faible aux rangs élevés, sont surchargés en courant et en tension : ils s'échauffent, gonflent et font fondre leurs fusibles.

B- Batterie avec selfs anti-harmoniques

4. $C = \dfrac{Q}{\omega\, U^2} = \dfrac{300 \times 10^3}{314{,}16 \times 400^2}$ soit $\boxed{C \approx 5{,}97\,\text{mF}}$ (par phase, schéma étoile).

5. $L = \dfrac{1}{(2\pi \times 189)^2 \times 5{,}97 \times 10^{-3}}$ soit $\boxed{L \approx 0{,}119\,\text{mH}}$, soit un rang d'accord $189/50 \approx 3{,}8$.

À 50 Hz : $X_L = L\omega \approx 0{,}037\,3\,\Omega$ et $X_C = 1/(C\omega) \approx 0{,}533\,\Omega$, d'où $X_L/X_C \approx 0{,}070 = 7\,\%$ ✓ (c'est aussi $\left(\frac{50}{189}\right)^2$).

6. Réactance d'une branche au rang n : $X_n = n\,X_L - X_C/n$.

Rang 5 : $0{,}187 - 0{,}107 \approx 0{,}080\,\Omega$; rang 7 : $\approx 0{,}185\,\Omega$; rang 11 : $\approx 0{,}362\,\Omega$.

Les trois réactances sont positives : la branche est **inductive** au-dessus de 189 Hz. Associée à la réactance (inductive) du réseau, elle ne peut plus former de circuit LC résonant à ces rangs. Les courants harmoniques ne sont plus amplifiés et le rang 3,8 d'accord ne correspond à aucun harmonique produit.

7. Dans une branche, le courant vaut $I = V/(X_C - X_L)$ et la tension aux bornes du condensateur :

$$V_C = X_C\, I = \frac{X_C}{X_C - X_L}\, V$$

$$\frac{X_C}{X_C - X_L} = \frac{0{,}533}{0{,}533 - 0{,}037\,3} \approx 1{,}075 \qquad U_C = 1{,}075 \times 400 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_C \approx 430\,\text{V}}$$

$$Q' = \frac{U^2}{X_C - X_L} = \frac{400^2}{0{,}496} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q' \approx 323\,\text{kVAR}}$$

Conclusion : les condensateurs d'une batterie à selfs doivent avoir une tension assignée d'au moins 440 V (souvent 480 V) ; la batterie fournit un peu plus de réactif que ses condensateurs seuls, ce dont on tient compte dans le choix des gradins. Cette batterie « anti-harmoniques » supprime le risque de résonance et règle définitivement le problème.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 5.A – Pollution harmonique d'une ligne d'extrusion

Partie A – Analyse du courant

A.1. $I_{n\,eff}$ = pourcentage × $I_{1\,eff}$:

Rang n	5	7	11	13
Fréquence (Hz)	250	350	550	650
$I_{n\,eff}$ (A)	83,6	44,0	17,6	11,0

A.2. Le courant de ligne a une alternance négative symétrique de l'alternance positive : pas de rangs pairs. Sans neutre, la somme des trois courants de ligne est nulle à chaque instant ; or les harmoniques de rangs multiples de 3 seraient en phase sur les trois lignes et ne pourraient pas s'annuler : ils sont donc absents. Il reste les rangs $6k \pm 1$: 5, 7, 11, 13…

A.3. $\text{THD}_i = \sqrt{0{,}38^2 + 0{,}20^2 + 0{,}08^2 + 0{,}05^2} = \sqrt{0{,}193\,3}$ soit $\boxed{\text{THD}_i \approx 44\,\%}$

$$I_{eff} = I_{1\,eff}\sqrt{1 + \text{THD}_i^2} = 220\sqrt{1{,}193\,3} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{eff} \approx 240\,\text{A}}$$

Partie B – Bilan des puissances de la ligne

B.1. Tension sinusoïdale : seul le fondamental du courant produit P et Q. $\Phi_1 = \arccos(0{,}96) \approx 16{,}3°$, $\sin(\Phi_1) = 0{,}28$.

$$P = 3\,V I_{1\,eff}\cos(\Phi_1) = 3 \times 231 \times 220 \times 0{,}96 \quad \text{soit} \quad \boxed{P \approx 146{,}4\,\text{kW}}$$

$$Q = 3 \times 231 \times 220 \times 0{,}28 \approx 42{,}7\,\text{kVAR}$$

$$S = 3\,V I_{eff} = 3 \times 231 \times 240{,}3 \quad \text{soit} \quad \boxed{S \approx 166{,}5\,\text{kVA}}$$

B.2. $D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{166{,}5^2 - 146{,}4^2 - 42{,}7^2}$ soit $\boxed{D \approx 67{,}0\,\text{kVAD}}$

(Contrôle : $D = 3\,V I_{1\,eff}\,\text{THD}_i = 3 \times 231 \times 220 \times 0{,}439\,7 \approx 67{,}0\,\text{kVAD}$ ✓.)

B.3. $f_p = \dfrac{P}{S} = \dfrac{146{,}4}{166{,}5} \approx 0{,}879$ et $f_p = \dfrac{\cos(\Phi_1)}{\sqrt{1 + \text{THD}_i^2}} = \dfrac{0{,}96}{\sqrt{1{,}193\,3}} \approx 0{,}879$ ✓.

Le facteur de déplacement (0,96) est bon : le fondamental est peu déphasé. C'est la déformation du courant ($D \approx 67\,\text{kVAD}$, plus que Q) qui fait chuter le facteur de puissance à 0,88. Une batterie de condensateurs ne corrigerait que Q et n'apporterait presque rien ; elle risquerait de plus d'entrer en résonance avec les harmoniques de rangs 5 et 7.

Partie C – Respect de la réglementation

C.1. $I_{ref} = \dfrac{S_{ref}}{\sqrt{3}\,U} = \dfrac{250 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 400}$ soit $\boxed{I_{ref} \approx 361\,\text{A}}$

C.2. Limites de l'arrêté et courants mesurés :

Rang n	5	7	11	13
K_n	5 %	5 %	3 %	3 %
Maximum autorisé $K_n I_{ref}$ (A)	18,0	18,0	10,8	10,8
Mesuré (A)	83,6	44,0	17,6	11,0
Conforme ?	non	non	non	non (de peu)

Tous les rangs dépassent la limite, le rang 5 de plus de quatre fois : l'usine doit traiter ses harmoniques.

C.3. Les courants harmoniques circulent dans les transformateurs et les lignes du réseau public : ils y augmentent les pertes Joule et les échauffements. En traversant l'impédance du réseau, ils déforment aussi la tension, qui est imposée à tous les usagers raccordés au même poste : échauffement de leurs moteurs et de leurs condensateurs, dysfonctionnements d'appareils électroniques. Le gestionnaire doit garantir à tous une tension conforme à l'EN 50160.

Partie D – Solution par filtre actif

D.1. Le filtre actif est un onduleur de tension raccordé en parallèle sur la ligne. Il mesure le courant absorbé par la charge, en extrait les composantes harmoniques et injecte en permanence des courants harmoniques égaux et opposés : le réseau ne fournit plus que le fondamental. Il traite **tous** les rangs à la fois (ici 5, 7, 11 et 13 dépassent), s'adapte aux variations de charge de la ligne et ne présente aucun risque de résonance ; des filtres passifs exigeraient une branche accordée par rang.

D.2. $I_h = I_{1\,eff}\,\mathrm{THD}_i = 220 \times 0{,}439\,7$ soit $\boxed{I_h \approx 96{,}7\,\mathrm{A}}$ par phase.

Le calibre 100 A suffirait de justesse ; avec une marge pour l'évolution de la ligne, on choisit le calibre 120 A.

D.3. Aucun rang ne dépasse $0{,}04 \times 220 = 8{,}8\,\mathrm{A}$, valeur inférieure à 18,0 A (rangs 5, 7) et à 10,8 A (rangs 11, 13) : l'arrêté est respecté.

D.4. $I'_{eff} = 220\sqrt{1 + 0{,}05^2} \approx 220{,}3\,\mathrm{A}$; $S' = 3 \times 231 \times 220{,}3 \approx 152{,}7\,\mathrm{kVA}$;

$$f'_p = \frac{P}{S'} = \frac{146{,}4}{152{,}7} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'_p \approx 0{,}959}$$

Le facteur de puissance rejoint presque le facteur de déplacement (0,96). La puissance apparente passe de 166,5 kVA à 152,7 kVA : environ 8 % de la capacité du transformateur et des câbles sont libérés.

Partie E – Compensation complémentaire

E.1. $Q_c = P\,(\tan(\Phi') - \tan(\Phi_1))$:

$$Q_c = 146{,}4 \times \big(\tan(\arccos(0{,}99)) - \tan(\arccos(0{,}96))\big)$$

$$Q_c = 146{,}4 \times (0{,}142\,5 - 0{,}291\,7) \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_c \approx -21{,}8\,\mathrm{kVAR}}$$

Le filtre actif doit fournir environ 22 kVAR de puissance réactive : le signe négatif traduit, en convention récepteur, une puissance réactive fournie. Le filtre se comporte alors à 50 Hz comme une batterie de condensateurs, sans en avoir le risque de résonance.

E.2. $I''_{1\,eff} = \dfrac{P}{3\,V\cos(\Phi')} = \dfrac{146{,}4\times10^{3}}{3\times231\times0{,}99} \approx 213{,}3\,\text{A}$;

$$I''_{eff} = 213{,}3\sqrt{1+0{,}05^2} \approx 213{,}6\,\text{A} \qquad f''_p = \frac{0{,}99}{\sqrt{1{,}002\,5}} \approx 0{,}989$$

Pertes Joule dans le câble : avant, $3\times0{,}008\times240{,}3^2 \approx 1\,386\,\text{W}$; après, $3\times0{,}008\times213{,}6^2 \approx 1\,095\,\text{W}$, soit 21 % de pertes en moins, en plus du respect de la réglementation. L'essentiel du gain vient de la suppression des harmoniques (courant de ligne ramené de 240,3 A à 220,3 A) ; la compensation de la puissance réactive n'apporte ensuite qu'un complément (de 220,3 A à 213,6 A).

✓ Corrigé du sujet BTS 5.B – Raccordement d'une scierie en bout de ligne rurale

Partie A – Démarrage direct

A.1. Puissance absorbée $P_a = P_u/\eta$, d'où

$$I_n = \frac{P_u}{\sqrt{3}\,U\,\eta\cos(\Phi_n)} = \frac{75\times10^{3}}{\sqrt{3}\times400\times0{,}93\times0{,}86} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_n \approx 135\,\text{A}}$$

$I_d = 6{,}5\times135{,}4$ soit $\boxed{I_d \approx 880\,\text{A}}$

A.2. $\Delta S = \sqrt{3}\,U\,I_d = \sqrt{3}\times400\times880 \approx 610\,\text{kVA}$

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{610}{4000} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\Delta U}{U} \approx 15\,\%}$$

A.3. La tension tombe à environ 85 % de sa valeur nominale, sous le seuil de 90 %, pendant la durée du démarrage (quelques secondes, donc entre 10 ms et 1 min) : c'est bien un **creux de tension**. Le flux lumineux des lampes varie fortement avec la tension : la baisse est nettement visible. Le module d'alimentation de l'automate voisin, ou la bobine du contacteur qui l'alimente, ne supporte pas une telle baisse : l'automate se réinitialise.

A.4. On installe un **analyseur de réseau** (TRMS, classe A) au point de raccordement commun à la scierie et aux habitations, pendant au moins une semaine de production : il enregistre les creux de tension (profondeur, durée, nombre), les indicateurs de flicker P_{st} et P_{lt}, ainsi que les tensions efficaces et le THD_u, que l'on compare à l'EN 50160.

Partie B – Choix du mode de démarrage

B.1. $\Delta U/U \approx \sqrt{3}\,U\,k\,I_n/S_{cc}$ avec $k = I_d/I_n$:

Démarrage	direct	étoile-triangle	progressif	variateur
I_d (A)	880	293	406	162
ΔS (kVA)	610	203	281	113
$\Delta U/U$	15,2 %	5,1 %	7,0 %	2,8 %

B.2. Seul le **variateur de vitesse** ($2{,}8\,\% \leq 3\,\%$) respecte le contrat. Une variation isolée est à peine remarquée ; répétée à chaque grume, elle fait papilloter l'éclairage des riverains à un rythme auquel l'œil est sensible : c'est le flicker, source de fatigue visuelle et de plaintes. Plus les variations sont fréquentes, plus leur amplitude admissible est faible.

B.3. Le démarrage étoile-triangle provoque une seconde pointe de courant au passage en triangle et divise le couple de démarrage par 3 ; le démarreur progressif ne réduit le courant qu'au prix d'un couple de démarrage plus faible, ce qui allonge le démarrage d'une scie à forte inertie.

Partie C – Pollution harmonique du variateur

C.1. $P_{abs} = P_u/(\eta \times 0{,}97) = 75/(0{,}93 \times 0{,}97) \approx 83{,}1\,\text{kW}$. La tension étant sinusoïdale, $P = \sqrt{3}\,U I_{1\,eff}\cos(\Phi_1)$:

$$I_{1\,eff} = \frac{83{,}1 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 400 \times 0{,}98} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{1\,eff} \approx 122\,\text{A}}$$

C.2. $\text{THD}_i = \sqrt{0{,}40^2 + 0{,}25^2 + 0{,}09^2 + 0{,}06^2}$ soit $\boxed{\text{THD}_i \approx 48\,\%}$

$$I_{eff} = 122{,}5\sqrt{1 + 0{,}484^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{eff} \approx 136\,\text{A}}$$

C.3. $X_{cc} = \dfrac{400^2}{4 \times 10^6} = 40\,\text{m}\Omega$.

Rang n	5	7	11	13
$I_{n\,eff}$ (A)	49,0	30,6	11,0	7,3
$V_{n\,eff} = n\,X_{cc} I_{n\,eff}$ (V)	9,8	8,6	4,8	3,8
$V_{n\,eff}/V$	4,2 %	3,7 %	2,1 %	1,7 %

$$\text{THD}_u = \sqrt{4{,}24^2 + 3{,}71^2 + 2{,}10^2 + 1{,}65^2}\ \% \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{THD}_u \approx 6{,}2\,\%}$$

C.4. Chaque rang reste sous sa limite et $6{,}2\,\% < 8\,\%$: la tension reste conforme à l'EN 50160. Mais la scierie consomme à elle seule plus des trois quarts de la marge disponible, alors que la tension du réseau est déjà un peu déformée par les autres usagers (habitations, artisan) : le moindre ajout de charges non linéaires ferait dépasser les limites. Le réseau rural, de faible S_{cc}, est particulièrement sensible.

Partie D – Inductance de ligne et bilan

D.1. $\text{THD}_i = \sqrt{0{,}30^2 + 0{,}12^2 + 0{,}07^2 + 0{,}05^2}$ soit $\boxed{\text{THD}_i \approx 33\,\%}$

$$I_{eff} = 122{,}5\sqrt{1 + 0{,}334^2} \approx 129\,\text{A}$$

Tensions harmoniques : $V_{5\,eff} \approx 7{,}3\,\text{V}$ (3,2 %) ; $V_{7\,eff} \approx 4{,}1\,\text{V}$ (1,8 %) ; $V_{11\,eff} \approx 3{,}8\,\text{V}$ (1,6 %) ; $V_{13\,eff} \approx 3{,}2\,\text{V}$ (1,4 %), d'où $\boxed{\text{THD}_u \approx 4{,}2\,\%}$.

D.2. $P = 83{,}1\,\text{kW}$ (inchangée) ;

$$Q = \sqrt{3} \times 400 \times 122{,}5 \times \sin(\arccos(0{,}98)) \approx 16{,}9\,\text{kVAR}$$

$$S = \sqrt{3} \times 400 \times 129{,}1 \approx 89{,}5\,\text{kVA}$$

$$D = \sqrt{89{,}45^2 - 83{,}14^2 - 16{,}88^2} \approx 28{,}4\,\text{kVAD}$$

$$f_p = \frac{83{,}1}{89{,}5} \quad \text{soit} \quad \boxed{f_p \approx 0{,}93} \quad \text{(contre 0,88 sans inductance)}$$

D.3. **Conclusion.** En démarrage direct, le moteur de 75 kW provoque à chaque démarrage un creux de tension d'environ 15 %, responsable du papillotement de l'éclairage et de la réinitialisation de l'automate voisin. Ni le démarrage étoile-triangle (5,1 %) ni le démarreur progressif (7,0 %) ne respectent la limite contractuelle de 3 % pour des démarrages fréquents. La scierie installera donc un variateur de vitesse, qui limite la variation de tension à 2,8 %. Ce variateur est une charge non linéaire : seul, il porterait le taux de distorsion de la tension à 6,2 %, conforme mais trop proche de la limite de 8 %. Équipé d'une inductance de ligne, il ramène THD_u à 4,2 % et améliore son facteur de puissance de 0,88 à 0,93. Cette solution supprime les nuisances pour les riverains sans renforcer le réseau.

Pour aller au-delà. Deux autres solutions auraient pu être étudiées. La première consiste à renforcer le réseau : un poste de distribution plus proche ou un câble de plus forte section augmenterait S_{cc} et réduirait à la fois les variations de tension et la distorsion, mais ces travaux sont coûteux et relèvent du gestionnaire du réseau. La seconde consiste à choisir un variateur à redresseur actif (« *active front end* ») : son courant d'entrée est quasi sinusoïdal (THD_i de quelques pour cent) et son facteur de puissance voisin de 1, ce qui rend l'inductance de ligne inutile, pour un prix d'achat plus élevé. Dans tous les cas, une campagne de mesure au point de raccordement, après la mise en service, permet de vérifier que les engagements du contrat sont tenus.

Bilan du chapitre : je sais…

- ☐ lire un spectre, calculer une valeur efficace et un taux de distorsion harmonique ; — ex. 5.1, 5.2
- ☐ faire le bilan des puissances P, Q, S, D d'une charge non linéaire et calculer f_p ; — ex. 5.3, sujet A
- ☐ expliquer la surcharge du neutre et calculer le courant qui le parcourt ; — ex. 5.4
- ☐ expliquer les effets des harmoniques et le risque de résonance ; — ex. 5.5, 5.6
- ☐ choisir et dimensionner un filtre accordé ou un filtre actif ; — ex. 5.5, sujet A
- ☐ analyser un creux de tension et choisir un mode de démarrage adapté. — sujet B

CHAPITRE

6

Convertisseurs électromécaniques

Machine à courant continu, machine asynchrone, machine synchrone

Dans ce chapitre

- Couple, vitesse, puissance mécanique et rendement
- Bilan des puissances et point de fonctionnement
- Machine à courant continu : modèle, démarrage, vitesse
- Machine asynchrone : glissement, plaque, bilan
- Caractéristique mécanique et variation de fréquence U/f
- Machine synchrone : alternateur et moteur

Objectifs

- ✓ Établir le bilan des puissances d'une machine et calculer son rendement
- ✓ Déterminer le point de fonctionnement d'un moteur et de sa charge
- ✓ Exploiter une plaque signalétique et la caractéristique d'un moteur asynchrone
- ✓ Utiliser le modèle de Behn-Eschenburg et tracer le diagramme vectoriel

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 6

Cours — Chapitre 6

6.1 Généralités sur les machines tournantes

Ascenseurs, convoyeurs, pompes, ventilateurs, trains : derrière presque chaque mouvement industriel se trouve un **moteur électrique**. À l'inverse, dans un barrage, une éolienne ou un groupe électrogène, une machine tournante transforme un mouvement en électricité. Ces machines sont des **convertisseurs électromécaniques**.

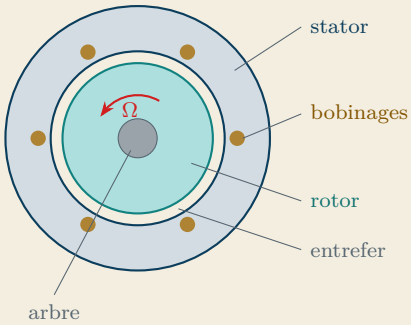
D

Définition Un **convertisseur électromécanique** transforme de la puissance électrique P_e en puissance mécanique P_m (fonctionnement **moteur**) ou de la puissance mécanique en puissance électrique (fonctionnement **génératrice**). Les machines sont **réversibles** : la même machine peut fonctionner dans les deux sens.

Conversion d'énergie et réversibilité

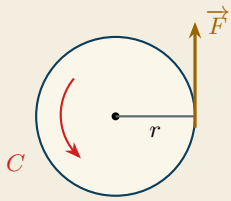
Toute machine tournante comporte :

- un **stator**, partie fixe, et un **rotor**, partie tournante solidaire de l'**arbre**, séparés par un mince espace d'air, l'**entrefer** ;
- un **inducteur**, qui crée le champ magnétique (aimants ou bobinage parcouru par un courant d'excitation I_{exc}) ;
- un **induit**, siège des forces électromotrices et des courants qui produisent le couple.



Couple, vitesse et puissance mécanique

Le **moment du couple** C mesure l'effort de rotation exercé sur l'arbre. Une force F appliquée tangentiellement à la distance r de l'axe crée un couple $C = F \times r$ (voir § 10.2). La vitesse de rotation s'exprime soit par la **fréquence de rotation** N (en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$, lue sur les plaques), soit par la **vitesse angulaire** Ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, utilisée dans les calculs).



★

À retenir

$$C = F \times r \qquad \Omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi}{30} \times N \qquad P_m = C \times \Omega$$

C en $\text{N} \cdot \text{m}$; F en N ; r en m ; Ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$; N en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$; P_m en W.

Ex

Exemple : moteur de convoyeur Un moteur fournit un couple utile $C_u = 48\,\text{N}\cdot\text{m}$ à $N = 1\,450\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$:

$$\Omega = \frac{\pi}{30} \times 1450 \approx 151{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad P_u = C_u\,\Omega = 48 \times 151{,}8 \approx 7{,}29\,\text{kW}$$

À puissance égale, un moteur fournit un grand couple à faible vitesse (levage) ou un faible couple à grande vitesse (ventilation).

✗

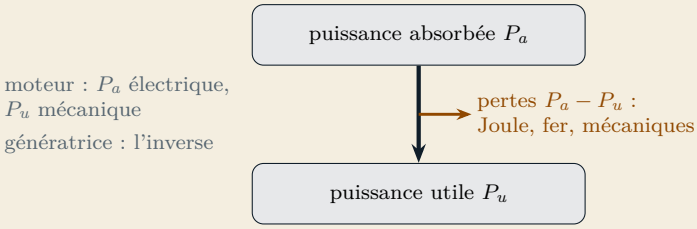
Piège classique Utiliser N en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ dans $P = C\,\Omega$: il faut **toujours** convertir en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Avec $N = 1450$ au lieu de $\Omega = 151{,}8$, on trouve une puissance presque 10 fois trop grande.

Rendement et bilan des puissances

Une machine ne restitue jamais toute la puissance qu'elle reçoit : une partie est perdue en chaleur. On classe les pertes en trois familles :

- ▷ les **pertes par effet Joule** (« pertes cuivre ») dans les enroulements : $R\,I^2$;
- ▷ les **pertes fer** dans le circuit magnétique (hystérésis et courants de Foucault) ;
- ▷ les **pertes mécaniques** : frottements des paliers et des balais, ventilation.

Les pertes fer et mécaniques dépendent surtout de la vitesse et du flux, presque pas de la charge : on les regroupe sous le nom de **pertes collectives** $P_c = P_{fer} + P_{meca}$. On les représente sur un **arbre des pertes** (bilan des puissances) :



★

À retenir

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_u}{P_u + \sum \text{pertes}} < 1 \qquad P_a = P_u + \sum \text{pertes}$$

$$\text{moteur} : \eta = \frac{P_m}{P_e} \qquad \text{génératrice} : \eta = \frac{P_e}{P_m}$$

Puissance électrique : $P_e = U\,I$ en continu, $P_e = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)$ en triphasé.

Ex

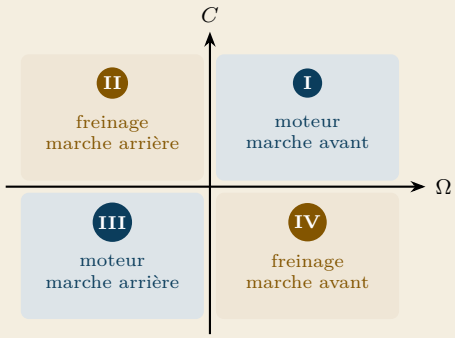
Exemple Le moteur de convoyeur précédent absorbe $P_a = 8{,}2\,\text{kW}$: $\eta = 7290/8200 \approx 0{,}889$, soit $88{,}9\,\%$; les pertes valent $8200 - 7290 = 910\,\text{W}$, évacuées par le ventilateur du moteur.

Les quatre quadrants

On oriente la vitesse Ω et le couple C de la machine. Le signe de $P = C\,\Omega$ indique le mode de fonctionnement :

- ▷ quadrants I et III : $C\,\Omega > 0$, la machine fournit de la puissance mécanique : **moteur** ;
- ▷ quadrants II et IV : $C\,\Omega < 0$, la machine reçoit de la puissance mécanique : **freinage** (génératrice).

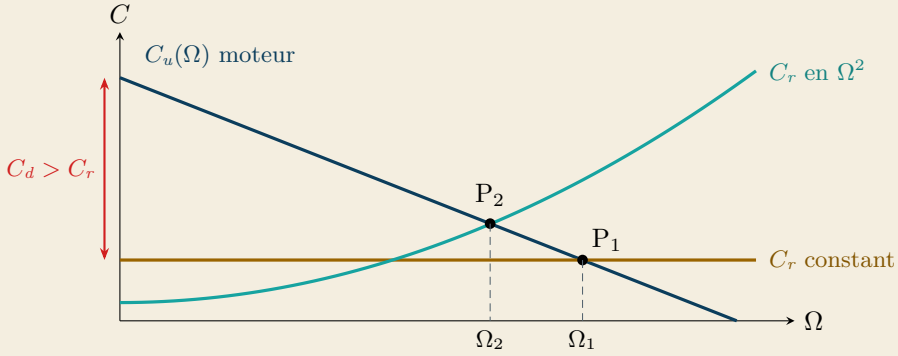
Un ascenseur qui monte fonctionne dans le quadrant I ; lorsqu'il descend chargé, la cabine entraîne le moteur : il freine (quadrant II ou IV selon les sens choisis), et l'énergie peut être renvoyée au réseau si le variateur est réversible.



Démarrage et point de fonctionnement

Un moteur entraîne une **charge** qui lui oppose un couple résistant C_r. La charge a sa propre caractéristique $C_r(\Omega)$: couple constant pour un levage ou un convoyeur, couple qui croît comme Ω^2 pour une pompe centrifuge ou un ventilateur (voir § 10.8).

À retenir · Démarrage et régime établi **Démarrage :** le moteur démarre si son couple au démarrage dépasse le couple résistant : $C_d > C_r$. Tant que $C_u > C_r$, l'ensemble accélère.
Régime établi : la vitesse est constante lorsque $C_u = C_r$. Le **point de fonctionnement** P est l'intersection des caractéristiques $C_u(\Omega)$ du moteur et $C_r(\Omega)$ de la charge.

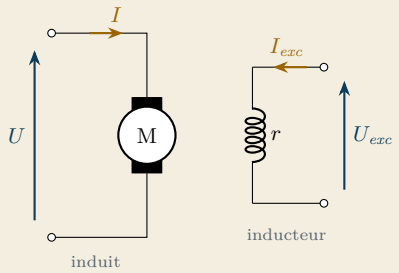


Méthode. Pour trouver le point de fonctionnement : tracer (ou écrire) les deux caractéristiques dans le même repère, puis résoudre $C_u = C_r$, graphiquement ou par le calcul. On en déduit la vitesse, puis la puissance utile $P_u = C_r\,\Omega$.

6.2 Machine à courant continu (MCC)

Constitution et principe

L'**inducteur** (au stator) crée un champ magnétique constant, à l'aide d'aimants permanents ou d'un bobinage parcouru par un courant continu I_{exc}. L'**induit** (au rotor) est alimenté par une source continue à travers le système **balais-collecteur**, qui inverse le sens du courant dans chaque conducteur au bon moment. Les conducteurs de l'induit, parcourus par le courant I et placés dans le champ, sont soumis à des forces de Laplace (voir § 7.6) : c'est le couple moteur. En tournant dans le champ, l'induit est aussi le siège d'une force électromotrice E.



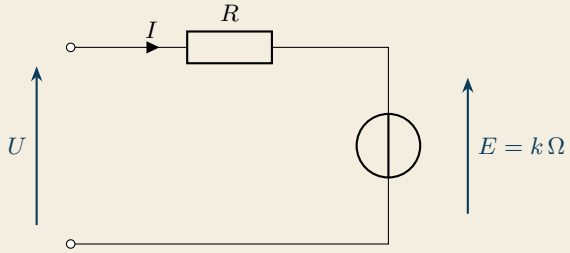
On distingue la MCC **à aimants permanents** (petites puissances : automobile, robotique, portails ; $I_{exc} = 0$) et la MCC **à excitation indépendante** (ou séparée), dont l'inducteur de résistance r est alimenté sous U_{exc} par une source distincte de celle de l'induit. Dans les deux cas, le flux est constant.

Force électromotrice, couple et modèle de l'induit

★ **À retenir** À flux constant (I_{exc} constant ou aimants), en régime établi :

$$E = k\,\Omega \qquad C_{em} = k\,I \qquad U = E + R\,I$$

E : f.é.m. (V) ; k : constante de la machine ($\mathrm{V \cdot s \cdot rad^{-1}}$, ou $\mathrm{N \cdot m \cdot A^{-1}}$, c'est la même) ; C_{em} : couple électromagnétique ($\mathrm{N \cdot m}$) ; I : courant d'induit (A) ; R : résistance de l'induit (Ω).



modèle de l'induit
en convention récepteur
(fonctionnement moteur)

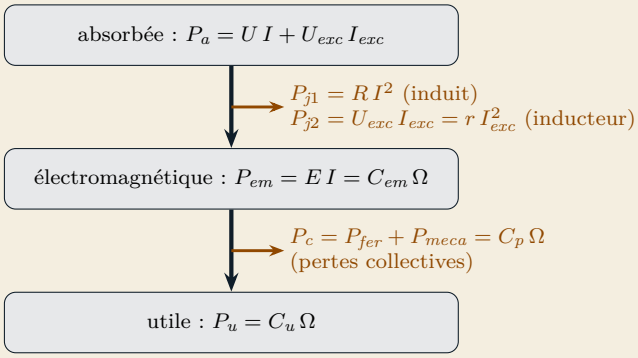
On en tire la relation clé de la MCC :

$$\Omega = \frac{U - R\,I}{k} \approx \frac{U}{k} \quad (\text{si } R\,I \ll U)$$

- le **courant** I est imposé par la **charge mécanique** : en régime établi, $C_{em} = k\,I$ doit équilibrer le couple résistant (et le couple de pertes) ;
- la **vitesse** est réglée par la **tension** U : elle lui est quasiment proportionnelle.

✗ **Piège classique** Confondre k et les unités de vitesse : $E = k\,\Omega$ avec Ω en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Si le constructeur donne E en fonction de N (par exemple « 0,25 V par $\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$ »), il faut convertir avant d'écrire $C_{em} = k\,I$.

Bilan des puissances



★ **À retenir**

$$P_u = P_a - P_{j1} - P_{j2} - P_c \qquad C_{em} = C_u + C_p \qquad \eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{C_u\,\Omega}{U\,I + U_{exc}\,I_{exc}}$$

C_p : couple de pertes, qui correspond aux pertes collectives. Pour une MCC à aimants, $P_{j2} = 0$.

Ex **Exemple : moteur d'une enrouleuse de câbles** MCC à excitation indépendante, à $N = 1\,200\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$. Induit : $U = 440\,\mathrm{V}$, $I = 25\,\mathrm{A}$, $R = 0{,}9\,\Omega$. Inducteur : $U_{exc} = 220\,\mathrm{V}$, $I_{exc} = 1{,}2\,\mathrm{A}$. Pertes collectives : $P_c = 420\,\mathrm{W}$.

$$E = U - R\,I = 440 - 0{,}9 \times 25 = 417{,}5\,\mathrm{V} \qquad \Omega = \frac{\pi}{30} \times 1200 \approx 125{,}7\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

$$k = \frac{E}{\Omega} = \frac{417{,}5}{125{,}7} \approx 3{,}32\,\mathrm{V \cdot s \cdot rad^{-1}}$$

$$P_a = U\,I + U_{exc}\,I_{exc} = 440 \times 25 + 220 \times 1{,}2 = 11\,264\,\mathrm{W}$$

$$P_{j1} = R\,I^2 = 0{,}9 \times 25^2 = 562{,}5\,\mathrm{W} \qquad P_{j2} = U_{exc}\,I_{exc} = 264\,\mathrm{W}$$

$$P_{em} = E\,I = 417{,}5 \times 25 = 10\,437{,}5\,\mathrm{W}$$

$$P_u = P_{em} - P_c = 10\,017{,}5\,\mathrm{W} \qquad \eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{10\,017{,}5}{11\,264} \approx 0{,}889$$

Couple utile : $C_u = P_u/\Omega \approx 79{,}7\,\mathrm{N \cdot m}$. Vérification : $P_a - P_{j1} - P_{j2} = 10\,437{,}5\,\mathrm{W} = E\,I$ ✓.

Démarrage

Au démarrage, le rotor est immobile : $\Omega = 0$ donc $E = 0$. Sous la tension nominale, le courant ne serait limité que par la petite résistance R :

À retenir

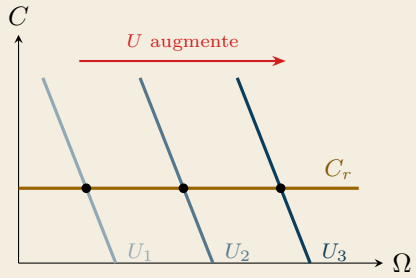
$$I_d = \frac{U}{R} \quad \text{(démarrage direct, } E = 0\text{)}$$

Pour limiter le courant (en général à 1,5 à 2 fois I_n), on démarre sous une tension réduite U_d : avec $E = 0$, la relation $U = E + R\,I$ donne simplement $U_d = R\,I_d$. On augmente ensuite progressivement U (variateur) ; autrefois, on insérait un rhéostat en série avec l'induit. Le couple de démarrage vaut $C_d = k\,I_d$.

Exemple Pour le moteur de l'enrouleuse : en direct, $I_d = 440/0{,}9 \approx 489\,\text{A}$, soit près de 20 fois le courant de 25 A ! Pour limiter le courant à $2 \times 25 = 50\,\text{A}$, il faut démarrer sous $U_d = 0{,}9 \times 50 = 45\,\text{V}$; le couple de démarrage vaut alors $C_d = 3{,}32 \times 50 \approx 166\,\text{N}\cdot\text{m}$, le double du couple nominal : la machine démarre franchement, même en charge.

Variation de vitesse

La caractéristique mécanique $C_{em}(\Omega)$ de la MCC à flux constant est une droite très pentue (car R est faible) : la vitesse varie peu avec la charge. Quand on change U, la droite se déplace **parallèlement** à elle-même. À couple résistant constant, I ne change pas et la vitesse varie presque proportionnellement à U.



Exemple L'enrouleuse doit tourner plus lentement, au même couple ($I = 25\,\text{A}$) : sous $U = 220\,\text{V}$, $\Omega = (220 - 22{,}5)/3{,}32 \approx 59{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $N \approx 568\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Diviser la tension par 2 divise la vitesse par un peu plus de 2.

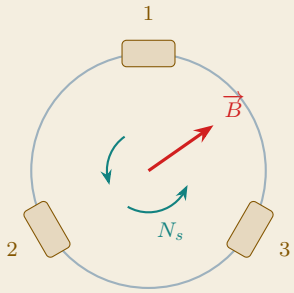
Piège classique Croire qu'on règle la vitesse d'une MCC par le courant : le courant dépend de la **charge**, la vitesse de la **tension**. Autre piège : couper l'excitation d'une MCC à excitation indépendante alimentée : le flux s'effondre, k chute et le moteur peut s'emballer. L'inducteur est donc toujours alimenté **avant** l'induit.

6.3 Machine asynchrone (MAS)

Robuste, simple, peu coûteuse et sans entretien, la machine asynchrone triphasée est **le moteur le plus utilisé dans l'industrie** : pompes, ventilateurs, convoyeurs, compresseurs, machines-outils…

Champ tournant et vitesse de synchronisme

Le **stator** porte trois enroulements identiques, décalés de 120°, alimentés par un système triphasé de courants de fréquence f. Ils créent un **champ magnétique tournant** à la **vitesse de synchronisme** N_s. Si chaque enroulement est réparti en p paires de pôles, le champ tourne p fois moins vite que la pulsation des courants.
Pour inverser le sens de rotation, il suffit de **permuter deux phases** d'alimentation.



À retenir

$$N_s = \frac{60\,f}{p} \qquad \Omega_s = \frac{2\pi f}{p}$$

N_s en $\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$; Ω_s en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; f : fréquence des courants statoriques (Hz) ; p : nombre de **paires** de pôles.

Nombre de pôles $2p$	2	4	6	8
N_s à 50 Hz ($\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$)	3000	1500	1000	750

Piège classique Confondre pôles et paires de pôles : un moteur « 4 pôles » a $p = 2$. Sur une plaque, on retrouve p à partir de la vitesse nominale : $N_n = 1\,455\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$ est un peu inférieure à $1\,500\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$, donc $N_s = 1\,500\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$ et $p = 2$.

Principe et glissement

Le **rotor**, le plus souvent « à cage d'écureuil » (barres d'aluminium court-circuitées par deux anneaux), n'est relié à rien. Balayé par le champ tournant, il est le siège de courants induits qui, d'après la loi de Lenz (voir § 7.7), s'opposent à la cause qui leur a donné naissance : le rotor est entraîné pour tenter de « rattraper » le champ. Il tourne à une vitesse N proche de N_s, **sans jamais l'atteindre** : à $N = N_s$, il n'y aurait plus de variation de flux, donc plus de courants induits ni de couple. D'où le nom d'**asynchrone**.

À retenir

$$g = \frac{N_s - N}{N_s} = \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s} \qquad N = (1-g)\,N_s$$

Le **glissement** g vaut quelques pour cent au régime nominal ; $g = 1$ au démarrage ($N = 0$) ; $g \approx 0$ à vide. En moteur, $0 < g < 1$.

Exemple Moteur 4 pôles ($p = 2$) sur le réseau 50 Hz, tournant à $N = 1\,455\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$:

$$N_s = \frac{60 \times 50}{2} = 1\,500\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}} \qquad g = \frac{1500 - 1455}{1500} = 0{,}03 \text{ soit } 3\,\%$$

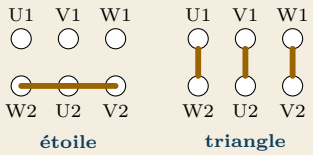
Plaque signalétique et couplage

La plaque donne les grandeurs **nominales** : puissance **utile** (mécanique) P_u, fréquence de rotation N_n, facteur de puissance, et deux tensions avec les courants en ligne correspondants.

La **plus petite** tension de la plaque est celle que supporte **un enroulement**. On choisit le couplage pour que chaque enroulement reçoive cette tension (voir § 2.3) :

- ▷ **étoile** (Y) si la tension entre phases du réseau est égale à la plus **grande** tension de la plaque ;
- ▷ **triangle** (Δ) si elle est égale à la plus **petite**.

MOT. 3 ~	IP55	IE3
7,5 kW	1 455 tr/min	
Δ 400 V	14,3 A	
Y 690 V	8,3 A	
cos(Φ) 0,84	50 Hz	



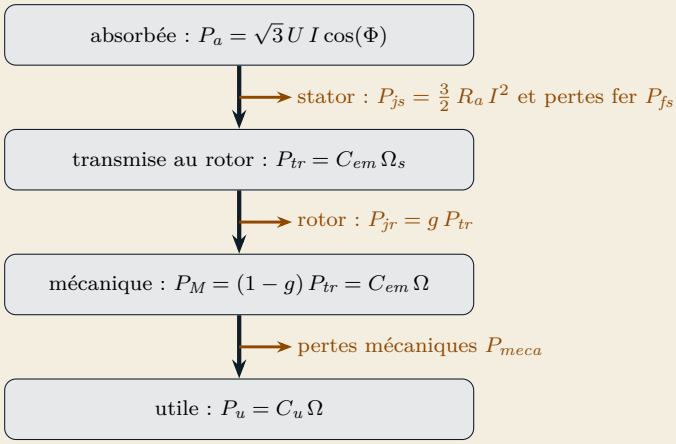
plaque et barrettes de la plaque à bornes

6

Ex

Exemple Le moteur ci-dessus, alimenté par le réseau 230 V/400 V (400 V entre phases), doit être couplé en **triangle** : chaque enroulement reçoit alors 400 V, et le courant en ligne vaut 14,3 A. Sur un réseau 400 V/690 V, on le couplerait en étoile.

Bilan des puissances



★

À retenir

$$P_{tr} = P_a - P_{js} - P_{fs} \qquad P_{jr} = g\,P_{tr} \qquad P_u = P_{tr} - P_{jr} - P_{meca}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{C_u\,\Omega}{\sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)}$$

R_a : résistance mesurée **entre deux bornes** du stator ($P_{js} = \frac{3}{2}R_aI^2$ quel que soit le couplage) ; I : courant en ligne. Les pertes fer du rotor sont négligées (la fréquence des courants rotoriques, $g\,f$, est très faible).

✗ **Piège classique** Prendre P_a égale à la puissance de la plaque : la plaque indique la puissance **utile**. Autre erreur : écrire $P_{js} = 3\,R_a\,I^2$ avec la résistance mesurée entre deux bornes.

Ex **Exemple : le moteur de 7,5 kW au régime nominal** $U = 400\,\text{V}$, $I = 14{,}3\,\text{A}$, $\cos(\Phi) = 0{,}84$, $R_a = 0{,}8\,\Omega$, $P_{fs} = 200\,\text{W}$, $P_{meca} = 140\,\text{W}$, $g = 0{,}03$.

$$P_a = \sqrt{3} \times 400 \times 14{,}3 \times 0{,}84 \approx 8\,322\,\text{W} \qquad P_{js} = 1{,}5 \times 0{,}8 \times 14{,}3^2 \approx 245\,\text{W}$$

$$P_{tr} = 8322 - 245 - 200 = 7\,877\,\text{W} \qquad P_{jr} = 0{,}03 \times 7877 \approx 236\,\text{W}$$

$$P_u = 7877 - 236 - 140 \approx 7\,500\,\text{W} \qquad \eta = \frac{7500}{8322} \approx 0{,}901$$

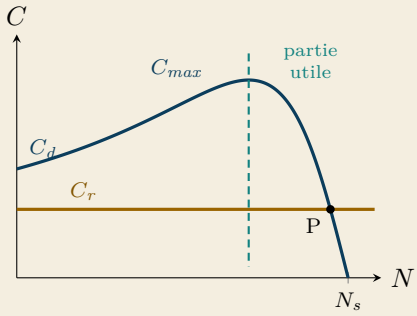
$$C_u = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{7500}{\frac{\pi}{30} \times 1455} \approx 49{,}2\,\text{N}\cdot\text{m}$$

On retrouve bien la puissance utile de la plaque.

\+ **Séparer les pertes par l'essai à vide** – hors programme À vide, $g \approx 0$ et $P_u = 0$: la puissance absorbée P_0 couvre les pertes Joule statoriques à vide, les pertes fer et les pertes mécaniques. On en déduit $P_{fs} + P_{meca} = P_0 - \frac{3}{2} R_a I_0^2$; faute de mieux, on partage souvent cette somme en deux parts égales.

Caractéristique mécanique et point de fonctionnement

La courbe $C_{em}(N)$ part du couple de démarrage C_d (à $N = 0$), passe par un couple maximal, puis chute jusqu'à 0 au synchronisme. En fonctionnement normal, le moteur travaille dans la **partie utile**, entre le couple maximal et N_s : elle est pratiquement **rectiligne**. La vitesse varie alors peu avec la charge.



★ **À retenir** Dans sa partie utile, $C_{em}(N)$ est une droite passant par $(N_s\,;0)$ et par le point nominal $(N_n\,;C_{un})$:

$$C_{em} = K\,(N_s - N) \qquad K = \frac{C_{un}}{N_s - N_n} \qquad C_{un} = \frac{P_{un}}{\frac{\pi}{30}\,N_n}$$

(pertes mécaniques négligées : $C_u \approx C_{em}$). Le point de fonctionnement vérifie $C_{em} = C_r$.

Ex

Exemple Moteur de 7,5 kW : $C_{un} \approx 49{,}2\,\text{N}\cdot\text{m}$ et $K = 49{,}2/(1500-1455) \approx 1{,}094\,\text{N}\cdot\text{m}/(\text{tr}\cdot\text{min}^{-1})$. Il entraîne une pompe volumétrique de couple constant $C_r = 40\,\text{N}\cdot\text{m}$:

$$N = N_s - \frac{C_r}{K} = 1500 - \frac{40}{1{,}094} \approx 1\,463\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$$

Démarrage

Au démarrage ($g = 1$), le moteur appelle un courant de **5 à 8 fois** son courant nominal, pendant quelques secondes : chute de tension sur le réseau, contraintes sur l'installation. Le couple de démarrage vaut typiquement 1,5 à 2,5 fois le couple nominal. Le moteur démarre si $C_d > C_r$. Pour limiter le courant tout en gardant du couple, on utilise un **variateur de vitesse** (voir § 8.10) : il démarre à basse fréquence, avec le couple nominal et un courant proche du courant nominal.

\+

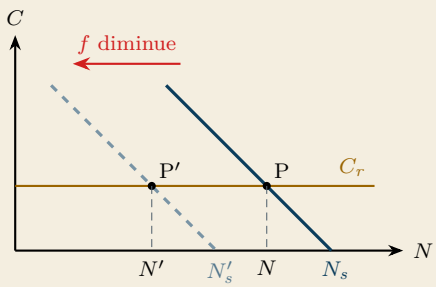
Démarrage étoile-triangle et démarreur progressif – hors programme **Étoile-triangle :** on couple d'abord en étoile un moteur prévu pour fonctionner en triangle ; chaque enroulement reçoit une tension $\sqrt{3}$ fois plus faible, ce qui divise **par 3** le courant en ligne **et le couple** de démarrage. Pour une charge qui exige un fort couple dès l'arrêt (convoyeur chargé, broyeur), le couple divisé par 3 peut devenir inférieur au couple résistant : le moteur ne démarre pas et chauffe. **Démarreur progressif** (gradateur) : la tension monte progressivement ; il convient aux charges faibles à l'arrêt (pompes centrifuges, ventilateurs).

Ex

Exemple Le moteur de 7,5 kW ($I_n = 14{,}3\,\text{A}$, $C_{un} \approx 49{,}2\,\text{N}\cdot\text{m}$) a un courant de démarrage de $7\,I_n \approx 100\,\text{A}$ et un couple de démarrage de $2\,C_{un} \approx 98\,\text{N}\cdot\text{m}$. En étoile-triangle : $100/3 \approx 33\,\text{A}$ et $98/3 \approx 33\,\text{N}\cdot\text{m}$, moins que les $40\,\text{N}\cdot\text{m}$ de la pompe volumétrique : il faut ici un variateur.

Variation de vitesse à U/f constant

Un **variateur de vitesse** (redresseur puis onduleur) alimente le moteur sous une fréquence f réglable. Il maintient le rapport U/f constant pour garder le flux, donc le couple maximal, constant. La partie utile de la caractéristique se **translate** alors parallèlement à elle-même : même pente K, mais elle coupe l'axe en $N'_s = 60\,f'/p$.
À couple résistant donné, l'écart $N_s - N$ reste le même : $N' = N'_s - (N_s - N)$.



À retenir

$$\frac{U}{f} = \frac{U'}{f'} = \text{constante} \qquad N'_s = \frac{60\,f'}{p}$$

$$N'_s - N' = N_s - N \quad \text{(même couple)}$$

Exemple La pompe précédente ($C_r = 40\,\text{N}\cdot\text{m}$) doit tourner à $N' = 1\,000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. L'écart reste $1500 - 1463 = 37\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ (plus précisément 36,6) :

$$N'_s = 1000 + 36{,}6 \approx 1\,037\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$$

$$f' = \frac{p\,N'_s}{60} = \frac{2 \times 1037}{60} \approx 34{,}6\,\text{Hz}$$

$$U' = U \times \frac{f'}{f} = 400 \times \frac{34{,}6}{50} \approx 276\,\text{V}$$

Piège classique Baisser la fréquence sans baisser la tension : le flux augmente, le circuit magnétique sature et le courant devient excessif. C'est pour cela que le variateur garde U/f constant.

Au-delà de la commande à U/f constante – hors programme **Défluxage.** Au-dessus de 50 Hz, la tension ne peut plus augmenter : le flux, donc le couple maximal, diminuent (fonctionnement « défluxé »).
Freinage hypersynchrone. Si la charge entraîne le moteur au-delà de N_s (descente d'une charge, ralentissement commandé par le variateur), le glissement devient négatif : la machine fonctionne en **génératrice asynchrone** et renvoie de l'énergie vers le variateur. Celui-ci la dissipe dans une résistance de freinage, ou la renvoie au réseau s'il est réversible.

En ligne : caractéristique $C_{em}(N)$ interactive : faites varier la fréquence et le couple résistant, observez le déplacement du point de fonctionnement ; calculateur de glissement et de bilan de puissances.

6.4 Machine synchrone (MS)

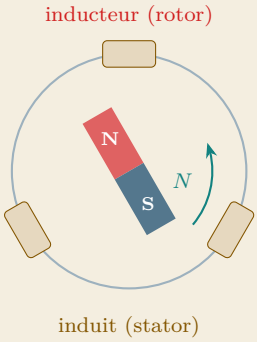
Constitution et vitesse

Dans la machine synchrone, les rôles sont inversés par rapport à la machine asynchrone :

- l'**inducteur** est le **rotor** : aimants permanents, ou bobinage alimenté en continu par I_{exc} (à travers des bagues ou par une excitatrice montée sur l'arbre) ; il porte p paires de pôles ;

- l'**induit** est le **stator** : trois enroulements décalés de 120°, reliés au réseau ou à la charge.

Le champ du rotor et le champ tournant du stator tournent **ensemble** : la vitesse du rotor est rigoureusement liée à la fréquence.



★ **À retenir**

$$N = N_s = \frac{60\,f}{p} \qquad \text{soit} \qquad f = \frac{p\,N}{60}$$

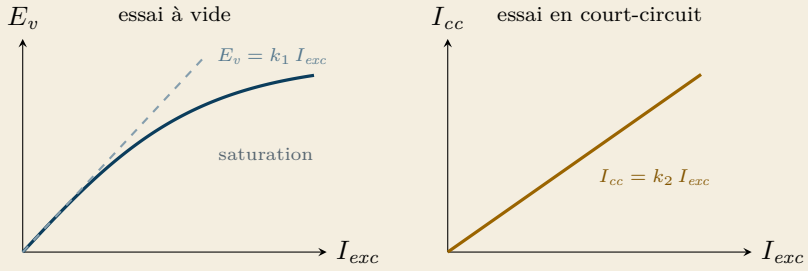
Ex **Exemple** Un turboalternateur de centrale thermique ($p = 1$) tourne à $3\,000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ pour produire du $50\,\text{Hz}$; l'alternateur d'une turbine hydraulique lente à $150\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ doit avoir $p = 60 \times 50/150 = 20$ paires de pôles. Un groupe électrogène dont le moteur diesel ralentit de 1500 à $1\,470\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ ($p = 2$) fournit du $2 \times 1470/60 = 49\,\text{Hz}$.

L'alternateur : force électromotrice et essais

Fonctionnant en génératrice, la machine synchrone s'appelle un **alternateur** : c'est elle qui produit la quasi-totalité de l'électricité (centrales, barrages, éoliennes, groupes électrogènes). Entraîné à vitesse constante, le rotor crée dans chaque enroulement du stator une f.é.m. sinusoïdale de valeur efficace E_v, proportionnelle à la vitesse et au flux. Tant que la machine n'est pas saturée, à vitesse donnée :

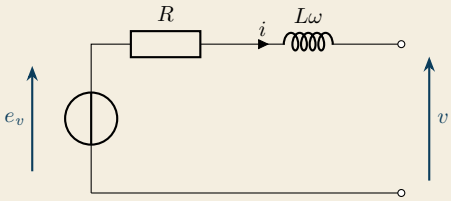
★ **À retenir · Essais de l'alternateur (à la vitesse nominale)** **À vide** ($I = 0$) : la tension simple mesurée est la f.é.m. : $V = E_v = k_1\,I_{exc}$.
En court-circuit (stator court-circuité, sous excitation réduite) : $I_{cc} = k_2\,I_{exc}$.
Impédance synchrone (à même I_{exc}) :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{E_v}{I_{cc}} = \frac{k_1}{k_2} \qquad L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2}$$



Modèle de Behn-Eschenburg et diagramme vectoriel

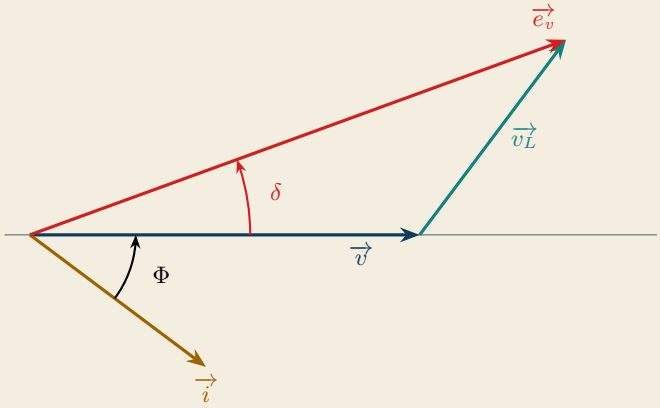
Pour une phase de l'alternateur (couplage étoile, machine non saturée), l'induit est équivalent à la f.é.m. $e_v(t)$ en série avec la résistance R d'un enroulement et la **réactance synchrone** $L\omega$. On l'étudie en convention générateur.



À retenir · Modèle de Behn-Eschenburg (alternateur, par phase)

$$\underline{e_v} = \underline{v} + R\,\underline{i} + jL\omega\,\underline{i} \qquad \text{soit, } R \text{ négligée : } \quad \overrightarrow{e_v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_L}$$

$\overrightarrow{v_L}$: **en avance de** 90° **sur** $\overrightarrow{i}$, de longueur $L\omega\, I$.



charge inductive
$\Phi > 0$: $\overrightarrow{i}$ en retard
δ : angle interne

Méthode : tracer le diagramme. **1.** Tracer $\overrightarrow{v}$ horizontal (origine des phases). **2.** Tracer $\overrightarrow{i}$ décalé de Φ (en retard si la charge est inductive). **3.** Au bout de $\overrightarrow{v}$, tracer $\overrightarrow{v_L}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{i}$, en avance sur lui, de longueur $L\omega\, I$ (à l'échelle des tensions). **4.** $\overrightarrow{e_v}$ joint l'origine à l'extrémité de $\overrightarrow{v_L}$: on mesure E_v, puis on calcule $I_{exc} = E_v/k_1$.

Ex

Exemple : alternateur d'un groupe électrogène Essais : $k_1 = 60\,\text{V}\cdot\text{A}^{-1}$, $k_2 = 25$; d'où $Z = 60/25 = 2{,}4\,\Omega$; avec $R = 0{,}15\,\Omega$, $L\omega = \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}15^2} \approx 2{,}4\,\Omega$ (R est négligeable devant $L\omega$). L'alternateur débite $I = 60\,\text{A}$ sous $V = 230\,\text{V}$, avec $\cos(\Phi) = 0{,}8$ inductif ($\Phi = 36{,}87°$, $\sin(\Phi) = 0{,}6$) : $L\omega\, I = 144\,\text{V}$. Par projection sur les deux axes :

$$E_v = \sqrt{(V + L\omega I\sin(\Phi))^2 + (L\omega I\cos(\Phi))^2} = \sqrt{316{,}4^2 + 115{,}2^2} \approx 337\,\text{V}$$

$$I_{exc} = \frac{E_v}{k_1} = \frac{337}{60} \approx 5{,}6\,\text{A} \qquad \text{angle interne } \delta \approx 20°$$

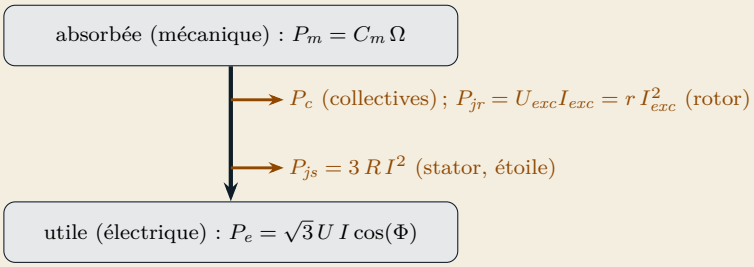
Pour maintenir $V = 230\,\text{V}$ quand le courant débité augmente, il faut augmenter l'excitation : c'est le rôle du régulateur de tension.

✗

Piège classique Ajouter les valeurs efficaces : $E_v \neq V + L\omega\, I$ ($230 + 144 = 374 \neq 337$) ; on additionne des **vecteurs**. Autre piège : utiliser la tension composée U dans le modèle, qui est **par phase** : on travaille avec la tension simple $V = U/\sqrt{3}$.

Influence de la nature de la charge. À courant I donné, la f.é.m. nécessaire, donc l'excitation, dépend du déphasage. Charge inductive : $\overrightarrow{v_L}$ s'ajoute presque dans le sens de $\overrightarrow{v}$ et E_v est nettement plus grande que V (337 V dans l'exemple). Charge résistive ($\Phi = 0$) : $\overrightarrow{v_L}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$ et $E_v = \sqrt{V^2 + (L\omega I)^2} \approx 271\,\text{V}$. Charge capacitive : $\overrightarrow{v_L}$ « recule » et E_v peut devenir inférieure à V.

Bilan des puissances de l'alternateur



★

À retenir

$$P_m = P_e + P_{js} + P_{jr} + P_c \qquad \eta = \frac{P_e}{P_m} = \frac{\sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)}{\sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi) + P_{js} + P_{jr} + P_c}$$

(excitation fournie par l'arbre ; si elle vient d'une source extérieure, P_{jr} s'ajoute à la puissance absorbée).

Ex

Exemple Pour le groupe électrogène ($U = 400\,\text{V}$, $I = 60\,\text{A}$, $\cos(\Phi) = 0{,}8$, $R = 0{,}15\,\Omega$, inducteur $r = 4\,\Omega$, $P_c = 900\,\text{W}$, $N = 1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$) :

$$P_e = \sqrt{3} \times 400 \times 60 \times 0{,}8 \approx 33\,255\,\text{W}$$

$$P_{js} = 3 \times 0{,}15 \times 60^2 = 1\,620\,\text{W}$$

$$P_{jr} = r\,I_{exc}^2 = 4 \times 5{,}61^2 \approx 126\,\text{W}$$

$$P_m = 33255 + 1620 + 126 + 900 \approx 35\,901\,\text{W}$$

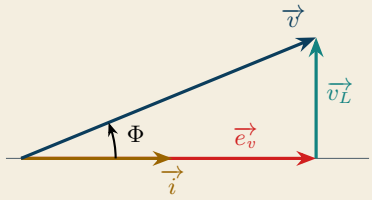
$$\eta = \frac{P_e}{P_m} = \frac{33255}{35901} \approx 0{,}926 \qquad C_m = \frac{P_m}{\Omega} = \frac{35901}{157{,}1} \approx 229\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Le moteur synchrone

En moteur, on étudie la machine en convention récepteur : le sens du courant est inversé et, R négligée,

$$\underline{v} = \underline{e_v} + jL\omega\,\underline{i}$$

Le moteur tourne exactement à N_s, quelle que soit la charge, tant que le couple demandé ne dépasse pas le couple maximal : au-delà, il **décroche** et s'arrête. Branché directement sur le réseau, il **ne démarre pas seul** : le champ tourne trop vite pour que le rotor « s'accroche ».



moteur autopiloté : $\vec{i}$ en phase avec $\vec{e_v}$

Aujourd'hui, le moteur synchrone, souvent **à aimants permanents** (MSAP), est alimenté par un variateur qui mesure la position du rotor et impose la fréquence et la phase des courants : il démarre à fréquence nulle, ne peut plus décrocher et fournit son couple à toute vitesse (**autopilotage**). C'est le moteur des véhicules électriques, des trains à grande vitesse, des ascenseurs sans réducteur et de nombreux servomoteurs. Sa puissance absorbée vaut :

★

À retenir

$$P_a = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi) = 3\,V\,I\cos(\Phi)$$

+

Couple du moteur synchrone – hors programme

$$C_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega_s} = \frac{3\,E_v\,I\cos(\Psi)}{\Omega_s}$$

Ψ : déphasage entre $\vec{i}$ et $\vec{e_v}$ ($\Psi = 0$ pour le moteur autopiloté ci-dessus). Pour un moteur à rotor bobiné, l'excitation règle le facteur de puissance : sur-excité, il fournit de la puissance réactive au réseau.

Ex

Exemple : compresseur d'une unité de liquéfaction d'air Un compresseur est entraîné par un moteur synchrone à rotor bobiné de 800 kW utiles, à 6 pôles ($p = 3$), alimenté sous 5,5 kV, 50 Hz, de rendement 0,96. L'excitation est réglée pour obtenir $\cos(\Phi) = 1$.

$$N = \frac{60 \times 50}{3} = 1\,000\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$C_u = \frac{800000}{\frac{\pi}{30} \times 1000} \approx 7\,640\,\text{N} \cdot \text{m}$$

$$P_a = \frac{800}{0{,}96} \approx 833\,\text{kW}$$

$$I = \frac{P_a}{\sqrt{3}\,U\cos(\Phi)} = \frac{833333}{\sqrt{3} \times 5500 \times 1} \approx 87{,}5\,\text{A}$$

Avec un moteur asynchrone de même puissance ($\cos(\Phi) \approx 0{,}87$), le courant serait d'environ 100 A : le moteur synchrone soulage le réseau de l'usine.

6

✗

Piège classique Chercher un glissement pour une machine synchrone : sa vitesse est **exactement** N_s. Quand la charge augmente, ce n'est pas la vitesse qui baisse, c'est l'angle interne δ entre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{e_v}$ qui augmente, jusqu'au décrochage.

Bilan comparatif des trois machines

	Avantages	Inconvénients
MCC	vitesse réglée simplement par U, fort couple de démarrage	balais et collecteur (usure, entretien, étincelles), limitée à 1 MW environ
MAS	robuste, peu coûteuse, sans entretien, démarrage direct possible	fort courant de démarrage, vitesse liée à la charge, consomme du réactif
MS	vitesse fixe $N = N_s$, très bon rendement, compacte (aimants), $\cos(\Phi)$ réglable	ne démarre pas seule sur le réseau, risque de décrochage, coût

Même si les moteurs synchrones ont un très bon rendement, les moteurs asynchrones restent les plus utilisés dans l'industrie : ils sont moins coûteux, moins volumineux, plus faciles à entretenir, compatibles avec la grande majorité des machines industrielles, et pilotés efficacement par un variateur de vitesse.

En ligne : diagramme de Behn-Eschenburg interactif : réglez le courant débité, le déphasage et la réactance synchrone, et lisez E_v et l'angle interne ; QCM d'auto-évaluation sur les trois machines.

L'essentiel

Chapitre 6

Grandeurs mécaniques et machine à courant continu

Couple d'une force	$C = F \times r$
Vitesse angulaire	$\Omega = \dfrac{2\pi N}{60} = \dfrac{\pi}{30} \times N$
Puissance mécanique	$P_m = C \times \Omega$
Puissance électrique	$P_e = U\,I$ (continu) $\qquad P_e = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)$
Rendement	$\eta = \dfrac{P_u}{P_a} \qquad P_a = P_u + \sum \text{pertes}$
Mode de fonctionnement	$C\,\Omega > 0$: moteur $\qquad C\,\Omega < 0$: freinage
Démarrage ; régime établi	$C_d > C_r \qquad C_u = C_r$
MCC : f.é.m. et couple	$E = k\,\Omega \qquad C_{em} = k\,I$
MCC : modèle de l'induit	$U = E + R\,I$
MCC : vitesse	$\Omega = \dfrac{U - R\,I}{k}$
MCC : démarrage	$I_d = \dfrac{U}{R}$
MCC : puissance absorbée	$P_a = U\,I + U_{exc}\,I_{exc}$
MCC : pertes Joule	$P_{j1} = R\,I^2 \qquad P_{j2} = U_{exc}\,I_{exc} = r\,I_{exc}^2$
MCC : puissance P_{em}	$P_{em} = E\,I = C_{em}\,\Omega$
MCC : pertes collectives	$P_c = C_p\,\Omega \qquad C_{em} = C_u + C_p$
MCC : puissance utile	$P_u = P_a - P_{j1} - P_{j2} - P_c = C_u\,\Omega$
MCC : rendement	$\eta = \dfrac{C_u\,\Omega}{U\,I + U_{exc}\,I_{exc}}$

Machine asynchrone et machine synchrone

Vitesse de synchronisme	$N_s = \dfrac{60\,f}{p} \qquad \Omega_s = \dfrac{2\pi f}{p}$
Glissement	$g = \dfrac{N_s - N}{N_s} \qquad N = (1-g)\,N_s$
MAS : puissance absorbée	$P_a = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)$
MAS : pertes Joule au stator	$P_{js} = \dfrac{3}{2}\,R_a\,I^2$
MAS : puissance transmise	$P_{tr} = P_a - P_{js} - P_{fs} = C_{em}\,\Omega_s$
MAS : pertes Joule au rotor	$P_{jr} = g\,P_{tr}$
MAS : puissance utile	$P_u = (1-g)\,P_{tr} - P_{meca} = C_u\,\Omega$
MAS : rendement	$\eta = \dfrac{C_u\,\Omega}{\sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)}$
MAS : partie utile de $C_{em}(N)$	$C_{em} = K\,(N_s - N) \qquad K = \dfrac{C_{un}}{N_s - N_n}$
MAS : commande à U/f constant	$\dfrac{U}{f} = \dfrac{U'}{f'} \qquad N'_s - N' = N_s - N$
MS : vitesse	$N = N_s = \dfrac{60\,f}{p}$
MS : essais (vide, court-circuit)	$E_v = k_1\,I_{exc} \qquad I_{cc} = k_2\,I_{exc}$
MS : impédance synchrone	$Z = \dfrac{E_v}{I_{cc}} = \dfrac{k_1}{k_2} \qquad L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2}$
Alternateur : Behn-Eschenburg	$\underline{e_v} = \underline{v} + R\,\underline{i} + jL\omega\,\underline{i}$
Moteur synchrone (R négligée)	$\underline{v} = \underline{e_v} + jL\omega\,\underline{i}$
Alternateur : bilan	$P_m = P_e + P_{js} + P_{jr} + P_c \qquad P_{js} = 3\,R\,I^2$
Alternateur : rendement	$\eta = \dfrac{P_e}{P_m} = \dfrac{\sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)}{C_m\,\Omega}$

Exercices

Chapitre 6

Grandeurs mécaniques et machine à courant continu

Exercice 6.1 – Monte-charge d'un entrepôt ★☆☆

Une entreprise de logistique installe un monte-charge pour transférer des palettes entre le rez-de-chaussée et la mezzanine de son entrepôt. Le câble s'enroule sur le tambour d'un treuil, entraîné par un moteur électrique à travers un réducteur. Avant de valider la commande, le responsable technique demande de vérifier les grandeurs mécaniques annoncées par le fournisseur et le rendement de l'ensemble.

Données

- Masse soulevée (palette et plateau) : $m = 800\,\text{kg}$; vitesse de montée constante : $v = 0{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}81\,\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$.
- Diamètre du tambour : $D = 40\,\text{cm}$; hauteur de levage : $h = 12\,\text{m}$.
- Réducteur : le moteur tourne 60 fois plus vite que le tambour ; rendement du réducteur $\eta_{red} = 0{,}95$.
- Pendant la montée, le moteur absorbe une puissance électrique $P_a = 5{,}2\,\text{kW}$.

1. Calculer la force F exercée par le câble sur le tambour (montée à vitesse constante), puis le moment du couple C_t qu'elle crée sur l'axe du tambour.
2. Calculer la vitesse angulaire Ω_t du tambour, puis sa fréquence de rotation N_t en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
3. Calculer la puissance mécanique P_t reçue par le tambour de deux façons : $C_t\,\Omega_t$ et $F\,v$.
4. Calculer la fréquence de rotation N_m du moteur, sa puissance utile P_u et son couple utile C_u.
5. Calculer le rendement global η_g de l'installation, puis le rendement η_m du moteur.
6. Calculer la durée d'une montée, l'énergie électrique consommée (en kJ puis en $\text{W}\cdot\text{h}$) et l'énergie potentielle gagnée par la charge.
7. À la descente, la charge est retenue par le moteur, qui tourne en sens inverse. Dans quel quadrant fonctionne-t-il ? Que devient l'énergie ?

→ corrigé p. 212

Exercice 6.2 – Moteur d'un portail coulissant ★☆☆

Un fabricant de portails automatiques équipe son nouveau modèle d'un moteur à courant continu à aimants permanents, alimenté en 24 V par une carte électronique. Le service après-vente constate que certaines cartes grillent lorsque le portail reste

bloqué par un obstacle. Le technicien d'essais doit caractériser le moteur.

Données

- ▷ Résistance de l'induit : $R = 0{,}35\,\Omega$.
- ▷ Point de fonctionnement nominal : $U = 24\,\text{V}$, $I = 6{,}5\,\text{A}$, $N = 2\,800\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
- ▷ Pertes collectives : $P_c = 9\,\text{W}$, supposées constantes.

1. Dessiner le modèle électrique de l'induit en convention récepteur, en plaçant U, I, E et R.
2. Calculer la f.é.m. E, puis la constante k du moteur.
3. Calculer le moment du couple électromagnétique C_{em} et la puissance électromagnétique P_{em}.
4. Établir le bilan des puissances : puissance absorbée, pertes Joule, puissance utile. En déduire le rendement η et le couple utile C_u.
5. Le portail est bloqué : le moteur, alimenté sous 24 V, ne tourne plus. Calculer le courant appelé. Expliquer pourquoi les cartes grillent et proposer une solution.
6. Le moteur tourne à vide sous 24 V et absorbe 0,4 A. Calculer sa fréquence de rotation à vide.

→ corrigé p. 213

Exercice 6.3 – Rénovation d'un ascenseur à courant continu ★★☆

Un bailleur social modernise l'ascenseur d'un immeuble des années 1980. Le treuil est entraîné par un moteur à courant continu à excitation indépendante, désormais alimenté par un redresseur commandé (variateur) qui règle la tension d'induit. Le technicien de l'ascensoriste doit paramétrer le variateur : limitation du courant au démarrage et petite vitesse d'approche aux étages.

Données

- ▷ Plaque du moteur : induit $U_n = 440\,\text{V}$, $I_n = 42\,\text{A}$, $N_n = 1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$; excitation $U_{exc} = 220\,\text{V}$, $I_{exc} = 1{,}5\,\text{A}$.
- ▷ Résistance de l'induit : $R = 0{,}55\,\Omega$. Pertes collectives au régime nominal : $P_c = 600\,\text{W}$; on admet que le couple de pertes C_p est constant.
- ▷ L'excitation est constante. Cabine pleine à la montée, le moteur fonctionne au régime nominal.

I- Régime nominal

1. Calculer la f.é.m. E_n et la constante k du moteur.
2. Représenter l'arbre des pertes, puis calculer P_a, P_{j1}, P_{j2}, P_{em}, P_u et le rendement η_n.
3. Calculer C_{em}, C_p et le couple utile C_u. Vérifier que $C_u\,\Omega_n = P_u$.

II- Démarrage

4. Calculer le courant qu'appellerait un démarrage direct sous U_n. Conclure.

5. Le variateur limite le courant à $1{,}5\,I_n$. Calculer la tension U_d à appliquer au démarrage et le couple électromagnétique de démarrage. La cabine pleine démarre-t-elle ?

III- Variation de vitesse

6. Cabine pleine (couple résistant inchangé), montrer que le courant reste égal à I_n, quelle que soit la vitesse.

7. Établir la relation $N = f(U)$ pour $I = I_n$, puis tracer cette caractéristique pour U variant de 0 à 440 V.

8. Calculer la tension à imposer pour la vitesse d'approche $N' = 300\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, puis le rendement du moteur à cette vitesse. Commenter.

9. À la descente, cabine pleine, le moteur retient la charge. Dans quel quadrant fonctionne-t-il ? Quelle condition doit remplir le variateur pour renvoyer l'énergie au réseau ?

→ corrigé p. 214

Machine asynchrone

Exercice 6.4 – Pompe de relevage d'une station d'épuration ★☆☆

Une station d'épuration remplace la pompe de relevage qui envoie les eaux usées vers les bassins de traitement. L'électricien doit raccorder le nouveau moteur asynchrone sur le réseau 230 V/400 V, 50 Hz, et préparer la fiche de maintenance du moteur à partir de sa plaque signalétique :

MOT. 3 ~		IP68		50 Hz
5,5 kW		2 905 tr/min		cos(Φ) 0,86
Δ 230 V	18,4 A	Y 400 V	10,6 A	$I_d/I_n = 7{,}5$

1. Quel type de conversion d'énergie réalise ce moteur ? Que représente la puissance de 5,5 kW indiquée sur la plaque ?

2. Quel couplage faut-il réaliser sur le réseau 230 V/400 V ? Justifier, et préciser l'intensité du courant en ligne et dans un enroulement.

3. Déterminer la vitesse de synchronisme N_s, le nombre de paires de pôles p et le glissement nominal g_n.

4. Calculer la puissance absorbée P_a, le rendement η_n et les pertes totales au régime nominal.

5. Calculer le moment du couple utile nominal C_{un}.

6. Calculer la puissance réactive Q absorbée et le courant de démarrage en direct.
7. Peut-on raccorder ce moteur sur un réseau 400 V/690 V ? Justifier.

→ corrigé p. 216

Exercice 6.5 – Bilan énergétique d'un compresseur d'air ★★☆

Dans une usine de pièces plastiques, le compresseur d'air comprimé fonctionne 10 heures par jour. Dans le cadre d'un audit énergétique, le technicien de maintenance réalise des mesures sur son moteur asynchrone triphasé (4 pôles, couplage étoile, réseau 400 V, 50 Hz) pour établir le bilan des puissances et chiffrer les pertes.

Données

- Mesure à chaud de la résistance entre deux bornes du stator : $R_a = 0{,}62\,\Omega$.
- Essai à vide sous 400 V (compresseur désaccouplé, $g \approx 0$) : $P_0 = 520\,\text{W}$, $I_0 = 6{,}2\,\text{A}$.
- Essai en charge sous 400 V : $P_a = 12{,}2\,\text{kW}$, $I = 21\,\text{A}$, $N = 1\,455\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
- À vide, la puissance absorbée P_0 couvre les pertes Joule statoriques $P_{js0} = \frac{3}{2}R_a I_0^2$, les pertes fer P_{fs} et les pertes mécaniques P_{meca} ; on admet que ces deux dernières sont égales et constantes.

I- Exploitation de l'essai à vide

1. Faire l'inventaire des puissances perdues à vide. Pourquoi les pertes Joule au rotor sont-elles négligeables ?
2. Calculer les pertes Joule statoriques à vide P_{js0}, puis les pertes fer P_{fs} et les pertes mécaniques P_{meca}.

II- Bilan en charge

3. Calculer le facteur de puissance du moteur et la puissance réactive absorbée.
4. Calculer le glissement g.
5. Calculer successivement P_{js}, P_{tr}, P_{jr} et la puissance utile P_u. Présenter les résultats sur un arbre des pertes.
6. En déduire le rendement η, le couple utile C_u et le couple électromagnétique C_{em}.
7. Calculer l'énergie perdue en un an (250 jours de fonctionnement). Quelle part de ces pertes se retrouve sous forme de chaleur dans le local ?

→ corrigé p. 217

Exercice 6.6 – Convoyeur de carrière à vitesse variable ★★★

Une carrière transporte le granulat concassé vers les silos par un convoyeur à bande de 120 m. Le moteur asynchrone, aujourd'hui démarré en étoile-triangle, peine à relancer la bande lorsqu'elle s'est arrêtée chargée. L'exploitant veut aussi pouvoir

ralentir la bande quand le concasseur produit moins. Le bureau d'études vous demande de justifier l'installation d'un variateur de vitesse à U/f constant.

Données

- ▷ Réseau : 230 V/400 V, 50 Hz.
- ▷ Plaque du moteur : 30 kW ; Δ 400 V / Y 690 V ; 55 A / 31,8 A ; 1 470 tr/min ; $\cos(\Phi) = 0{,}86$; $I_d/I_n = 7{,}2$; $C_d/C_n = 2{,}3$.
- ▷ Bande chargée : couple résistant ramené sur l'arbre du moteur constant, $C_r = 170\,\text{N}\cdot\text{m}$, y compris au démarrage. Pertes mécaniques du moteur négligées.
- ▷ Tambour d'entraînement : diamètre 50 cm ; réducteur : le moteur tourne 25 fois plus vite que le tambour.
- ▷ En démarrage étoile-triangle, le courant en ligne et le couple de démarrage sont divisés par 3 par rapport au démarrage direct.

A- Exploitation de la plaque

1. Justifier le couplage du moteur en fonctionnement normal. Déterminer p et le glissement nominal g_n.

2. Calculer le couple utile nominal C_{un} et le rendement nominal η_n.

B- Démarrage

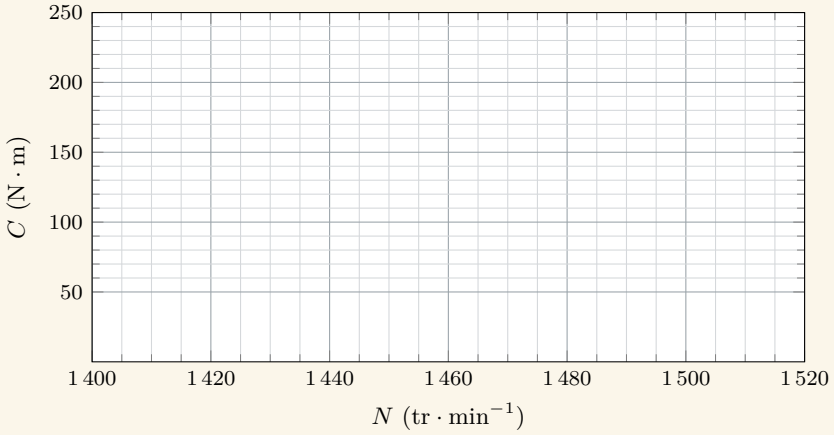
3. Calculer le courant et le couple de démarrage en direct.

4. Calculer le courant en ligne et le couple de démarrage en étoile-triangle. Expliquer la difficulté constatée par l'exploitant.

C- Point de fonctionnement à 50 Hz

5. La partie utile de la caractéristique $C_{em}(N)$ est une droite. Donner les coordonnées de deux de ses points, puis la tracer sur le graphique ci-dessous, ainsi que la caractéristique de la charge.

6. Déterminer graphiquement, puis par le calcul, la fréquence de rotation N du moteur. En déduire la vitesse linéaire de la bande.



D- Variation de vitesse à U/f constant

7. Quand le concasseur tourne au ralenti, la bande, toujours chargée, doit tourner à $N' = 900\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Calculer la fréquence f' et la tension U' que doit imposer le variateur.

8. Calculer la nouvelle vitesse de la bande et la puissance utile du moteur. Commenter.

9. Expliquer pourquoi le variateur résout aussi le problème de démarrage.

→ corrigé p. 218

Machine synchrone

Exercice 6.7 – Groupe électrogène d'un centre de données ★★☆

Un centre de données doit pouvoir fonctionner sans le réseau en cas de panne. Un groupe électrogène, composé d'un moteur diesel et d'un alternateur triphasé, prend alors le relais. Avant les essais de réception, l'électrotechnicien chargé de la mise en service doit vérifier que l'excitation de l'alternateur suffira pour alimenter les serveurs et la climatisation.

Données

- Alternateur : 250 kVA, 400 V entre phases, 50 Hz, $1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, stator couplé en étoile. Résistance d'un enroulement statorique $R = 0{,}02\,\Omega$; résistance de l'inducteur $r = 2{,}5\,\Omega$; courant d'excitation maximal 12 A.
- Essais à $1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$: à vide, $E_v = 48\,I_{exc}$ (E_v tension simple en V, I_{exc} en A) ; en court-circuit, $I_{cc} = 52\,I_{exc}$. La machine est supposée non saturée.
- Charge alimentée en secours : $P = 180\,\text{kW}$, $\cos(\Phi) = 0{,}85$ inductif. Pertes collectives : $P_c = 6\,\text{kW}$.

I- Caractéristiques de l'alternateur

1. Calculer le nombre de paires de pôles p. Quelle serait la fréquence si le diesel ralentissait à $1\,470\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$?

2. Calculer le courant nominal I_n.

3. Calculer l'impédance synchrone Z et la réactance synchrone $L\omega$. Justifier que l'on peut négliger R dans le modèle.

4. Quel courant d'excitation faut-il à vide pour obtenir 400 V entre phases ?

II- Fonctionnement en secours

5. Calculer le courant I débité. L'alternateur est-il bien dimensionné ?

6. Dessiner le modèle de Behn-Eschenburg d'une phase (R négligée) et écrire la relation entre $\underline{e_v}$, $\underline{v}$ et $\underline{i}$.

7. Tracer le diagramme vectoriel ($\overrightarrow{v}$ origine des phases ; échelle 1 cm pour 50 V). Mesurer E_v, puis vérifier par le calcul.

8. En déduire le courant d'excitation nécessaire. Conclure sur la question posée.

III- Bilan des puissances

9. Calculer les pertes Joule au stator et au rotor (l'excitation est fournie par l'arbre).

10. Calculer la puissance mécanique fournie par le diesel, le rendement de l'alternateur et le moment du couple d'entraînement.

→ corrigé p. 220

Exercice 6.8 – Ascenseur sans réducteur à moteur synchrone ★★★

Dans un immeuble de bureaux neuf, l'ascensoriste installe un treuil « gearless » : la poulie d'adhérence est montée directement sur l'arbre d'un moteur synchrone à aimants permanents, sans réducteur. Le moteur tourne lentement et compte beaucoup de pôles. Il est alimenté par un variateur qui fixe la fréquence et place le courant en phase avec la f.é.m. (autopilotage). On vous demande de vérifier le dimensionnement électrique du variateur.

Données

- Moteur : $p = 10$ paires de pôles, stator couplé en étoile, résistance négligée ; inductance synchrone par phase $L = 9\,\text{mH}$.
- F.é.m. à vide (tension simple) proportionnelle à la vitesse : $E_v = 1{,}2 \times N$ (E_v en V, N en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$).
- Poulie : $D = 20\,\text{cm}$. Vitesse nominale du moteur : $N = 150\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
- Cabine pleine à la montée : le déséquilibre entre la cabine chargée et le contrepoids équivaut à une masse $\Delta m = 450\,\text{kg}$; $g = 9{,}81\,\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$. Les pertes du moteur sont négligées sauf à la dernière question.

A- Vitesse et couple

1. Calculer la fréquence f des courants fournis par le variateur à la vitesse nominale. Pourquoi ce moteur ne pourrait-il pas être branché directement sur le réseau 50 Hz ?

2. Calculer la vitesse de la cabine.

3. Calculer la force due au déséquilibre, le couple résistant C_r sur l'arbre et la puissance mécanique P_m fournie par le moteur.

B- Point de fonctionnement électrique

4. Calculer E_v et la réactance synchrone $L\omega$ à la vitesse nominale.

5. On admet que la puissance électromagnétique vaut $P_{em} = 3\,E_v\,I\cos(\Psi)$, où Ψ est le déphasage entre i et e_v. Le courant étant en phase avec la f.é.m., montrer que $P_m = 3\,E_v\,I$. En déduire l'intensité I du courant.

6. Écrire la loi des mailles complexe en convention récepteur. Tracer le diagramme vectoriel (sans échelle imposée), puis calculer la tension simple V, la tension composée U et le facteur de puissance.

7. Montrer que le couple est proportionnel au courant, $C = K_t\, I$, et calculer K_t. Quelle machine étudiée dans ce chapitre se comporte de la même façon ?

C- Approche à l'étage et bilan

8. En approche, la cabine pleine ralentit à $N_a = 15\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Calculer la fréquence, la f.é.m., le courant et la tension simple à imposer.

9. À la montée nominale, un analyseur de réseau mesure en réalité $P_a = 7{,}4\,\text{kW}$ absorbés par le moteur. Calculer son rendement. Que se passe-t-il, du point de vue énergétique, lorsque la cabine vide monte (le contrepoids est alors plus lourd qu'elle) ?

→ corrigé p. 222

Sujets de type BTS

Chapitre 6

Sujet BTS 6.A – Modernisation de la motorisation d'un téléski

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 h 30

Une station de moyenne montagne modernise un téléski de 900 m. Le câble est entraîné par une poulie motrice, elle-même mue par un moteur électrique à travers un réducteur. Le moteur actuel est une machine à courant continu à excitation indépendante, vieillissante et coûteuse en entretien. La station envisage de la remplacer par un moteur asynchrone piloté par un variateur de vitesse. On vous demande d'étudier l'installation actuelle, de vérifier le choix du nouveau moteur et de régler le variateur.

Données

- Câble : effort de traction à transmettre en pleine charge $F = 9\,\text{kN}$, vitesse nominale $v = 3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Poulie motrice : diamètre $D = 2{,}5\,\text{m}$.
- Réducteur : le moteur tourne 64 fois plus vite que la poulie ; rendement $\eta_{red} = 0{,}94$.
- MCC actuelle : $U_n = 440\,\text{V}$; $I_n = 75\,\text{A}$; $N_n = 1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$; résistance d'induit $R = 0{,}30\,\Omega$; excitation $U_{exc} = 220\,\text{V}$, $I_{exc} = 3\,\text{A}$; pertes collectives $1\,000\,\text{W}$ à N_n, le couple de pertes C_p étant constant.
- Moteur asynchrone proposé (réseau $230\,\text{V}/400\,\text{V}$, $50\,\text{Hz}$) : $37\,\text{kW}$; Δ $400\,\text{V}$ / Y $690\,\text{V}$; $66\,\text{A}$ / $38\,\text{A}$; $1\,478\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$; $\cos(\Phi) = 0{,}86$. Pertes mécaniques négligées.
- En pleine charge, le couple résistant ramené à l'arbre du moteur est constant (il ne dépend pas de la vitesse).

Partie A – Besoins mécaniques

A.1. Calculer la puissance P_1 et le couple C_1 que la poulie doit fournir au câble.

A.2. Calculer la vitesse angulaire Ω_1 et la fréquence de rotation N_1 de la poulie, puis la fréquence de rotation N_m du moteur.

A.3. Montrer que le moteur doit fournir une puissance utile $P_u \approx 28{,}7\,\text{kW}$ et un couple utile $C_u \approx 187\,\text{N}\cdot\text{m}$.

Partie B – La machine à courant continu actuelle

B.1. À partir des données nominales, calculer la f.é.m. E_n, la constante k et le couple de pertes C_p.

B.2. Au point de fonctionnement de la partie A, calculer le couple électromagnétique, le courant d'induit I, puis la tension U que doit appliquer le variateur.

B.3. Établir le bilan des puissances et calculer le rendement du moteur.

B.4. Le variateur limite le courant de démarrage à $1{,}5\,I_n$. Calculer la tension de démarrage. Pourquoi ne peut-on pas démarrer en direct ?

Partie C – Le moteur asynchrone proposé

C.1. Indiquer le couplage du moteur sur le réseau. Déterminer p, le glissement nominal et le rendement nominal.

C.2. Calculer le couple utile nominal. Le moteur convient-il pour entraîner le téléski en pleine charge ?

C.3. Alimenté directement par le réseau, quelle serait sa fréquence de rotation en pleine charge (partie utile de la caractéristique rectiligne) ? En déduire la vitesse du câble.

Partie D – Réglage du variateur

D.1. Le matin, pour les débutants, l'exploitant veut une vitesse de câble de $2{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, en pleine charge. Calculer la fréquence de rotation du moteur.

D.2. Le variateur fonctionne à U/f constant. Calculer la fréquence f' et la tension U' qu'il doit fournir.

D.3. Représenter, sur un même graphique sans échelle, les deux caractéristiques mécaniques et la caractéristique de la charge.

Partie E – Bilan pour l'exploitant

E.1. À la même puissance utile, le moteur asynchrone aurait un rendement de 0,94. Calculer l'économie d'énergie réalisée sur une saison de $1\,200\,\text{h}$ de fonctionnement en pleine charge, et l'économie correspondante (0,15 € le $\text{kW}\cdot\text{h}$).

E.2. Rédiger, en quelques lignes, les arguments en faveur du remplacement.

→ corrigé p. 223

Sujet BTS 6.B – Microcentrale hydroélectrique sur un ancien moulin

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 h 30

Une coopérative remet en service un ancien moulin : l'eau du canal fait tourner une turbine Kaplan, accouplée directement à un alternateur triphasé raccordé au réseau public. Le contrat impose de fournir de la puissance réactive avec $\tan(\Phi) = 0{,}4$. On vous demande de vérifier l'alternateur et son excitation, puis d'évaluer la production.

Données

- Hauteur de chute $H = 18\,\text{m}$; débit $Q_v = 2{,}4\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$; masse volumique de l'eau $\rho = 1\,000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $g = 9{,}81\,\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$. Puissance hydraulique : $P_h = \rho\, g\, Q_v\, H$. Rendement de la turbine : 0,88 ; vitesse : $750\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
- Alternateur : 400 kVA ; 690 V entre phases ; 50 Hz ; stator couplé en étoile ; résistance d'un enroulement $R = 12\,\text{m}\Omega$; inducteur de résistance $r = 3\,\Omega$, courant d'excitation maximal 15 A ; pertes collectives $P_c = 6\,\text{kW}$.
- Essais à $750\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$: à vide $E_v = 55\,I_{exc}$ (tension simple) ; en court-circuit $I_{cc} = 40\,I_{exc}$. Machine non saturée ; R est négligée dans le modèle de Behn-Eschenburg.
- Point de fonctionnement étudié : puissance électrique fournie au réseau $P_e = 360\,\text{kW}$, avec $\tan(\Phi) = 0{,}4$ ($\overrightarrow{i}$ en retard sur $\overrightarrow{v}$).

Partie A – La turbine

A.1. Calculer la puissance hydraulique, puis la puissance mécanique P_t fournie par la turbine.

A.2. Calculer la vitesse angulaire et le moment du couple exercé par la turbine sur l'arbre.

A.3. Déterminer le nombre de paires de pôles de l'alternateur. Pourquoi la vitesse de la turbine doit-elle rester rigoureusement constante une fois l'alternateur couplé au réseau ?

Partie B – Identification de l'alternateur

B.1. Calculer le courant nominal I_n et la tension simple nominale V.

B.2. Calculer l'impédance synchrone Z. Pourquoi peut-on assimiler Z à la réactance synchrone $L\omega$?

B.3. Calculer le courant d'excitation nécessaire à vide pour obtenir la tension nominale, puis celui qui donne $I_{cc} = I_n$ en court-circuit.

Partie C – Fonctionnement sur le réseau

C.1. Calculer le facteur de puissance, la puissance réactive et la puissance apparente fournies, puis le courant débité I. Vérifier qu'il est compatible avec l'alternateur.

C.2. Écrire la relation de Behn-Eschenburg. Tracer le diagramme vectoriel des tensions pour une phase ($\overrightarrow{v}$ origine des phases ; 1 cm pour 100 V).

C.3. Déterminer E_v graphiquement, puis par le calcul. En déduire le courant d'excitation. Est-il compatible avec l'excitatrice ?

C.4. À $\cos(\Phi) = 1$ et même puissance active, il faudrait $I_{exc} \approx 10{,}4$ A. Quel est le rôle de l'excitation d'un alternateur couplé au réseau ?

Partie D – Bilan et production

D.1. Calculer les pertes Joule au stator et au rotor (excitation prélevée sur l'arbre), puis la puissance mécanique nécessaire. La turbine peut-elle la fournir ?

D.2. Calculer le rendement de l'alternateur, puis le rendement global de la conversion « eau → réseau ».

D.3. La centrale fonctionne l'équivalent de 4 200 h par an à ce régime. Calculer l'énergie électrique vendue en MW·h et la recette annuelle à 0,13 € le kW·h.

→ corrigé p. 225

Corrigés

Chapitre 6

Grandeurs mécaniques et machine à courant continu

✓ Corrigé de l'exercice 6.1 – Monte-charge d'un entrepôt

1. À vitesse constante, le câble équilibre le poids :

$$F = m\,g = 800 \times 9{,}81 \quad \text{soit} \quad \boxed{F = 7\,848\ \text{N}}$$

Rayon du tambour $r = D/2 = 0{,}20$ m :

$$C_t = F \times r = 7848 \times 0{,}20 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_t \approx 1\,570\ \text{N}\cdot\text{m}}$$

2. Le câble s'enroule à la vitesse $v = r\,\Omega_t$:

$$\Omega_t = \frac{v}{r} = \frac{0{,}5}{0{,}20} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Omega_t = 2{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

$N_t = (30/\pi)\,\Omega_t = (30 \times 2{,}5)/\pi \approx 23{,}9\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

3. $P_t = C_t\,\Omega_t = 1\,569{,}6 \times 2{,}5 = 3\,924\,\text{W}$ et $P_t = F\,v = 7848 \times 0{,}5 = 3\,924\,\text{W}$ ✓

$\boxed{P_t \approx 3{,}92\,\text{kW}}$

4. $N_m = 60\,N_t \approx 1\,432\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ $(\Omega_m = 60 \times 2{,}5 = 150\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$.

Le réducteur perd 5 % de la puissance qu'il reçoit :

$$P_u = \frac{P_t}{\eta_{red}} = \frac{3924}{0{,}95} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_u \approx 4\,131\,\text{W}}$$

$C_u = P_u/\Omega_m = 4131/150$ soit $\boxed{C_u \approx 27{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}}$: du tambour vers le moteur, on divise le couple par $60 \times 0{,}95 = 57$ et on multiplie la vitesse par 60 (et inversement).

5. $\eta_g = P_t/P_a = 3924/5200$ soit $\boxed{\eta_g \approx 0{,}755}$

$$\eta_m = \frac{P_u}{P_a} = \frac{4131}{5200} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_m \approx 0{,}794}$$

Contrôle : les rendements en cascade se multiplient, $0{,}794 \times 0{,}95 \approx 0{,}755$ ✓.

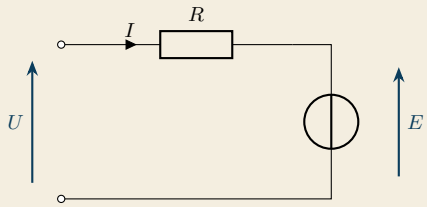
6. Durée : $\Delta t = h/v = 12/0{,}5 = 24\,\text{s}$. Énergie électrique : $E_a = P_a\,\Delta t = 5200 \times 24 = 124\,800\,\text{J}$, soit $\boxed{E_a \approx 125\,\text{kJ} \approx 34{,}7\,\text{W}\cdot\text{h}}$

Énergie potentielle gagnée : $E_p = m\,g\,h = 7848 \times 12 \approx 94{,}2\,\text{kJ}$; on retrouve $94{,}2/124{,}8 \approx 0{,}755 = \eta_g$.

7. Le sens positif étant celui de la montée, à la descente $\Omega < 0$ alors que le moteur exerce toujours un couple $C > 0$ pour retenir la charge : $C\,\Omega < 0$, **quadrant II, fonctionnement en freinage**. La machine reçoit de la puissance mécanique et fonctionne en génératrice : l'énergie est dissipée dans une résistance de freinage, ou renvoyée au réseau si le variateur est réversible.

✓ Corrigé de l'exercice 6.2 – Moteur d'un portail coulissant

1. Modèle de l'induit (convention récepteur, flèches de U et I en sens opposés) :



2. $U = E + R\,I$: $E = 24 - 0{,}35 \times 6{,}5$ soit $\boxed{E \approx 21{,}7\,\text{V}}$

$\Omega = \pi/30 \times 2800 \approx 293{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et

$$k = \frac{E}{\Omega} = \frac{21{,}725}{293{,}2} \quad \text{soit} \quad \boxed{k \approx 0{,}074\,1\,\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}}$$

3. $C_{em} = k\,I = 0{,}074\,1 \times 6{,}5$ soit $\boxed{C_{em} \approx 0{,}482\,\text{N}\cdot\text{m}}$; $P_{em} = E\,I = 21{,}725 \times 6{,}5$ soit $\boxed{P_{em} \approx 141{,}2\,\text{W}}$

Vérification : $C_{em}\,\Omega = 0{,}481\,6 \times 293{,}2 \approx 141{,}2\,\text{W}$ ✓.

4. Aimants permanents : pas de pertes dans un inducteur.

$$P_a = U\,I = 24 \times 6{,}5 = 156\,\text{W} \qquad P_j = R\,I^2 = 0{,}35 \times 6{,}5^2 \approx 14{,}8\,\text{W}$$

$$P_u = P_a - P_j - P_c = 156 - 14{,}8 - 9 \approx 132{,}2\,\text{W}$$

$$\eta = \frac{132{,}2}{156} \text{ soit } \boxed{\eta \approx 0{,}847} \qquad C_u = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{132{,}2}{293{,}2} \text{ soit } \boxed{C_u \approx 0{,}451\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

5. Rotor bloqué : $\Omega = 0$, donc $E = 0$ et

$$I_d = \frac{U}{R} = \frac{24}{0{,}35} \text{ soit } \boxed{I_d \approx 68{,}6\,\text{A}}$$

Plus de 10 fois le courant nominal.

Plus aucune f.é.m. ne s'oppose à la tension : seule la faible résistance de l'induit limite le courant, et les transistors de la carte ne supportent pas ce courant. Solution : une **limitation de courant** par la carte (elle réduit la tension appliquée, par exemple à $0{,}35 \times 13 \approx 4{,}6\,\text{V}$ pour $2\,I_n = 13\,\text{A}$), associée à une détection d'obstacle qui arrête le moteur.

6. À vide : $E_0 = 24 - 0{,}35 \times 0{,}4 = 23{,}86\,\text{V}$

$$\Omega_0 = \frac{E_0}{k} = \frac{23{,}86}{0{,}074\,09} \approx 322\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \text{ soit } \boxed{N_0 \approx 3\,075\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$$

La vitesse ne varie que d'environ 10 % entre le vide et la charge nominale : la MCC est un moteur « raide ».

✓ Corrigé de l'exercice 6.3 – Rénovation d'un ascenseur à courant continu

I- Régime nominal

1. $E_n = U_n - R\,I_n = 440 - 0{,}55 \times 42$ soit $\boxed{E_n = 416{,}9\,\text{V}}$

$\Omega_n = \pi/30 \times 1500 \approx 157{,}1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et

$$k = \frac{E_n}{\Omega_n} \text{ soit } \boxed{k \approx 2{,}654\,\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}}$$

2. Arbre des pertes : $P_a \to (-P_{j1} - P_{j2}) \to P_{em} \to (-P_c) \to P_u$ (voir le cours).

$$P_a = U_n\,I_n + U_{exc}\,I_{exc} = 440 \times 42 + 220 \times 1{,}5 = 18480 + 330 = 18\,810\,\text{W}$$

$$P_{j1} = R\,I_n^2 = 0{,}55 \times 42^2 = 970{,}2\,\text{W} \qquad P_{j2} = U_{exc}\,I_{exc} = 330\,\text{W}$$

$$P_{em} = E_n\,I_n = 416{,}9 \times 42 = 17\,509{,}8\,\text{W} \qquad P_u = P_{em} - P_c = 16\,909{,}8\,\text{W}$$

$$\eta_n = \frac{16\,909{,}8}{18810} \text{ soit } \boxed{\eta_n \approx 0{,}899}$$

Contrôle : $18810 - 970{,}2 - 330 = 17\,509{,}8\,\text{W} = E_n\,I_n$ ✓.

3. $C_{em} = k\,I_n = 2{,}654 \times 42 \approx 111{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}$; $C_p = P_c/\Omega_n = 600/157{,}1 \approx 3{,}82\,\text{N}\cdot\text{m}$;

$$C_u = C_{em} - C_p \quad \text{soit} \quad \boxed{C_u \approx 107{,}7\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

$$C_u\,\Omega_n = 107{,}65 \times 157{,}08 \approx 16\,910\,\text{W} = P_u \;\checkmark$$

II- Démarrage

4. $\Omega = 0$ donc $E = 0$:

$$I_d = \frac{U_n}{R} = \frac{440}{0{,}55} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_d = 800\,\text{A}}$$

Environ 19 fois I_n : le collecteur, l'induit et le variateur seraient détruits. Le démarrage direct est exclu.

5. $I_d = 1{,}5 \times 42 = 63\,\text{A}$ et $U_d = R\,I_d = 0{,}55 \times 63$ soit $\boxed{U_d \approx 34{,}7\,\text{V}}$

$C_d = k\,I_d = 2{,}654 \times 63$ soit $\boxed{C_d \approx 167\,\text{N}\cdot\text{m}}$. Le couple disponible sur l'arbre, $167 - 3{,}8 \approx 163\,\text{N}\cdot\text{m}$, dépasse le couple résistant de la cabine pleine ($107{,}7\,\text{N}\cdot\text{m}$) : la cabine démarre, avec une réserve de couple pour accélérer.

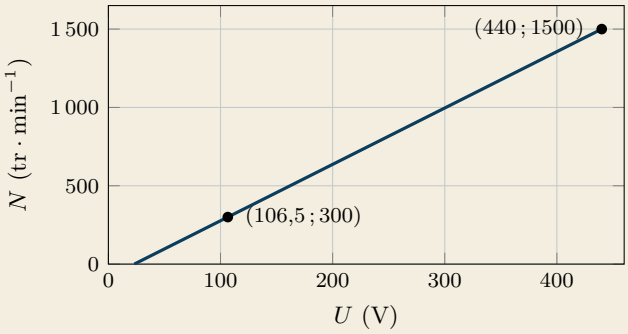
III- Variation de vitesse

6. En régime établi, $C_{em} = C_r + C_p$; les deux couples sont constants, donc $C_{em} = k\,I$ aussi : à flux constant, $\boxed{I = C_{em}/k = I_n}$ quelle que soit la vitesse.

7. $\Omega = (U - R\,I_n)/k$, donc $N = 30/\pi \times (U - 23{,}1)/2{,}654$:

$$\boxed{N \approx 3{,}598\,U - 83{,}1} \quad (N \text{ en tr}\cdot\text{min}^{-1},\ U \text{ en V})$$

C'est une droite : $N = 0$ pour $U = R\,I_n = 23{,}1\,\text{V}$ et $N = 1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ pour $U = 440\,\text{V}$.



8. $\Omega' = \pi/30 \times 300 \approx 31{,}42\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et

$$U' = k\,\Omega' + R\,I_n = 2{,}654 \times 31{,}42 + 23{,}1 \quad \text{soit} \quad \boxed{U' \approx 106{,}5\,\text{V}}$$

$P'_u = C_u\,\Omega' = 107{,}65 \times 31{,}42 \approx 3\,382\,\text{W}$; $P'_a = 106{,}5 \times 42 + 330 \approx 4\,802\,\text{W}$

$$\eta' = \frac{3382}{4802} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta' \approx 0{,}70}$$

Les pertes Joule ($R\,I_n^2$ et excitation) restent les mêmes alors que la puissance utile est divisée par 5 : le rendement chute. Ce n'est pas gênant, l'approche ne dure que quelques secondes.

9. En descente, $\Omega < 0$ et le moteur retient la cabine : $C > 0$, donc **quadrant II**. Comme $C_{em} = k\,I > 0$, le courant garde son sens, mais $E = k\,\Omega < 0$: la tension $U = E + R\,I$ devient **négative** et $U\,I < 0$, la machine fournit de l'énergie. Le variateur doit accepter une tension négative avec un courant positif (pont à thyristors fonctionnant en onduleur assisté) pour renvoyer l'énergie au réseau.

Machine asynchrone

✓ Corrigé de l'exercice 6.4 – Pompe de relevage d'une station d'épuration

1. Le moteur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique. Les 5,5 kW sont la puissance **utile** (mécanique, sur l'arbre) au régime nominal, pas la puissance absorbée.

2. Un enroulement supporte la plus petite tension de la plaque, 230 V. Le réseau a 400 V entre phases, c'est la plus grande tension de la plaque : $\boxed{\text{couplage étoile}}$. Chaque enroulement reçoit $400/\sqrt{3} = 230\,\text{V}$. En étoile, le courant en ligne et le courant dans un enroulement sont égaux : 10,6 A.

3. $N_n = 2\,905\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ est un peu inférieure à $\boxed{N_s = 3\,000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$, d'où $p = (60 \times 50)/3000 = 1$.

$$g_n = \frac{3000 - 2905}{3000} \quad \text{soit} \quad \boxed{g_n \approx 0{,}031\,7 = 3{,}17\,\%}$$

4. $P_a = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi) = \sqrt{3} \times 400 \times 10{,}6 \times 0{,}86$ soit $\boxed{P_a \approx 6\,316\,\text{W}}$

$\eta_n = 5500/6316$ soit $\boxed{\eta_n \approx 0{,}871}$; pertes : $6316 - 5500 \approx 816\,\text{W}$.

5. $\Omega_n = \pi/30 \times 2905 \approx 304{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et

$$C_{un} = \frac{5500}{304{,}2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_{un} \approx 18{,}1\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

6. $\tan(\Phi) = \tan(\arccos(0{,}86)) \approx 0{,}593$: $Q = P_a\tan(\Phi)$ soit $\boxed{Q \approx 3{,}75\,\text{kVAR}}$

Démarrage direct : $I_d = 7{,}5 \times 10{,}6$ soit $\boxed{I_d \approx 79{,}5\,\text{A}}$ pendant quelques secondes : la protection doit le tolérer (disjoncteur moteur, courbe D).

7. Non. Sur un réseau 400 V/690 V, un enroulement recevrait 400 V en étoile et 690 V en triangle, toujours plus que les 230 V qu'il supporte. Il faudrait un moteur 400 V/690 V.

Méthode Pour choisir le couplage, comparer la tension **entre phases** du réseau aux deux tensions de la plaque : égale à la plus grande, étoile ; égale à la plus petite, triangle ; égale à aucune des deux, moteur inadapté.

✓ Corrigé de l'exercice 6.5 – Bilan énergétique d'un compresseur d'air

I- Exploitation de l'essai à vide

1. À vide, $P_u = 0$: P_0 couvre les pertes Joule au stator P_{js0}, les pertes fer P_{fs} et les pertes mécaniques P_{meca}. Le glissement étant presque nul, $P_{jr} = g\,P_{tr} \approx 0$.

2. $P_{js0} = (3/2)R_a\,I_0^2 = 1{,}5 \times 0{,}62 \times 6{,}2^2 \approx 35{,}7\,\text{W}$;

$$P_{fs} + P_{meca} = P_0 - P_{js0} = 520 - 35{,}7 = 484{,}3\,\text{W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{fs} = P_{meca} \approx 242\,\text{W}}$$

II- Bilan en charge

3. Facteur de puissance :

$$\cos(\Phi) = \frac{P_a}{\sqrt{3}\,U\,I} = \frac{12200}{\sqrt{3} \times 400 \times 21} \quad \text{soit} \quad \boxed{\cos(\Phi) \approx 0{,}839} \quad (\Phi \approx 33{,}0^\circ)$$

$$S = \sqrt{3} \times 400 \times 21 \approx 14\,549\,\text{VA} \text{ et } Q = \sqrt{S^2 - P_a^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q \approx 7{,}93\,\text{kVAR}}$$

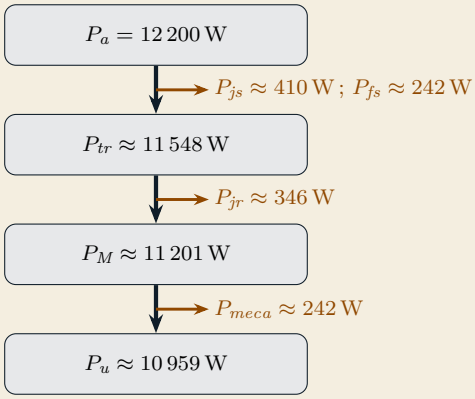
4. 4 pôles : $p = 2$, $N_s = 1\,500\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$

$$g = \frac{1500 - 1455}{1500} \quad \text{soit} \quad \boxed{g = 0{,}03}$$

5. Bilan des puissances :

$$P_{js} = \tfrac{3}{2} \times 0{,}62 \times 21^2 \approx 410\,\text{W}$$
$$P_{tr} = P_a - P_{js} - P_{fs} = 12200 - 410 - 242 \approx 11\,548\,\text{W}$$
$$P_{jr} = g\,P_{tr} = 0{,}03 \times 11548 \approx 346\,\text{W}$$
$$P_u = P_{tr} - P_{jr} - P_{meca} = 11548 - 346 - 242$$

soit $\boxed{P_u \approx 10{,}96\,\text{kW}}$.



6. $\eta = 10959/12200$ soit $\boxed{\eta \approx 0{,}898}$

$\Omega = \pi/30 \times 1455 \approx 152{,}4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$C_u = \frac{P_u}{\Omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_u \approx 71{,}9\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

$C_{em} = P_{tr}/\Omega_s = 11548/157{,}1$ soit $\boxed{C_{em} \approx 73{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}}$

(Vérification : $C_{em}\,\Omega = P_M \approx 11\,201\,\text{W}$ ✓.)

7. Pertes totales : $12200 - 10959 \approx 1\,241\,\text{W}$, pendant $250 \times 10 = 2\,500\,\text{h}$:

$E_{pertes} = 1{,}241 \times 2500$ soit $\boxed{E_{pertes} \approx 3\,100\,\text{kW}\cdot\text{h}}$ par an.

Toutes les pertes du moteur (Joule, fer, frottements) finissent en chaleur, évacuée par le ventilateur du moteur dans le local : environ 1,2 kW de chauffage permanent, à prendre en compte pour la ventilation de la salle des compresseurs.

✓ Corrigé de l'exercice 6.6 – Convoyeur de carrière à vitesse variable

A- Exploitation de la plaque

1. Un enroulement supporte 400 V (plus petite tension de la plaque), égale à la tension entre phases du réseau : $\boxed{\text{couplage triangle}}$. $N_n = 1\,470\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ donne $N_s = 1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, $p = 2$ et $\boxed{g_n = (1500 - 1470)/1500 = 0{,}02}$

2. $\Omega_n = \pi/30 \times 1470 \approx 153{,}9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$C_{un} = \frac{30000}{153{,}9} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_{un} \approx 194{,}9\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

$P_a = \sqrt{3} \times 400 \times 55 \times 0{,}86 \approx 32\,770\,\text{W}$ et

$$\eta_n = \frac{30000}{32770} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_n \approx 0{,}915}$$

B- Démarrage

3. $I_d = 7{,}2 \times 55$ soit $\boxed{I_d = 396\,\text{A}}$; $C_d = 2{,}3 \times 194{,}9$ soit $\boxed{C_d \approx 448\,\text{N}\cdot\text{m}}$

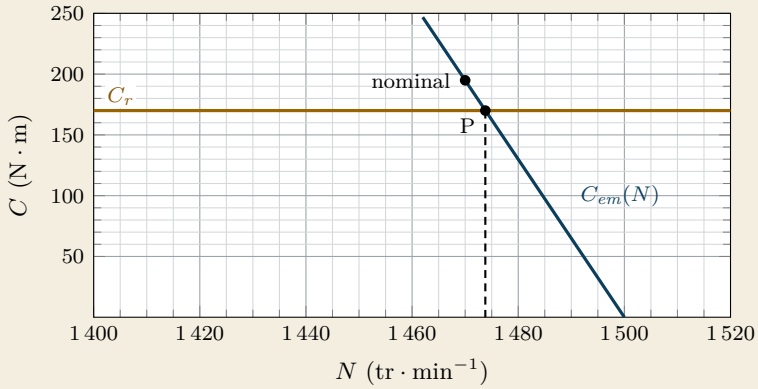
4. En étoile, courant et couple sont divisés par 3 : $I_{dY} = 132\,\text{A}$ et $\boxed{C_{dY} \approx 149\,\text{N}\cdot\text{m}}$

$149\,\text{N}\cdot\text{m} < C_r = 170\,\text{N}\cdot\text{m}$: bande chargée, **le moteur ne peut pas démarrer** en étoile. Il reste bloqué, absorbe un fort courant et chauffe ; d'où les difficultés de relance.

Méthode Avant de retenir un démarrage étoile-triangle, comparer $C_d/3$ au couple résistant au décollage, en gardant une marge (au moins 20 %) pour que l'ensemble accélère. Si la condition n'est pas remplie, choisir un variateur, ou un démarreur progressif seulement si la charge est faible à l'arrêt.

C- Point de fonctionnement à 50 Hz

5. La droite passe par $(N_s\,;0) = (1500\,;0)$ et par le point nominal $(N_n\,;C_{un}) = (1470\,;194{,}9)$. La charge est une droite horizontale $C_r = 170\,\text{N}\cdot\text{m}$.



6. Graphiquement, $N \approx 1\,474\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Par le calcul : $K = 194{,}9/(1500 - 1470) \approx 6{,}50\,\text{N}\cdot\text{m}/(\text{tr}\cdot\text{min}^{-1})$ et $K\,(N_s - N) = C_r$:

$$N = N_s - \frac{C_r}{K} = 1500 - \frac{170}{6{,}50} \quad \text{soit} \quad \boxed{N \approx 1\,474\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$$

Tambour : $N_t = 1\,473{,}8/25 \approx 58{,}95\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$

$$v = \pi\,D\,\frac{N_t}{60} = \pi \times 0{,}5 \times \frac{58{,}95}{60} \quad \text{soit} \quad \boxed{v \approx 1{,}54\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

D- Variation de vitesse à U/f constant

7. Le couple résistant est inchangé, donc l'écart $N_s - N = C_r/K \approx 26{,}2\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ aussi :

$$N'_s = 900 + 26{,}2 = 926{,}2\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1} \qquad f' = \frac{p\,N'_s}{60} = \frac{2\times 926{,}2}{60} \quad \text{soit} \quad \boxed{f' \approx 30{,}9\,\text{Hz}}$$

$$U' = 400 \times \frac{30{,}87}{50} \quad \text{soit} \quad \boxed{U' \approx 247\,\text{V}}$$

La nouvelle caractéristique, parallèle à la première, coupe l'axe des vitesses en $N'_s \approx 926\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

8. $v' = \pi \times 0{,}5 \times 900/(25\times 60)$ soit $\boxed{v' \approx 0{,}94\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$

$$P'_u = C_r\,\Omega' = 170 \times \frac{\pi}{30} \times 900 \quad \text{soit} \quad \boxed{P'_u \approx 16{,}0\,\text{kW}}$$

À 50 Hz, $P_u = 170 \times \pi/30 \times 1\,473{,}8 \approx 26{,}2\,\text{kW}$. À couple constant, la puissance est proportionnelle à la vitesse : ralentir la bande quand le débit baisse économise de l'énergie (et de l'usure).

9. Le variateur démarre à basse fréquence en gardant U/f constant : le flux, donc le couple maximal, sont conservés. Le point de fonctionnement est placé dès le départ dans la partie utile, avec un couple disponible supérieur à $170\,\text{N}\cdot\text{m}$ pour un courant voisin du courant nominal, sans les 396 A du démarrage direct.

Machine synchrone

✓ Corrigé de l'exercice 6.7 – Groupe électrogène d'un centre de données

I- Caractéristiques de l'alternateur

1. $p = (60\,f)/N = (60\times 50)/1500$ soit $\boxed{p = 2}$; à $1\,470\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$: $f = (2\times 1470)/60 = 49\,\text{Hz}$ (la fréquence suit la vitesse du diesel : c'est son régulateur qui la tient).

2. $I_n = S_n/(\sqrt{3}\,U_n) = 250000/(\sqrt{3}\times 400)$ soit $\boxed{I_n \approx 361\,\text{A}}$

3. $Z = E_v/I_{cc} = 48/52$ soit $\boxed{Z \approx 0{,}923\,\Omega}$

$L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{0{,}923^2 - 0{,}02^2} \approx 0{,}923\,\Omega$.

R est 46 fois plus petite que $L\omega$: elle ne change pas Z (au millième près) et on la néglige.

4. $V = 400/\sqrt{3} \approx 230{,}9\,\text{V} = E_v$ à vide :

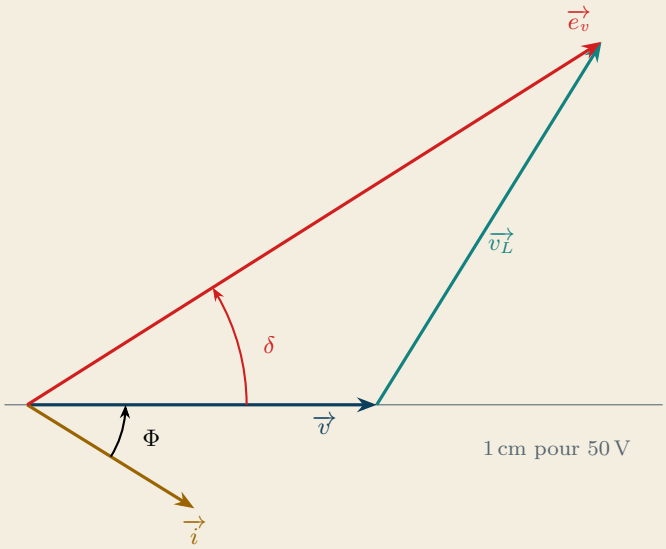
$$I_{exc} = \frac{230{,}9}{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_{exc,0} \approx 4{,}81\,\text{A}}$$

II- Fonctionnement en secours

5. $I = P/(\sqrt{3}\,U\cos(\Phi)) = 180000/(\sqrt{3}\times 400\times 0{,}85)$ soit $\boxed{I \approx 306\,\text{A}}$ $< I_n$: l'alternateur est bien dimensionné ($S = 180/0{,}85 \approx 212\,\text{kVA} < 250\,\text{kVA}$).

6. Même schéma que dans le cours (f.é.m. e_v en série avec la réactance $L\omega$, convention générateur) : $\boxed{\underline{e_v} = \underline{v} + jL\omega\,\underline{i}}$

7. $\Phi = \arccos(0{,}85) \approx 31{,}8°$ ($\overrightarrow{i}$ en retard sur $\overrightarrow{v}$) ; $L\omega\,I = 0{,}923\times 305{,}7 \approx 282\,\text{V}$. Longueurs : $\overrightarrow{v}$: 4,62 cm ; $\overrightarrow{v_L}$: 5,64 cm, à $90° - 31{,}8° = 58{,}2°$ de l'horizontale.



On mesure $\overrightarrow{e_v} \approx 9{,}0\,\text{cm}$, soit $E_v \approx 450\,\text{V}$. Par le calcul ($\sin(\Phi) \approx 0{,}527$) :

$$E_v = \sqrt{(V + L\omega I\sin(\Phi))^2 + (L\omega I\cos(\Phi))^2}$$

$$E_v = \sqrt{379{,}6^2 + 239{,}8^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_v \approx 449\,\text{V}}$$

8. $I_{exc} = E_v/k_1 = 449/48$ soit $\boxed{I_{exc} \approx 9{,}35\,\text{A}}$ $< 12\,\text{A}$: l'excitation suffit, avec une marge d'environ 20 % (pour les appels de courant des démarrages de la climatisation, par exemple).

III- Bilan des puissances

9. $P_{js} = 3\,R\,I^2 = 3\times 0{,}02\times 305{,}7^2$ soit $\boxed{P_{js} \approx 5{,}61\,\text{kW}}$

$P_{jr} = r\,I_{exc}^2 = 2{,}5\times 9{,}35^2$ soit $\boxed{P_{jr} \approx 219\,\text{W}}$

10. $P_m = P_e + P_{js} + P_{jr} + P_c = 180000 + 5606 + 219 + 6000$ soit $\boxed{P_m \approx 191{,}8\,\text{kW}}$

$\eta = \dfrac{180}{191{,}8}$ soit $\boxed{\eta \approx 0{,}938}$ $\quad C_m = \dfrac{P_m}{\Omega} = \dfrac{191824}{157{,}08}$ soit $\boxed{C_m \approx 1\,221\,\text{N}\cdot\text{m}}$

✓ Corrigé de l'exercice 6.8 – Ascenseur sans réducteur à moteur synchrone

A- Vitesse et couple

1. $f = (p\,N)/60 = (10 \times 150)/60$ soit $\boxed{f = 25\,\text{Hz}}$.

Sur le réseau 50 Hz, il devrait tourner à $N = (60 \times 50)/10 = 300\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, et surtout il ne démarrerait pas seul : c'est le variateur qui fait monter la fréquence depuis zéro.

2. $v = \pi\,D\,N/60 = \pi \times 0{,}2 \times 150/60$ soit $\boxed{v \approx 1{,}57\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$

3. $F = \Delta m\,g = 450 \times 9{,}81 = 4\,414{,}5\,\text{N}$

$$C_r = F\,\frac{D}{2} = 4\,414{,}5 \times 0{,}1 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_r \approx 441\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

$\Omega = \pi/30 \times 150 \approx 15{,}71\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$: $P_m = C_r\,\Omega$ soit $\boxed{P_m \approx 6{,}93\,\text{kW}}$ (on retrouve $F\,v$).

B- Point de fonctionnement électrique

4. $E_v = 1{,}2 \times 150 = 180\,\text{V}$; $\omega = 2\pi \times 25 \approx 157{,}1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et

$$L\omega = 9 \times 10^{-3} \times 157{,}1 \approx 1{,}41\,\Omega$$

5. Pertes négligées : $P_m = P_{em} = 3\,E_v\,I\cos(\Psi)$, avec $\Psi = 0$ (courant en phase avec la f.é.m.), d'où $P_m = 3\,E_v\,I$. Ou encore : la réactance ne consomme aucune puissance active, toute la puissance absorbée passe par les sources e_v.

$$I = \frac{P_m}{3\,E_v} = \frac{6934}{3 \times 180} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 12{,}8\,\text{A}}$$

6. Convention récepteur : $\boxed{\underline{v} = \underline{e_v} + jL\omega\,\underline{i}}$. $\vec{i}$ et $\vec{e_v}$ sont colinéaires ; $\vec{v_L}$ (longueur $L\omega\,I = 1{,}414 \times 12{,}84 \approx 18{,}2\,\text{V}$) leur est perpendiculaire, en avance.



$$V = \sqrt{E_v^2 + (L\omega I)^2} = \sqrt{180^2 + 18{,}15^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{V \approx 180{,}9\,\text{V}}$$

$$U = \sqrt{3}\,V \approx 313\,\text{V}$$

$\tan(\Phi) = (L\omega I)/E_v = 18{,}15/180$: $\Phi \approx 5{,}8°$ et $\boxed{\cos(\Phi) \approx 0{,}995}$. Vérification : $3 \times 180{,}9 \times 12{,}84 \times 0{,}995 \approx 6\,934\,\text{W}$ ✓.

7. $E_v = 1{,}2\,N = 1{,}2 \times (30/\pi)\,\Omega$, donc $C = (3\,E_v\,I)/\Omega = 3 \times 1{,}2 \times 30/\pi \times I$:

$\boxed{C = K_t\,I \quad \text{avec} \quad K_t \approx 34{,}4\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}}$ (contrôle : $34{,}38 \times 12{,}84 \approx 441\,\text{N}\cdot\text{m}$)

Comme pour la **machine à courant continu** ($C_{em} = k\,I$), le couple est proportionnel au courant et la f.é.m. à la vitesse : le moteur synchrone autopiloté se commande comme une MCC, sans balais ni collecteur.

C- Approche à l'étage et bilan

8. $f_a = \frac{10\times15}{60} = 2{,}5\,\text{Hz}$; $E_v = 1{,}2 \times 15 = 18\,\text{V}$; même couple donc même courant, $I = 12{,}8\,\text{A}$; $L\omega_a = 9 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 2{,}5 \approx 0{,}141\,\Omega$ et $L\omega_a I \approx 1{,}82\,\text{V}$:

$$V_a = \sqrt{18^2 + 1{,}82^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_a \approx 18{,}1\,\text{V}}$$

Tension et fréquence sont toutes deux divisées par 10 : le variateur suit une loi à U/f constant.

9. $\eta = P_m/P_a = 6934/7400$ soit $\boxed{\eta \approx 0{,}937}$

Lorsque la cabine vide monte, le contrepoids, plus lourd, entraîne la poulie : le moteur doit le retenir (couple opposé à la vitesse). Il fonctionne en **génératrice** (freinage) : l'énergie est soit dissipée dans une résistance de freinage, soit renvoyée au réseau si le variateur est réversible, ce qui réduit la consommation de l'ascenseur.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 6.A – Modernisation de la motorisation d'un téléski

Partie A – Besoins mécaniques

A.1. $P_1 = F\,v = 9000 \times 3$ soit $\boxed{P_1 = 27\,\text{kW}}$

$$C_1 = F\,\frac{D}{2} = 9000 \times 1{,}25 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_1 = 11\,250\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

A.2. $\Omega_1 = v/(D/2) = 3/1{,}25 = 2{,}4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $N_1 = 30/\pi \times 2{,}4 \approx 22{,}9\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$;
$N_m = 64\,N_1$ soit $\boxed{N_m \approx 1\,467\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$ ($\Omega_m = 64 \times 2{,}4 = 153{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).

A.3. $P_u = P_1/\eta_{red} = 27000/0{,}94 \approx 28{,}7\,\text{kW}$;

$$C_u = \frac{P_u}{\Omega_m} = \frac{28723}{153{,}6} \approx 187\,\text{N}\cdot\text{m}\ \checkmark$$

Partie B – La machine à courant continu actuelle

B.1. $E_n = 440 - 0{,}30 \times 75 = 417{,}5\,\text{V}$

$$k = \frac{417{,}5}{157{,}08} \quad \text{soit} \quad \boxed{k \approx 2{,}658\,\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}}$$

$C_p = 1000/157{,}08 \approx 6{,}37\,\text{N}\cdot\text{m}$.

B.2. $C_{em} = C_u + C_p = 187 + 6{,}37 \approx 193{,}4\,\text{N}\cdot\text{m}$

$$I = \frac{C_{em}}{k} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 72{,}8\,\text{A}}$$

$E = k\,\Omega_m = 2{,}658 \times 153{,}6 \approx 408{,}3\,\text{V}$ et

$$U = E + R\,I = 408{,}3 + 0{,}30 \times 72{,}75 \quad \text{soit} \quad \boxed{U \approx 430\,\text{V}}$$

B.3.

$$P_a = U\,I + U_{exc}\,I_{exc} = 430{,}1 \times 72{,}75 + 220 \times 3 \approx 31\,949\,\text{W}$$

$$P_{j1} = 0{,}30 \times 72{,}75^2 \approx 1\,588\,\text{W} \qquad P_{j2} = 660\,\text{W} \qquad P_c = C_p\,\Omega_m \approx 978\,\text{W}$$

$$P_u = 31949 - 1588 - 660 - 978 \approx 28\,723\,\text{W}\ \checkmark$$

$$\eta = \frac{28723}{31949} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 0{,}899}$$

B.4. $U_d = R \times 1{,}5\,I_n = 0{,}30 \times 112{,}5$ soit $\boxed{U_d \approx 33{,}8\,\text{V}}$. En direct, au démarrage $E = 0$ et $I = 440/0{,}30 \approx 1\,467\,\text{A}$, près de 20 fois I_n : destruction du collecteur et du variateur.

Partie C – Le moteur asynchrone proposé

C.1. Un enroulement supporte 400 V, la tension entre phases du réseau : le moteur est couplé en **triangle**. $N_s = 1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, $p = 2$, $g_n = 22/1500 \approx 0{,}014\,7$.

$P_a = \sqrt{3} \times 400 \times 66 \times 0{,}86 \approx 39\,324\,\text{W}$ et

$$\eta_n = \frac{37000}{39324} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_n \approx 0{,}941}$$

C.2. Couple utile nominal :

$$C_{un} = \frac{37000}{\frac{\pi}{30} \times 1478} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_{un} \approx 239\,\text{N}\cdot\text{m}} > 187\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Le moteur convient, avec une réserve d'environ 28 % (vent, neige sur la piste).

C.3. $K = 239{,}1/(1500 - 1478) \approx 10{,}87\,\text{N}\cdot\text{m}/(\text{tr}\cdot\text{min}^{-1})$

$$N = 1500 - \frac{187}{10{,}87} \quad \text{soit} \quad \boxed{N \approx 1\,483\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$$

$$v = \frac{\pi}{30} \times \frac{1\,482{,}8}{64} \times 1{,}25 \quad \text{soit} \quad \boxed{v \approx 3{,}03\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

La vitesse nominale est respectée à 1 % près.

Partie D – Réglage du variateur

D.1. $\Omega'_1 = 2{,}2/1{,}25 = 1{,}76\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;

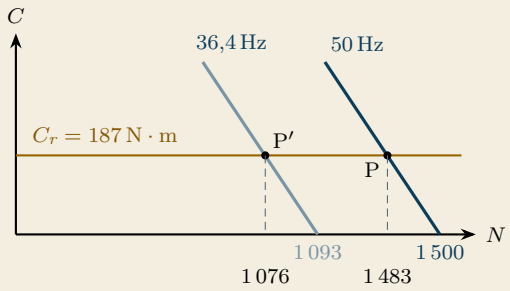
$$\Omega'_m = 64 \times 1{,}76 = 112{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad \boxed{N' \approx 1\,076\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$$

D.2. Même couple, donc même écart $N_s - N = 17{,}2$: $N'_s \approx 1076 + 17{,}2 = 1\,093\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$;

$$f' = \frac{2 \times 1\,092{,}8}{60} \quad \text{soit} \quad \boxed{f' \approx 36{,}4\,\text{Hz}}$$

$$U' = 400 \times \frac{36{,}43}{50} \quad \text{soit} \quad \boxed{U' \approx 291\,\text{V}}$$

D.3. Deux droites parallèles (même pente), coupant l'axe des vitesses en $1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ et $1\,093\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$; la charge est une droite horizontale à $187\,\text{N}\cdot\text{m}$:



Partie E – Bilan pour l'exploitant

E.1. MCC : $P_a \approx 31{,}95\,\text{kW}$; MAS : $28{,}72/0{,}94 \approx 30{,}56\,\text{kW}$. Économie par saison :

$$1{,}39\,\text{kW} \times 1\,200\,\text{h} \quad \text{soit} \quad \boxed{\approx 1\,670\,\text{kW}\cdot\text{h}} \text{ (environ 250 €)}$$

E.2. L'économie d'énergie est modeste ; les vrais arguments sont ailleurs : suppression de l'entretien des balais et du collecteur, moteur standard, robuste et moins cher, démarrage progressif et vitesse réglable par le variateur, avec un couple nominal supérieur au besoin.

✓ Corrigé du sujet BTS 6.B – Microcentrale hydroélectrique sur un ancien moulin

Partie A – La turbine

A.1. $P_h = 1000 \times 9{,}81 \times 2{,}4 \times 18 \approx 423{,}8\,\text{kW}$;

$$P_t = 0{,}88 \times P_h \quad \text{soit} \quad \boxed{P_t \approx 372{,}9\,\text{kW}}$$

A.2. $\Omega = \pi/30 \times 750 \approx 78{,}54\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

$$C_t = \frac{P_t}{\Omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_t \approx 4\,748\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

A.3. $p = (60 \times 50)/750$ soit $\boxed{p = 4}$. Couplé au réseau, l'alternateur tourne obligatoirement à $N_s = (60f)/p = 750\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, imposée par la fréquence du réseau : s'il s'en écartait, il « décrocherait » (fortes surintensités, déclenchement). Le régulateur de la turbine agit sur l'ouverture des pales, donc sur le couple et la puissance fournie, pas sur la vitesse.

Partie B – Identification de l'alternateur

B.1. $I_n = 400000/(\sqrt{3} \times 690)$ soit $\boxed{I_n \approx 335\,\text{A}}$; $V = 690/\sqrt{3} \approx 398{,}4\,\text{V}$.

B.2. $Z = k_1/k_2 = 55/40$ soit $\boxed{Z = 1{,}375\,\Omega}$. $R = 0{,}012\,\Omega$ est plus de 100 fois plus petite : $L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} \approx Z$.

B.3. À vide : $I_{exc} = 398{,}4/55 \approx 7{,}24\,\text{A}$; en court-circuit : $I_{exc} = 334{,}7/40 \approx 8{,}37\,\text{A}$.

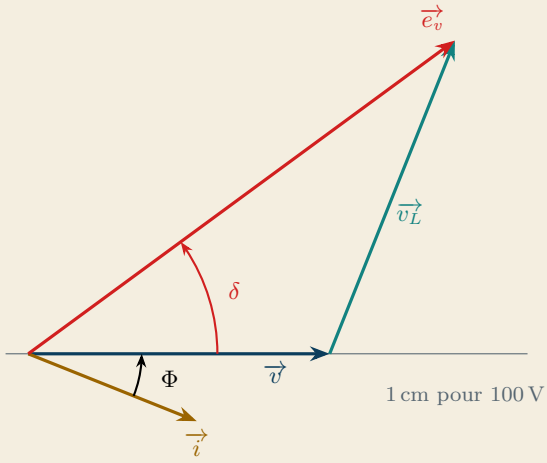
Partie C – Fonctionnement sur le réseau

C.1. $\cos(\Phi) = 1/\sqrt{1 + \tan^2(\Phi)}$ soit $\boxed{\cos(\Phi) \approx 0{,}928}$ ($\Phi \approx 21{,}8°$).

$Q = P_e \tan(\Phi) = 144\,\text{kVAR}$; $S = \sqrt{360^2 + 144^2} \approx 387{,}7\,\text{kVA}$.

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\,U} = \frac{387732}{\sqrt{3} \times 690} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 324\,\text{A}} < I_n \;\checkmark$$

C.2. $\underline{e_v} = \underline{v} + jL\omega\,\underline{i}$. Longueurs : $\vec{v}$: 3,98 cm ; $L\omega\,I = 1{,}375 \times 324{,}4 \approx 446\,\text{V}$, soit 4,46 cm, à $90° - 21{,}8° = 68{,}2°$ de l'horizontale.



C.3. On mesure $\vec{e_v} \approx 7{,}0\,\text{cm}$, soit $E_v \approx 700\,\text{V}$. Par le calcul ($\sin(\Phi) \approx 0{,}371$) :

$$E_v = \sqrt{(398{,}4 + 446{,}1 \times 0{,}371)^2 + (446{,}1 \times 0{,}928)^2}$$

$$E_v = \sqrt{564{,}0^2 + 414{,}2^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_v \approx 700\,\text{V}}$$

$I_{exc} = 700/55$ soit $\boxed{I_{exc} \approx 12{,}7\,\text{A}} < 15\,\text{A}$: compatible.

C.4. À puissance active fixée par la turbine, l'excitation règle la **puissance réactive** échangée avec le réseau : sur-excité (I_{exc} de 10,4 à 12,7 A), l'alternateur fournit du réactif. C'est ainsi que le producteur respecte son contrat.

Partie D – Bilan et production

D.1. $P_{js} = 3 \times 0{,}012 \times 324{,}4^2 \approx 3{,}79\,\text{kW}$; $P_{jr} = 3 \times 12{,}72^2 \approx 486\,\text{W}$;

$$P_m = 360 + 3{,}79 + 0{,}49 + 6 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_m \approx 370{,}3\,\text{kW}} < P_t \approx 372{,}9\,\text{kW}\ \checkmark$$

D.2. $\eta = 360/370{,}3$ soit $\boxed{\eta \approx 0{,}972}$; global : $360/423{,}8 \approx 0{,}85$ ($0{,}88 \times 0{,}972 \approx 0{,}855$: la turbine pourrait fournir 372,9 kW mais seuls 370,3 kW sont demandés ; en régime établi, son régulateur réduit légèrement le débit).

D.3. Énergie vendue et recette annuelle :

$$E = 360 \times 4200 = 1\,512\,000\,\text{kW}\cdot\text{h} \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 1\,512\,\text{MW}\cdot\text{h}}$$

Recette : $1\,512\,000 \times 0{,}13 \approx 196\,600$ € par an.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ calculer un couple, une vitesse angulaire, une puissance mécanique et un rendement ; — ex. 6.1, sujet A
- ☐ établir le bilan des puissances (arbre des pertes) d'une MCC, d'une MAS et d'un alternateur ; — ex. 6.3, 6.5, 6.7
- ☐ utiliser le modèle de l'induit de la MCC : démarrage, réglage de la vitesse par U ; — ex. 6.2, 6.3
- ☐ exploiter la plaque d'un moteur asynchrone : couplage, p, glissement, couple nominal ; — ex. 6.4, 6.6
- ☐ déterminer un point de fonctionnement et régler un variateur à U/f constant ; — ex. 6.6, sujet A
- ☐ tracer le diagramme de Behn-Eschenburg et en déduire E_v et I_{exc} ; — ex. 6.7, sujet B
- ☐ étudier un moteur synchrone autopiloté. — ex. 6.8

Notes

CHAPITRE

7

Électromagnétisme

Champs, circuits magnétiques, forces et induction

Dans ce chapitre

- Champ électrique et rigidité diélectrique
- Champ magnétique des aimants et des courants
- Théorème d'Ampère, excitation H et induction B
- Ferromagnétisme, hystérésis et pertes fer
- Circuits magnétiques : réluctance, loi d'Hopkinson
- Force de Laplace, induction, inductance, électroaimant

Objectifs

- ✓ Calculer un champ électrique et vérifier un isolement
- ✓ Dimensionner un circuit magnétique avec entrefer
- ✓ Appliquer les lois de Laplace, de Faraday et de Lenz
- ✓ Calculer une inductance, une énergie et une force portante

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 7

Cours

Chapitre 7

Toute l'électrotechnique repose sur l'électromagnétisme : un courant crée un champ magnétique (électroaimants, bobines des machines), un champ magnétique exerce une force sur un courant (moteurs), un champ magnétique variable crée une tension (alternateurs, transformateurs). Ce chapitre donne les outils pour calculer ces trois effets, en commençant par le champ électrique, qui intervient dans le dimensionnement des isolants.

7.1 Champ électrique

Charges, force et champ électriques

D

Définition La matière contient des charges électriques : protons (positifs) et électrons (négatifs). Une charge s'exprime en coulombs (C) ; la charge élémentaire vaut $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Deux charges de même signe se repoussent, deux charges de signes contraires s'attirent.

Une charge q placée en un point où règne un **champ électrique** $\vec{E}$ subit une force $\vec{F} = q\,\vec{E}$: de même sens que $\vec{E}$ si $q > 0$, de sens opposé si $q < 0$.

★

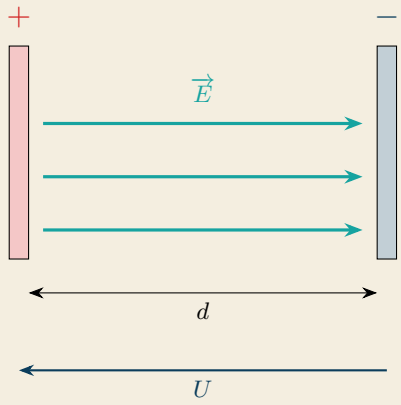
À retenir

$$F = |q| \times E$$

F en newtons (N), q en coulombs (C), E en volts par mètre ($\mathrm{V \cdot m^{-1}}$).

Champ uniforme entre deux plaques

Deux plaques métalliques planes et parallèles, distantes de d, sont soumises à une tension U. Entre elles, loin des bords, le champ est **uniforme** : même direction (perpendiculaire aux plaques), même sens (de la plaque + vers la plaque −), même valeur en tout point.



champ uniforme :
même direction, même sens
et même valeur en tout point
entre les plaques

★ **À retenir**

$$E = \frac{U}{d}$$

E en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, U en volts, d en mètres. Unité pratique : $1\,\mathrm{kV/mm} = 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

Rigidité diélectrique

Un isolant ne reste isolant que si le champ électrique qui y règne reste inférieur à une valeur limite, sa **rigidité diélectrique** E_c. Au-delà, des électrons sont arrachés aux atomes, l'isolant devient conducteur : c'est le **claquage** (arc électrique dans l'air, perforation d'un isolant solide).

★ **À retenir · Tension de claquage**

$$U_c = E_c \times d$$

Isolant	air sec	papier kraft	huile de transformateur	PVC
E_c (kV/mm)	3	8	12	25

Ex **Exemple : gaine d'un câble basse tension** La gaine en PVC d'un câble a une épaisseur $d = 0{,}8\,\mathrm{mm}$: $U_c = 25 \times 0{,}8 = 20\,\mathrm{kV}$. Le câble est prévu pour 1 kV : la marge (facteur 20) couvre le vieillissement, l'échauffement, l'humidité et les surtensions (foudre, manœuvres).

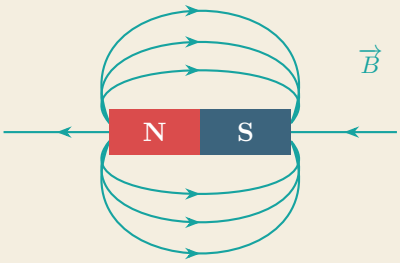
✗ **Piège classique** Mélanger les unités : avec E_c en kV/mm, l'épaisseur doit être en mm et la tension sort en kV. Ne pas oublier non plus qu'au voisinage d'une pointe ou d'un fil fin, le champ est bien plus fort que U/d : c'est là que le claquage commence (effet de pointe, effet couronne).

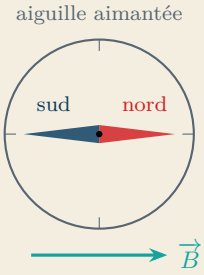
7.2 Champ magnétique

Aimants et lignes de champ

D **Définition** Un **champ magnétique** $\overrightarrow{B}$ règne en un point si une aiguille aimantée y est soumise à des actions. Sa direction et son sens sont ceux de l'aiguille (du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille). Sa valeur B s'exprime en **teslas** (T) et se mesure au teslamètre (sonde à effet Hall, placée perpendiculairement au champ).

Les **lignes de champ** sont tangentes à $\overrightarrow{B}$ en chaque point. À l'extérieur d'un aimant, elles **sortent par le pôle nord** et rentrent par le pôle sud ; elles se resserrent là où le champ est intense.



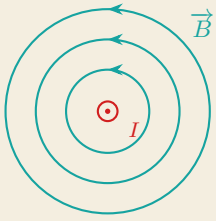


Source	B
champ terrestre (en France)	$\approx 47\,\mu T$
bobine sans noyau (500 spires, 1 A, 20 cm)	$\approx 3\,mT$
aimant ferrite / néodyme (au contact)	0,08 T / 0,45 T
électroaimant à noyau de fer, entrefer d'une machine	0,6 T à 1,5 T
IRM médicale	1,5 T à 3 T

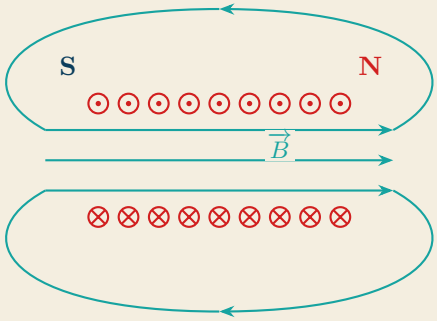
Champ créé par un courant

Un fil parcouru par un courant crée autour de lui un champ magnétique (expérience d'Œrsted, 1820) : les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil. Le sens est donné par la **règle de la main droite** : le pouce dans le sens du courant, les doigts repliés indiquent le sens de $\vec{B}$.

Une **bobine** (solénoïde) superpose les champs de toutes ses spires : à l'intérieur, le champ est intense et pratiquement uniforme ; à l'extérieur, la bobine se comporte comme un aimant droit. La face par laquelle sortent les lignes de champ est la **face nord**.



fil vu en coupe
(courant sortant)



bobine vue en coupe :
⊙ courant sortant
⊗ courant entrant

À retenir · Champ créé par un courant

$$B = k \times I$$

Le champ créé par une bobine est **proportionnel** à l'intensité du courant et change de sens avec lui. Un noyau de fer placé dans la bobine multiplie le champ par plusieurs centaines (électroaimant).

Pour aller plus loin – hors programme Au centre d'un solénoïde long sans noyau : $B = \mu_0\, N\, I/\ell$, avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H $\cdot$ m^{-1} (perméabilité du vide), N le nombre de spires et ℓ la longueur de la bobine. Pour $N = 500$, $\ell = 20$ cm et $I = 1$ A : $B \approx 3{,}1$ mT, soit environ 70 fois le champ terrestre, mais 300 fois moins qu'un électroaimant à noyau de fer.

7.3 Excitation magnétique et théorème d'Ampère

Cette section est hors programme : elle montre comment calculer le champ créé par une bobine.

Excitation H et induction B

Le champ produit par une bobine dépend de deux choses : les ampères-tours $N\,I$ qui le créent, et le matériau placé dans la bobine. On sépare ces deux effets en introduisant l'**excitation magnétique** H, qui ne dépend que des courants, et l'**induction magnétique** B (le « champ magnétique » mesuré au teslamètre), qui dépend aussi du matériau.

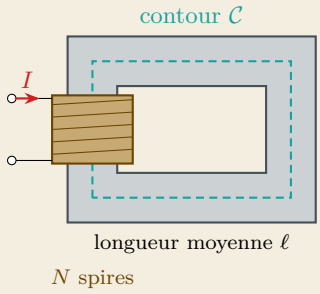
Excitation et induction – hors programme

$$B = \mu_0\, \mu_r\, H = \mu\, H$$

H en ampères par mètre (A $\cdot$ m^{-1}) ; B en teslas (T) ; μ_r : perméabilité relative du matériau (sans unité) : $\mu_r = 1$ pour l'air, le cuivre, l'aluminium ; plusieurs centaines à plusieurs milliers pour le fer et ses alliages.

Théorème d'Ampère

On considère une **ligne de champ** fermée (contour $\mathcal{C}$), orientée. Elle traverse N fois un conducteur parcouru par le courant I : on dit qu'elle enlace $N\,I$ ampères-tours.
Si l'excitation garde la même valeur H_k sur chaque tronçon de longueur ℓ_k du contour, la circulation de H se calcule tronçon par tronçon.



Théorème d'Ampère – hors programme La circulation de l'excitation magnétique le long d'un contour fermé est égale aux ampères-tours enlacés :

$$\sum_k H_k\, \ell_k = N\, I \qquad \text{et pour un circuit homogène :} \quad H\, \ell = N\, I$$

Pour le solénoïde long, le champ extérieur est négligeable : $H = \dfrac{N\,I}{\ell}$ et $B = \mu_0\, H$.

Exemple : tore en fer – hors programme Un tore de fer ($\mu_r = 2000$, longueur moyenne $\ell = 30\,\text{cm}$) porte $N = 200$ spires parcourues par $I = 0{,}5\,\text{A}$:

$$H = \frac{N\,I}{\ell} = \frac{200 \times 0{,}5}{0{,}30} \approx 333\,\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$$

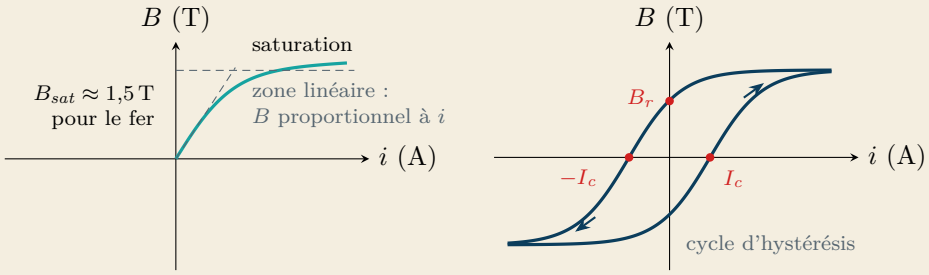
$$B = \mu_0\,\mu_r\,H = 4\pi \times 10^{-7} \times 2000 \times 333 \approx 0{,}84\,\text{T}$$

Sans le fer, on obtiendrait 2000 fois moins, 0,42 mT : le fer « multiplie » le champ.

7.4 Matériaux ferromagnétiques

Aimantation et saturation

Le fer, le nickel, le cobalt et leurs alliages (et les ferrites) sont **ferromagnétiques** : placés dans une bobine parcourue par un courant d'intensité i, ils s'aimantent fortement et canalisent les lignes de champ : le champ est multiplié par plusieurs centaines. Mais la courbe $B(i)$ **n'est pas une droite**.



- Aux faibles courants, B est à peu près proportionnel à i : c'est la **zone linéaire**.
- Aux forts courants, B n'augmente presque plus : le matériau est **saturé** (vers 1,5 T à 1,8 T pour les tôles fer-silicium). Les machines et transformateurs fonctionnent juste avant le coude de saturation.

Cycle d'hystérésis

Si l'on fait varier i de façon alternative, la courbe $B(i)$ à la montée ne coïncide pas avec celle de la descente : le matériau garde une « mémoire » de son état précédent. Le cycle obtenu s'appelle **cycle d'hystérésis**.

Définition **Champ rémanent** B_r : champ qui subsiste quand le courant est annulé ($i = 0$). **Intensité de démagnétisation** I_c : intensité qu'il faut faire circuler en sens inverse pour annuler le champ ($B = 0$).

	Matériau doux	Matériau dur
Cycle	étroit (I_c faible)	large (I_c et B_r élevés)
Exemples	fer pur, tôles fer-silicium, ferrites douces	ferrite dure, néodyme-fer-bore, samarium-cobalt
Usages	circuits magnétiques (transformateurs, stators, électroaimants)	aimants permanents (rotors de machines synchrones, moteurs pas à pas)

Pertes fer

Un circuit magnétique soumis à un champ alternatif s'échauffe : ce sont les **pertes fer** (ou pertes magnétiques), de deux origines.

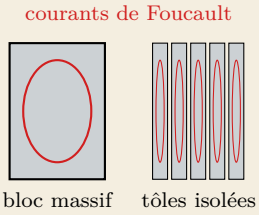
- **Pertes par hystérésis** : à chaque cycle, il faut fournir de l'énergie pour réorienter l'aimantation ; elle est proportionnelle à l'**aire du cycle**. Les pertes sont donc proportionnelles à la fréquence.
- **Pertes par courants de Foucault** : le champ variable induit des courants qui tournent dans la masse du métal et l'échauffent par effet Joule (voir § 7.7). Elles augmentent avec la fréquence et avec l'épaisseur des tôles.

★ **À retenir · Pertes fer**

$$P_{fer} = P_{hyst} + P_{foucault}$$

$$P_{hyst} \propto f \times (\text{aire du cycle})$$

f : fréquence. À tension et fréquence constantes, P_{fer} est constante.



Remèdes. Contre l'hystérésis : un matériau doux (cycle étroit), par exemple des tôles fer-silicium à grains orientés. Contre les courants de Foucault : un circuit **feuilleté**, empilement de tôles minces (0,23 mm à 0,5 mm) isolées entre elles, qui coupe le chemin des courants induits ; en haute fréquence, des ferrites (isolantes). Sous tension et fréquence constantes, les pertes fer sont constantes : on les mesure par un essai à vide (voir § 3.5).

\+ **Lois d'évolution des pertes fer** – hors programme À induction maximale B_{max} fixée, $P_{hyst} = a\,f$ et $P_{foucault} = b\,f^2$, où b est proportionnel au carré de l'épaisseur e des tôles. Exemple : un transformateur présente à 50 Hz des pertes par hystérésis de 12 W et des pertes par courants de Foucault de 6 W. Alimenté en 60 Hz au même B_{max} (rapport $\frac{60}{50} = 1{,}2$), les pertes fer passent de 18 W à :

$$P_{hyst} = 12 \times 1{,}2 = 14{,}4\,\text{W} \; ; \quad P_{foucault} = 6 \times 1{,}2^2 \approx 8{,}6\,\text{W} \; ; \quad P_{fer} \approx 23\,\text{W}$$

7.5 Circuits magnétiques

Flux magnétique

Toute cette section est hors programme : elle explique comment on calcule un circuit magnétique, et les formules utiles sont rappelées dans les énoncés qui en ont besoin.

Flux magnétique – hors programme Le **flux magnétique** à travers une surface S perpendiculaire à un champ uniforme B vaut $\Phi = B \times S$, en webers (Wb). Si la normale à la surface fait un angle θ avec $\vec{B}$: $\Phi = B\,S\cos(\theta)$. Pour une bobine de N spires, le flux total est $N\,\Phi$.

Un **circuit magnétique** est un ensemble de pièces ferromagnétiques qui canalise les lignes de champ créées par une bobine, comme un fil canalise le courant. Le flux est **conservé** le long d'un circuit sans dérivation : le même Φ traverse chaque section. Attention : le symbole Φ du flux n'a rien à voir avec le déphasage Φ du chapitre 1 (voir § 1.5).

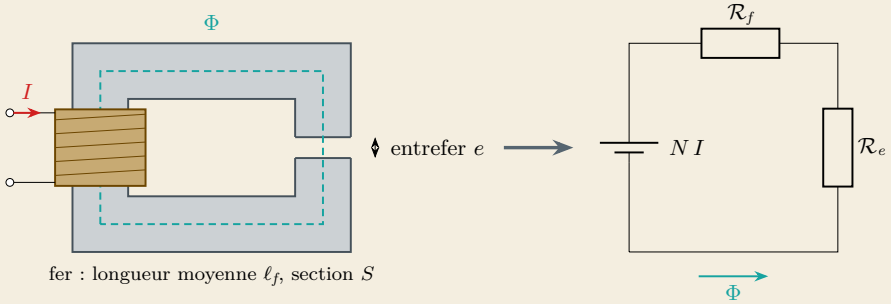
Réluctance et loi d'Hopkinson

Sur un tronçon de longueur ℓ_k et de section S_k, $H_k = B_k/(\mu_0\,\mu_{rk}) = \Phi/(\mu_0\,\mu_{rk}\,S_k)$. Le théorème d'Ampère $\sum H_k\,\ell_k = N\,I$ devient alors :

Loi d'Hopkinson – hors programme

$$N\,I = \mathcal{R} \times \Phi \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{R} = \sum_k \mathcal{R}_k \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_k = \frac{\ell_k}{\mu_0\,\mu_{rk}\,S_k}$$

$N\,I$: force magnétomotrice (en ampères-tours, A) ; $\mathcal{R}$: **réluctance** (en H^{-1}) ; Φ : flux (Wb). Des réluctances en série s'ajoutent.



fer : longueur moyenne ℓ_f, section S — schéma équivalent

Circuit électrique	Circuit magnétique
force électromotrice E (V)	force magnétomotrice $N\,I$ (A)
intensité I (A)	flux Φ (Wb)
résistance $R = \rho\,\dfrac{\ell}{S}$	réluctance $\mathcal{R} = \dfrac{\ell}{\mu_0\,\mu_r\,S}$
loi d'Ohm $E = R\,I$	loi d'Hopkinson $N\,I = \mathcal{R}\,\Phi$

Méthode : dimensionner un circuit magnétique – hors programme

1. Découper le circuit en tronçons homogènes (fer, entrefers) ; relever ℓ_k, S_k, μ_{rk}.
2. Calculer chaque réluctance $\mathcal{R}_k = \ell_k/(\mu_0\,\mu_{rk}\,S_k)$, puis la réluctance totale (somme).
3. Appliquer la loi d'Hopkinson : $\Phi = N\,I/\mathcal{R}$, puis $B = \Phi/S$, ou inversement $N\,I = \mathcal{R}\,B\,S$ pour obtenir un champ voulu.
4. Vérifier que B reste inférieur à l'induction de saturation, sinon le modèle linéaire est faux.

Exemple : circuit avec entrefer – hors programme Fer : $\ell_f = 40\,\text{cm}$, $S = 9\,\text{cm}^2$, $\mu_r = 2500$; entrefer $e = 1\,\text{mm}$; $N = 400$ spires, $I = 1{,}5\,\text{A}$.

$$\mathcal{R}_f = \frac{0{,}40}{4\pi \times 10^{-7} \times 2500 \times 9 \times 10^{-4}} \approx 1{,}41 \times 10^{5}\,\text{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{-4}} \approx 8{,}84 \times 10^{5}\,\text{H}^{-1}$$

$$\Phi = \frac{N\,I}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_e} = \frac{400 \times 1{,}5}{1{,}03 \times 10^{6}} \approx 5{,}85 \times 10^{-4}\,\text{Wb} \qquad B = \frac{\Phi}{S} \approx 0{,}65\,\text{T}$$

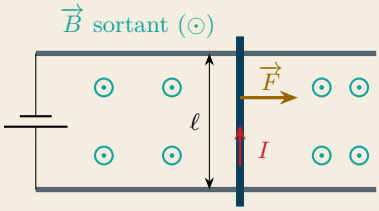
L'entrefer de 1 mm a une réluctance six fois plus grande que les 40 cm de fer : c'est lui qui impose le courant nécessaire.

Piège classique Oublier de convertir les longueurs en m et les sections en m^2 ($9\,\text{cm}^2 = 9 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$). Autre erreur fréquente : appliquer la loi d'Hopkinson sans vérifier la saturation ; un calcul qui donne $B = 3\,\text{T}$ dans du fer est physiquement impossible.

7.6 Force de Laplace

Un conducteur rectiligne de longueur ℓ, parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, subit une force $\vec{F}$:

- ▷ perpendiculaire au conducteur et à $\vec{B}$;
- ▷ de sens donné par la **règle des trois doigts de la main droite** : pouce = I, index = $\vec{B}$, majeur = $\vec{F}$.



rails de Laplace (vue de dessus)

Force de Laplace – hors programme

$F = B\,I\,\ell\,\sin(\alpha)$ et, si le conducteur est perpendiculaire à $\vec{B}$: $F = B\,I\,\ell$

F en N, B en T, I en A, ℓ : longueur du conducteur plongée dans le champ (m) ; α : angle entre le conducteur et $\vec{B}$.

C'est le principe de **tous les moteurs électriques** : dans un moteur, des conducteurs placés dans le champ de l'entrefer (environ 1 T) subissent des forces dont les moments s'ajoutent pour former le couple. Inverser le courant **ou** le champ inverse la force ; inverser les deux la laisse inchangée (c'est pourquoi un moteur universel tourne aussi en alternatif).

Exemple : conducteur d'un rotor – hors programme Un conducteur de longueur utile $\ell = 25\,\text{cm}$, parcouru par $I = 30\,\text{A}$, dans un entrefer où $B = 0{,}8\,\text{T}$: $F = 0{,}8 \times 30 \times 0{,}25 = 6\,\text{N}$. Situé à $r = 10\,\text{cm}$ de l'axe, il produit un moment de $6 \times 0{,}1 = 0{,}6\,\text{N}\cdot\text{m}$; avec 40 conducteurs actifs, le couple atteint $24\,\text{N}\cdot\text{m}$.

7.7 Induction électromagnétique

Lois de Faraday et de Lenz

Lorsque le flux magnétique à travers une bobine **varie**, une tension appelée **force électromotrice induite** (f.é.m.) apparaît à ses bornes.

Le flux peut varier parce que l'aimant bouge, parce que la bobine tourne, ou parce que le courant qui crée le champ varie. Un aimant immobile devant une bobine immobile n'induit rien.

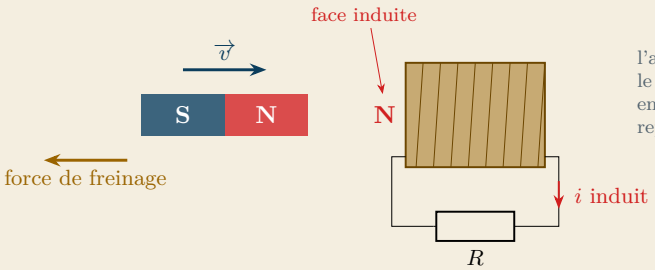
À retenir · Loi de Faraday Une bobine placée dans un champ magnétique **variable** voit apparaître une tension induite à ses bornes. Cette tension est d'autant plus grande que le champ varie **vite** (fréquence, vitesse) et que la bobine comporte un grand nombre de **spires** ; elle est alternative si le champ est alternatif.

Expression de la loi de Faraday – hors programme

$$e(t) = -N\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{en valeur moyenne :} \quad |e| = N\,\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$$

e en volts ; $\varphi(t)$: flux à travers une spire (Wb) ; N : nombre de spires.

À retenir · Loi de Lenz Le courant induit (si le circuit est fermé) a un sens tel que ses effets **s'opposent à la cause** qui lui a donné naissance. C'est le sens du signe − dans la loi de Faraday.



Exemple – hors programme Le flux à travers une bobine de $N = 200$ spires passe de 0 à 2 mWb en 10 ms : $|e| = 200 \times 2 \times 10^{-3} / 10 \times 10^{-3} = 40$ V.

Conducteur en mouvement dans un champ

Un conducteur de longueur ℓ qui se déplace à la vitesse v perpendiculairement à un champ B « balaie » du flux : une f.é.m. apparaît entre ses extrémités. C'est le principe de l'alternateur et de la génératrice (voir § 6.4).

Conducteur en mouvement – hors programme

$$e = B\,\ell\,v$$

e en volts ; B en teslas ; ℓ : longueur du conducteur dans le champ (m) ; v : vitesse perpendiculaire au champ ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

Si le conducteur débite un courant, la force de Laplace qu'il subit est opposée à son déplacement (loi de Lenz) : il faut fournir un travail mécanique pour produire de l'énergie électrique. Exemple : $B = 1$ T, $\ell = 0{,}30$ m, $v = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ donnent $e = 6$ V par conducteur ; les conducteurs sont mis en série pour obtenir la tension voulue.

Courants de Foucault

Dans une pièce métallique **massive** soumise à un champ variable, ou en mouvement dans un champ, des courants induits circulent en boucles dans la masse. Ils sont **utiles** pour chauffer (plaque et four à induction), freiner sans usure (ralentisseurs de poids lourds, freins de manèges) ou mesurer (compteurs, détecteurs de métaux). Ils sont **nuisibles** dans les circuits magnétiques (pertes fer, échauffement) : d'où le feuilletage (voir § 3.1).

Application : la formule de Boucherot

Dans un transformateur, la tension sinusoïdale $u_1(t)$ appliquée au primaire impose un flux sinusoïdal $\varphi(t) = \Phi_{max} \sin(\omega t)$ dans le circuit magnétique. Ce flux variable induit une f.é.m. dans chaque spire, du primaire comme du secondaire : $e(t) = -N\,\omega\,\Phi_{max} \cos(\omega t)$, de valeur maximale $N\,\omega\,\Phi_{max}$. En valeur efficace, avec $\Phi_{max} = B_{max}\,S$ et $2\pi/\sqrt{2} \approx 4{,}44$:

Formule de Boucherot – hors programme

$$U \approx E = 4{,}44\,N\,f\,B_{max}\,S$$

U : tension efficace aux bornes d'un enroulement de N spires ; f : fréquence ; B_{max} : induction maximale (T) ; S : section du circuit magnétique ($\mathrm{m^2}$).

Exemple – hors programme Pour un primaire 230 V, 50 Hz, sur un circuit de section $S = 20\ \mathrm{cm^2}$, avec $B_{max} = 1{,}3$ T : $N_1 = 230/(4{,}44 \times 50 \times 1{,}3 \times 20 \times 10^{-4}) \approx 398$ spires, soit environ 400 spires.

✗ **Piège classique** Brancher un transformateur (ou toute bobine prévue pour l'alternatif) sur une tension **continue** : le flux ne varie pas, aucune f.é.m. ne s'oppose à la tension, et seule la faible résistance du bobinage limite le courant. L'enroulement brûle en quelques secondes.

En ligne : animations de la loi de Faraday (aimant et bobine), de la loi de Lenz (chute d'un aimant dans un tube de cuivre) et du cycle d'hystérésis.

7.8 Inductance

Inductance propre d'une bobine

Une bobine parcourue par un courant i crée un flux φ qui traverse ses propres spires.

Si le circuit n'est pas saturé, le flux total $N\varphi$ est proportionnel à i : le coefficient de proportionnalité est l'**inductance** L de la bobine, en henrys (H).

\+ **Inductance** – hors programme

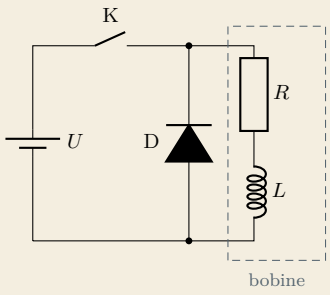
$$L = \frac{N\,\Phi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \qquad u(t) = R\,i(t) + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad W = \frac{1}{2}\,L\,I^2$$

W : énergie magnétique stockée (J). Quand i varie, la bobine produit une f.é.m. d'auto-induction qui s'oppose à la variation (loi de Lenz) : une inductance « lisse » le courant.

\+ **Exemple : le circuit avec entrefer du § 7.5** – hors programme $L = N^2/\mathcal{R} = 400^2/1{,}03\times10^6 \approx 0{,}156\,\mathrm{H}$ et $W = \frac{1}{2}\times0{,}156\times1{,}5^2 \approx 0{,}18\,\mathrm{J}$.
Sans entrefer, la réluctance serait 7 fois plus faible et L 7 fois plus grande, mais le fer saturerait dès $I \approx 0{,}5\,\mathrm{A}$: l'entrefer rend l'inductance **stable** et permet de stocker de l'énergie. C'est pourquoi les inductances de lissage ont toujours un entrefer.

Ouverture d'un circuit inductif

À l'ouverture de l'interrupteur K, le courant devrait s'annuler instantanément : $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ serait énorme, et la f.é.m. $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ aussi. Une surtension apparaît, qui crée un arc aux contacts et peut détruire un transistor. La **diode de roue libre** D, montée en parallèle sur la bobine, offre un chemin au courant, qui décroît alors avec la constante de temps $\tau = L/R$: l'énergie $\frac{1}{2}LI^2$ se dissipe dans la résistance de la bobine.



Exemple : bobine d'un relais – hors programme Une bobine de relais ($R = 400\,\Omega$, $L = 1{,}2\,\text{H}$) est alimentée sous 24 V continu : $I = 24/400 = 60\,\text{mA}$, $\tau = 1{,}2/400 = 3\,\text{ms}$ et $W = \frac{1}{2} \times 1{,}2 \times 0{,}060^2 \approx 2{,}2\,\text{mJ}$. L'énergie est faible, mais libérée en quelques microsecondes sans diode, elle suffit à détruire le transistor de commande d'un automate.

7.9 Électroaimant et applications

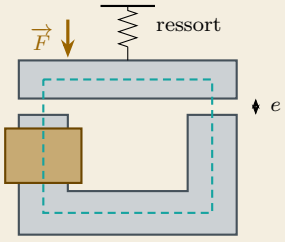
Force portante d'un électroaimant

Un électroaimant attire une pièce ferromagnétique (palette, armature) pour réduire la réluctance de son circuit. L'énergie magnétique stockée dans un entrefer de section S permet de calculer la force d'attraction exercée à travers lui.

Force portante – hors programme

$$F = \frac{B^2\,S}{2\,\mu_0} \text{ par entrefer} \qquad \text{deux pôles identiques : } F = \frac{B^2\,S}{\mu_0}$$

B : induction dans l'entrefer (T) ; S : surface d'un pôle (m^2) ; F en newtons.



palette (en haut) attirée

Pour un même courant, la force augmente beaucoup quand l'entrefer diminue : la réluctance baisse, donc B augmente, et F varie comme B^2. Une fois la palette collée, on peut réduire le courant de maintien : c'est le rôle des « économiseurs » des freins et des contacteurs, qui limitent l'échauffement de la bobine.

Exemple : contacteur – hors programme Les deux pôles du circuit d'un contacteur ont chacun une surface de $2\,\text{cm}^2$; bobine alimentée, l'induction dans les entrefers vaut 0,8 T : $F = 0{,}8^2 \times 2 \times 10^{-4}/(4\pi \times 10^{-7}) \approx 102\,\text{N}$, largement assez pour vaincre le ressort de rappel et fermer les contacts.

Piège classique Négliger un entrefer parasite : peinture, rouille, calamine ou poussière entre l'électroaimant et la pièce ajoutent un entrefer de quelques dixièmes de millimètre qui peut diviser la force par deux ou trois. Les électroaimants de levage sont toujours calculés avec un coefficient de sécurité, et la surface des pièces doit être propre et plane. De même, un contacteur dont les pôles sont encrassés « ronfle » et chauffe : la palette, mal collée, vibre à 100 Hz.

L'électromagnétisme en électrotechnique

Application	Phénomène utilisé
Transformateur	induction (loi de Faraday) dans un circuit magnétique feuilleté
Moteurs (MCC, MAS, MS)	force de Laplace sur les conducteurs ; induction dans le rotor de la MAS
Alternateurs, génératrices	f.é.m. induite dans des conducteurs qui coupent un champ tournant
Contacteurs, relais, freins	force portante d'un électroaimant
Disjoncteur (déclencheur magnétique)	électroaimant qui attire un percuteur au-delà d'un seuil de courant
Pince ampèremétrique, capteurs	effet Hall (continu) ou induction (alternatif)
Chauffage par induction	courants de Foucault dans le métal à chauffer
Isolement des câbles et machines	rigidité diélectrique des isolants

Ex

Exemple : déclencheur magnétique d'un disjoncteur Un disjoncteur de courbe C, de calibre $I_n = 16\,\text{A}$, doit déclencher instantanément entre $5\,I_n$ et $10\,I_n$, soit entre 80 A et 160 A. Le courant traverse une petite bobine : le champ qu'elle crée est proportionnel au courant ($B = k \times I$). En fonctionnement normal (16 A), le champ est trop faible pour attirer le percuteur, retenu par un ressort. Lors d'un court-circuit de 1 600 A, le champ est 100 fois plus grand qu'au courant nominal et au moins 10 fois plus grand qu'au seuil : le percuteur est attiré en quelques millisecondes et ouvre les contacts, bien avant que le câble ne s'échauffe.

\+

Synthèse : quelle loi utiliser ? – hors programme

1. On cherche un **champ créé par des courants** : théorème d'Ampère ($\sum H_k\,\ell_k = N\,I$) ou, pour un circuit magnétique, loi d'Hopkinson ($N\,I = \mathcal{R}\,\Phi$), puis $B = \Phi/S$.
2. On cherche une **force** : sur un conducteur parcouru par un courant, force de Laplace $F = B\,I\,\ell$; sur une pièce en fer attirée, force portante $F = B^2 S/(2\mu_0)$ par entrefer.
3. On cherche une **tension** : flux variable dans une bobine, loi de Faraday ou formule de Boucherot en sinusoïdal ; conducteur en mouvement, $e = B\,\ell\,v$. Le sens se trouve par la loi de Lenz.
4. On cherche une **énergie** ou un comportement transitoire : inductance $L = N^2/\mathcal{R}$, énergie $\frac{1}{2}LI^2$, constante de temps L/R.
5. Dans tous les cas, on **vérifie la saturation** ($B < 1{,}5\,\text{T}$ à $1{,}8\,\text{T}$ dans le fer) et les unités SI (m, m^2, T, Wb).

L'essentiel

Chapitre 7

Électromagnétisme

Force électrique	$F = \lvert q \rvert \times E$
Champ entre deux plaques	$E = \dfrac{U}{d}$
Unités	$1\,\text{kV/mm} = 10^6\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ $\quad e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$
Tension de claquage	$U_c = E_c \times d$
Rigidités diélectriques (kV/mm)	air 3 papier 8 huile 12 PVC 25
Champ magnétique	$\overrightarrow{B}$ en teslas (T) ; lignes sortant par le pôle nord
Champ créé par un courant	$B = k \times I$
Champ terrestre (France)	$B \approx 47\,\mu\text{T}$
Aimants (au contact)	ferrite 0,08 T $\quad$ néodyme 0,45 T
Électroaimant à noyau de fer	$B \approx 0{,}6\,\text{T}$ à $1{,}5\,\text{T}$
Saturation du fer	$B_{sat} \approx 1{,}5\,\text{T}$
Champ rémanent	B_r pour $i = 0$
Intensité de démagnétisation	I_c pour $B = 0$
Matériau doux / dur	cycle étroit / cycle large (aimants)
Pertes fer	$P_{fer} = P_{hyst} + P_{foucault}$
Pertes par hystérésis	$P_{hyst} \propto f \times$ (aire du cycle)
Contre les courants de Foucault	tôles feuilletées et isolées
Loi de Faraday	champ variable $\Rightarrow$ tension induite
Tension induite plus grande si	variation rapide, nombreuses spires
Aimant immobile	$e = 0$
Loi de Lenz	le courant induit s'oppose à sa cause

Exercices

Chapitre 7

Champs électrique et magnétique

Exercice 7.1 – Électrofiltre d'une cimenterie ★☆☆

Les fumées du four d'une cimenterie sont chargées de fines poussières qu'il est interdit de rejeter dans l'atmosphère. Elles traversent un électrofiltre : des électrodes portées à une haute tension négative chargent les poussières, qui sont attirées par des plaques collectrices reliées à la terre, puis récupérées par frappage. Après le remplacement du transformateur haute tension, le technicien vérifie les ordres de grandeur du réglage. On modélise une cellule du filtre par deux plaques planes parallèles distantes de $d = 12\,\text{cm}$, soumises à la tension $U = 48\,\text{kV}$ (la plaque collectrice est la plaque positive).

1. Calculer la valeur du champ électrique E entre les plaques, en $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ puis en kV/mm. Préciser son sens.
2. Un grain de poussière porte la charge $q = -3{,}2\times10^{-15}\,\text{C}$. Combien d'électrons a-t-il captés ? Calculer la force électrique F qu'il subit et préciser vers quelle plaque elle est dirigée.
3. La masse du grain vaut $m = 1{,}5\times10^{-12}\,\text{kg}$ ($g = 9{,}81\,\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$). Comparer la force électrique à son poids. Conclure.
4. La rigidité diélectrique de l'air sec vaut $E_c = 3\,\text{kV/mm}$. Calculer la tension de claquage de l'espace entre les plaques dans ce modèle.
5. En réalité, des arcs se produisent dès 70 kV environ. Proposer une explication, sachant que les électrodes émissives sont des fils fins.

→ corrigé p. 252

Exercice 7.2 – Bobine d'étalonnage de capteurs à effet Hall ★☆☆

Une entreprise fabrique des capteurs de courant à effet Hall destinés aux variateurs de vitesse. En fin de chaîne, chaque capteur est contrôlé dans une longue bobine sans noyau, qui produit un champ magnétique connu. Le technicien qualité doit établir la relation entre le courant d'alimentation de la bobine et le champ produit, et vérifier l'influence du champ terrestre.

La bobine comporte $N = 1200$ spires réparties sur une longueur $\ell = 50\,\text{cm}$; son bobinage a une résistance $R = 4{,}5\,\Omega$. Au centre d'une bobine longue sans noyau, le champ vaut $B = \mu_0\, N\, I/\ell$, avec $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

1. Calculer le champ B au centre de la bobine pour $I = 1\,\text{A}$. Montrer que $B = k\times I$ et donner la valeur de k en mT/A.
2. Quelle intensité faut-il faire circuler pour obtenir $B = 10\,\text{mT}$?
3. Le champ terrestre vaut environ $47\,\mu\text{T}$. Quelle erreur relative commettrait-on

sur un étalonnage à 1 mT si l'on ne réglait pas le zéro du teslamètre, bobine non alimentée ?

4. Vu depuis l'extrémité X de la bobine, le courant parcourt les spires dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. L'extrémité X est-elle une face nord ou une face sud ? Que se passe-t-il si l'on inverse le courant ?
5. Calculer la puissance dissipée dans la bobine pour l'essai à 10 mT. Pourquoi ne peut-on pas maintenir longtemps ce courant sans ventilation ?

→ corrigé p. 253

Circuits magnétiques, forces et induction

Exercice 7.3 – Inductance de lissage d'un variateur ★★☆

Un fabricant de variateurs de vitesse place sur le bus continu de ses appareils une inductance de lissage, qui limite les pointes de courant absorbées sur le réseau. Le bureau d'études doit vérifier un prototype : l'inductance doit valoir au moins 4 mH au courant nominal de 25 A, sans que le circuit magnétique ne sature.

Données

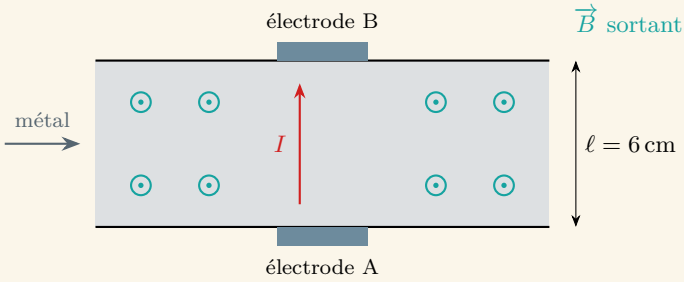
- Circuit magnétique en tôles fer-silicium : longueur moyenne $\ell_f = 24\,\text{cm}$, section $S = 12\,\text{cm}^2$, perméabilité relative $\mu_r = 3000$ dans la zone linéaire, induction à ne pas dépasser $B_{max} = 1{,}2\,\text{T}$.
- Entrefer (de même section S) : $e = 2\,\text{mm}$.
- Bobine : $N = 75$ spires ; courant continu nominal $I = 25\,\text{A}$.
- Formules : réluctance d'un tronçon $\mathcal{R} = \dfrac{\ell}{\mu_0\,\mu_r\,S}$ ($\mu_r = 1$ dans l'air) ; loi d'Hopkinson $N\,I = \mathcal{R}\,\Phi$ (réluctances en série : elles s'ajoutent) ; $\Phi = B\,S$; inductance $L = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}}$; énergie $W = \dfrac{1}{2}\,L\,I^2$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

1. Calculer la réluctance $\mathcal{R}_f$ du fer et la réluctance $\mathcal{R}_e$ de l'entrefer. Lequel des deux impose la réluctance totale ?
2. Dessiner le schéma électrique équivalent du circuit magnétique. Appliquer la loi d'Hopkinson pour calculer le flux Φ puis l'induction B au courant nominal. Le critère de non-saturation est-il respecté ?
3. Calculer l'inductance L. Le cahier des charges est-il respecté ?
4. Calculer l'énergie magnétique stockée au courant nominal. Quelle fraction est stockée dans l'entrefer ? (On admettra que l'énergie se répartit entre les tronçons comme les réluctances.)
5. Un technicien propose de supprimer l'entrefer pour augmenter L. Calculer l'induction qu'on obtiendrait alors à 25 A dans le modèle linéaire. Conclure.

→ corrigé p. 254

Exercice 7.4 – Pompe électromagnétique d'une fonderie ★★☆

Une fonderie d'aluminium veut transférer le métal liquide du four de maintien vers les moules sans pièce mobile au contact du métal à 700 °C. Elle installe une pompe électromagnétique : un fort courant traverse le métal liquide d'une paroi à l'autre du canal, dans le champ magnétique d'un électroaimant. Le technicien doit vérifier que la pompe peut élever le métal jusqu'aux moules, situés 80 cm plus haut.



canal vu de dessus ; hauteur du métal dans le canal : $h = 3\,\text{cm}$

Données

- Induction verticale dans le canal : $B = 0{,}50\,\text{T}$; courant entre les électrodes : $I = 1\,500\,\text{A}$.
- Largeur du canal (distance entre électrodes) $\ell = 6\,\text{cm}$; hauteur de métal $h = 3\,\text{cm}$.
- Masse volumique de l'aluminium liquide : $\rho = 2\,370\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$.
- L'électroaimant a un entrefer total $e = 5\,\text{cm}$ (canal et parois réfractaires) ; la réluctance de son fer est négligée.
- Formules ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$) : force de Laplace sur un conducteur de longueur ℓ perpendiculaire au champ : $F = B\,I\,\ell$; sens donné par la règle des trois doigts de la main droite (pouce : I, index : $\vec{B}$, majeur : $\vec{F}$). Ampères-tours nécessaires pour créer B dans un entrefer e (fer négligé) : $N\,I = \dfrac{B\,e}{\mu_0}$.

1. À l'aide de la règle des trois doigts, déterminer le sens de la force de Laplace qui s'exerce sur le métal situé entre les électrodes. Dans quel sens le métal est-il poussé ?
2. Calculer la valeur de cette force.
3. Cette force s'exerce sur la section du canal $S = \ell \times h$. Calculer la pression $p = F/S$ créée par la pompe, puis la hauteur maximale $z = p/(\rho\,g)$ à laquelle elle peut élever le métal. Conclure.
4. Le métal circule maintenant à contresens. Proposer deux façons d'inverser le sens de pompage.
5. On envisage d'alimenter l'électroaimant et les électrodes par le même courant alternatif. Le métal est-il encore poussé toujours dans le même sens ? Justifier.

6. Calculer les ampères-tours nécessaires pour créer $B = 0{,}50\,\text{T}$ dans l'entrefer, puis le courant dans une bobine de 400 spires.

→ corrigé p. 255

Exercice 7.5 – Transformateur de commande d'une armoire ★★☆

Un constructeur d'armoires électriques fabrique lui-même les petits transformateurs 230 V/24 V qui alimentent les circuits de commande (bobines de contacteurs, voyants). Il dispose d'un stock de circuits magnétiques de section utile $S = 8\,\text{cm}^2$, en tôles de 0,5 mm. Le technicien doit calculer le nombre de spires des enroulements et étudier deux demandes de clients.

1. Expliquer, à l'aide de la loi de Faraday, pourquoi une tension apparaît au secondaire quand le primaire est alimenté en alternatif.

2. Le primaire de N_1 spires est soumis à $u_1(t) = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t)$. On admet que le flux dans une spire est $\varphi(t) = \Phi_{max}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, avec $\Phi_{max} = B_{max}\,S$, et que la f.é.m. induite dans l'enroulement s'écrit $e(t) = -N_1\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ (expression de la loi de Faraday). Montrer que sa valeur efficace vaut $E = 4{,}44\,N_1\,f\,B_{max}\,S$.

3. On choisit $B_{max} = 1{,}2\,\text{T}$ à 50 Hz. Calculer N_1 pour $U_1 = 230\,\text{V}$, puis N_2 pour obtenir 25,2 V à vide au secondaire (5 % de plus que 24 V pour compenser les chutes de tension en charge). Arrondir à l'entier supérieur.

4. Un client exporte l'armoire vers un pays où le réseau est à 230 V, 60 Hz. Que devient B_{max} ? Le transformateur peut-il être conservé ?

5. Un autre client veut l'alimenter sous 230 V continu. Le primaire a une résistance de $12\,\Omega$. Calculer le courant absorbé et conclure.

6. À 50 Hz, les pertes fer valent 3 W, dont 2 W par hystérésis. Les pertes par courants de Foucault sont proportionnelles au carré de l'épaisseur des tôles. Calculer les pertes fer avec des tôles de 0,35 mm de même qualité, puis l'énergie économisée en un an de fonctionnement continu.

→ corrigé p. 255

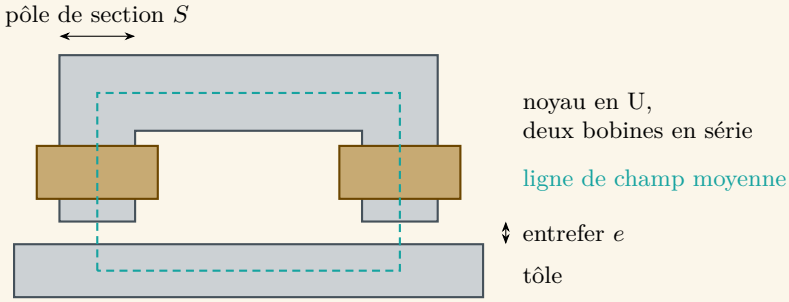
Exercice 7.6 – Électroaimant de levage de tôles ★★★

Un centre de découpe laser manipule ses tôles d'acier avec un palonnier équipé d'électroaimants, suspendu à un pont roulant. Après qu'une tôle rouillée a glissé pendant une manutention, le responsable sécurité demande au technicien de vérifier la force portante d'un électroaimant et de rédiger une consigne.

Données

- Section du noyau, des pôles et de la tôle sur le trajet du flux : $S = 100\,\text{cm}^2$.
- Longueur moyenne du trajet dans le fer (noyau et tôle) : $\ell_f = 80\,\text{cm}$; $\mu_r = 1500$ (zone linéaire, jusqu'à 1,5 T).
- Bobinage : $N = 600$ spires au total, résistance $R = 55\,\Omega$, alimenté sous $U = 110\,\text{V}$ continu.

- ▷ Tôle propre : entrefer $e = 0{,}5\,\text{mm}$ sous chaque pôle (planéité, peinture). Tôle rouillée : $e = 1\,\text{mm}$.
- ▷ Tôle manutentionnée : $2\,\text{m} \times 1\,\text{m} \times 20\,\text{mm}$, acier de masse volumique $7\,800\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. La consigne exige un coefficient de sécurité d'au moins 2.
- ▷ Formules : $\mathcal{R} = \dfrac{\ell}{\mu_0\,\mu_r\,S}$ ($\mu_r = 1$ dans l'air) ; $N\,I = \mathcal{R}\,\Phi$ (réluctances en série : elles s'ajoutent) ; $\Phi = B\,S$; force portante d'un électroaimant à deux pôles de surface S : $F = \dfrac{B^2\,S}{\mu_0}$; $L = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}}$; $W = \dfrac{1}{2}\,L\,I^2$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.



A- Circuit magnétique (tôle propre)

1. Calculer le courant I dans le bobinage.

2. Calculer la réluctance du fer, celle d'un entrefer, puis la réluctance totale du circuit (le flux traverse deux entrefers).

3. Calculer le flux Φ et l'induction B dans les entrefers. Le modèle linéaire est-il valable ?

B- Force portante

4. Calculer la force portante F de l'électroaimant (deux pôles), puis la masse maximale qu'il peut soulever.

5. Calculer la masse de la tôle et le coefficient de sécurité. Est-il conforme ?

C- Tôle rouillée

6. Reprendre le calcul de B et de F avec $e = 1\,\text{mm}$, au même courant. Expliquer l'incident.

7. Quel courant faudrait-il pour retrouver un coefficient de sécurité de 2 ? Est-ce raisonnable ?

D- Bobinage

8. Calculer l'inductance L du bobinage (tôle propre), sa constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ et l'énergie magnétique stockée.

9. Pour lâcher la tôle, on ouvre le circuit d'alimentation. Pourquoi faut-il prévoir un dispositif (diode, varistance) aux bornes du bobinage ?

10. Calculer la puissance consommée par le bobinage. Rédiger une consigne de sécurité en trois points pour les opérateurs.

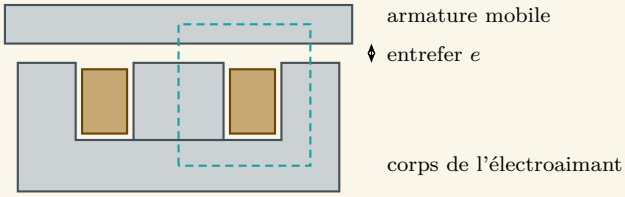
→ corrigé p. 256

Sujets de type BTS

Sujet BTS 7.A – Frein électromagnétique d'un pont roulant

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Le moteur de levage d'un pont roulant d'atelier est équipé d'un frein « à manque de courant » : des ressorts serrent les garnitures sur un disque solidaire de l'arbre ; pour libérer le moteur, un électroaimant attire l'armature mobile et comprime les ressorts. En cas de coupure de courant, le frein retombe seul et la charge reste suspendue : c'est un dispositif de sécurité. Le service maintenance veut remplacer la bobine et installer un « économiseur » qui réduit le courant une fois le frein ouvert.



coupe : pôle central entouré de la bobine annulaire

Données

- Bobine : $N = 600$ spires ; résistance $R = 12\,\Omega$; alimentation $U = 24\,\text{V}$ continu.
- Circuit magnétique : longueur moyenne dans le fer (corps et armature) $\ell_f = 12\,\text{cm}$, $\mu_r = 1000$; le flux traverse deux entrefers, sous le pôle central et sous le pôle extérieur, de même surface $S = 30\,\text{cm}^2$ (section du fer prise égale à S).
- Entrefer : $e = 0{,}6\,\text{mm}$ frein serré, $e = 0{,}2\,\text{mm}$ frein ouvert. Le fer sature à $B_{sat} = 1{,}5\,\text{T}$.
- Force totale des ressorts : $F_r = 1\,500\,\text{N}$ (on la suppose constante).
- Formules : réluctance $\mathcal{R} = \dfrac{\ell}{\mu_0\,\mu_r\,S}$ ($\mu_r = 1$ dans l'air) ; loi d'Hopkinson $N\,I = \mathcal{R}\,\Phi$ (réluctances en série : elles s'ajoutent) ; $\Phi = B\,S$; force d'attraction à travers un entrefer : $F = \dfrac{B^2\,S}{2\,\mu_0}$; inductance $L = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}}$; énergie $W = \dfrac{1}{2}\,L\,I^2$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

Partie A – Bobine

A.1. Calculer le courant I dans la bobine et la puissance qu'elle consomme.

A.2. Pourquoi dit-on que ce frein est « à manque de courant » ? Expliquer l'intérêt de ce choix pour la sécurité du levage.

Partie B – Décollage de l'armature (frein serré)

B.1. Calculer la réluctance du fer, celle d'un entrefer, puis la réluctance totale du circuit magnétique.

B.2. Calculer le flux Φ et l'induction B dans les entrefers.

B.3. Montrer que la force totale d'attraction s'écrit $F = \dfrac{B^2\,S}{\mu_0}$, la calculer et vérifier que le frein s'ouvre.

Partie C – Frein ouvert et économiseur

C.1. L'armature est collée ($e = 0{,}2\,\text{mm}$). Calculer l'induction que donnerait le modèle linéaire avec $I = 2\,\text{A}$. Est-ce possible ? Quelle est en réalité la force maximale d'attraction ?

C.2. Pour garder une marge, la force de maintien doit valoir au moins $F_m = 2\,000\,\text{N}$. Calculer l'induction nécessaire, puis le courant de maintien I_m et la tension que doit délivrer l'économiseur.

C.3. Calculer la puissance consommée par la bobine en maintien. Quel est l'intérêt de l'économiseur ?

Partie D – Retombée du frein

D.1. Frein ouvert, calculer l'inductance L de la bobine, sa constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ et l'énergie stockée au courant de maintien.

D.2. À l'ouverture du contacteur d'alimentation, une diode de roue libre est en parallèle sur la bobine : le courant décroît selon $i(t) = I_m\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Calculer le courant pour lequel la force d'attraction devient égale à F_r, puis la durée au bout de laquelle le frein commence à retomber.

D.3. Que se passerait-il, sans diode ni varistance, à l'ouverture du contact ? Justifier à l'aide de la loi de Lenz.

→ corrigé p. 258

Sujet BTS 7.B – Alternateur d'une microcentrale hydroélectrique

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 h 15

Une commune de montagne rénove la microcentrale installée sur un torrent : une turbine entraîne un alternateur triphasé qui injecte sa production sur le réseau. Le bureau d'études vérifie l'inducteur de l'alternateur, la tension produite, le couple

demandé à la turbine, les pertes fer du stator et l'isolement des enroulements.

Données

- Rotor (roue polaire) : $2p = 8$ pôles, électroaimants alimentés par le courant d'excitation $I_{exc} = 5\,\text{A}$; rayon $r = 0{,}30\,\text{m}$; vitesse $n = 750\,\text{tr/min}$.
- Entrefer : $e = 2\,\text{mm}$; induction voulue dans l'entrefer : $B = 0{,}9\,\text{T}$. On néglige la réluctance du fer.
- Stator : longueur utile des conducteurs $\ell = 0{,}40\,\text{m}$; par phase, 40 conducteurs en série dont les f.é.m. sont en phase.
- Pertes fer du stator mesurées à vide, à excitation constante : $1\,100\,\text{W}$ à $750\,\text{tr/min}$; $425\,\text{W}$ à $375\,\text{tr/min}$. Tôles de $0{,}5\,\text{mm}$.
- Formules : théorème d'Ampère $\sum H\,\ell = N\,I$, avec $H = B/\mu_0$ dans l'air et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$; f.é.m. d'un conducteur de longueur ℓ qui coupe le champ B à la vitesse v : $e = B\,\ell\,v$; force de Laplace sur un conducteur parcouru par I : $F = B\,I\,\ell$.
- Isolant d'encoche en mica-époxy : épaisseur $0{,}4\,\text{mm}$, rigidité diélectrique $20\,\text{kV/mm}$. Tension d'essai diélectrique d'un enroulement $400\,\text{V}$: $2U + 1\,000\,\text{V}$ (valeur efficace, $50\,\text{Hz}$).

Partie A – Inducteur

A.1. Une ligne de champ moyenne traverse deux fois l'entrefer et enlace les bobines de deux pôles voisins, de N_p spires chacune. Appliquer le théorème d'Ampère (fer négligé) et en déduire le nombre de spires N_p d'une bobine polaire.

A.2. À la mise en service, il faut en réalité $6\,\text{A}$ pour obtenir $0{,}9\,\text{T}$. Proposer une explication.

Partie B – Tension produite

B.1. Calculer la fréquence $f = \dfrac{p\,n}{60}$ de la tension produite (n en tr/min).

B.2. Calculer la vitesse linéaire v des pôles devant les conducteurs, puis la f.é.m. maximale $e_{max} = B\,\ell\,v$ induite dans un conducteur.

B.3. On admet que les f.é.m. sont sinusoïdales. Calculer la valeur maximale puis la valeur efficace de la f.é.m. d'une phase. Est-elle compatible avec un raccordement au réseau $230\,\text{V}/400\,\text{V}$?

Partie C – Couple résistant

C.1. À un instant donné, 96 conducteurs situés sous les pôles sont parcourus par un courant de $50\,\text{A}$. Calculer la force de Laplace sur un conducteur, puis le moment total qu'elles exercent sur l'axe.

C.2. Montrer, à l'aide de la loi de Lenz, que ce moment s'oppose à la rotation. Calculer la puissance mécanique que doit fournir la turbine pour le compenser.

Partie D – Pertes fer du stator

D.1. À excitation constante, les pertes fer s'écrivent $P_{fer} = a\,f + b\,f^2$. Justifier chaque terme et calculer a et b à partir des deux mesures.

D.2. En déduire les pertes par hystérésis et par courants de Foucault à 50 Hz.

D.3. Lors du rebobinage, le stator est refait en tôles de 0,35 mm de même qualité ; les pertes par courants de Foucault sont proportionnelles au carré de l'épaisseur des tôles. Calculer les nouvelles pertes fer, puis le gain annuel pour 8 000 h de fonctionnement, l'énergie étant vendue 0,12 € le kW · h.

Partie E – Isolement des enroulements

E.1. Calculer la tension de claquage de l'isolant d'encoche.

E.2. Calculer la tension d'essai diélectrique, sa valeur crête, puis le champ électrique dans l'isolant pendant l'essai. Calculer le coefficient de sécurité et conclure.

→ corrigé p. 260

Corrigés

Chapitre 7

Champs électrique et magnétique

✓ Corrigé de l'exercice 7.1 – Électrofiltre d'une cimenterie

1. Champ uniforme entre deux plaques :

$$E = \frac{U}{d} = \frac{48 \times 10^3}{0{,}12} \quad \text{soit} \quad \boxed{E = 4 \times 10^5\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}} = 0{,}4\ \text{kV/mm}$$

Il est perpendiculaire aux plaques, orienté de la plaque collectrice (+) vers les électrodes émissives (−).

2. Nombre d'électrons :

$$\frac{|q|}{e} = \frac{3{,}2 \times 10^{-15}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 2 \times 10^4 \text{ électrons}$$

$$F = |q| \times E = 3{,}2 \times 10^{-15} \times 4 \times 10^5 \quad \text{soit} \quad \boxed{F \approx 1{,}3 \times 10^{-9}\ \text{N}}$$

La charge est négative : la force est opposée au champ, dirigée vers la plaque positive, c'est-à-dire vers la **plaque collectrice**. C'est le principe du filtre.

3. $P = m\,g = 1{,}5 \times 10^{-12} \times 9{,}81 \approx 1{,}47 \times 10^{-11}$ N, d'où :

$$\frac{F}{P} = \frac{1{,}28 \times 10^{-9}}{1{,}47 \times 10^{-11}} \approx 87$$

La force électrique est près de 90 fois plus grande que le poids : le grain est capté par la plaque au lieu de suivre la gravité ou les fumées.

4. $U_c = E_c \times d = 3 \times 120$ soit $\boxed{U_c = 360\,\text{kV}}$

5. Au voisinage d'un fil fin, le champ est beaucoup plus intense que la valeur moyenne U/d (effet de pointe) : l'air y devient localement conducteur (effet couronne, qui sert justement à charger les poussières), puis des arcs se forment dès une tension bien inférieure à celle du modèle des plaques. Le régulateur de l'électrofiltre monte la tension jusqu'au seuil d'apparition des arcs.

✓ Corrigé de l'exercice 7.2 – Bobine d'étalonnage de capteurs à effet Hall

1. $B = \mu_0 \dfrac{N\,I}{\ell} = 4\pi \times 10^{-7} \times \dfrac{1200 \times 1}{0{,}50}$ soit $\boxed{B \approx 3{,}02\,\text{mT}}$

$B = \left(\mu_0 \dfrac{N}{\ell}\right) \times I$: le champ est proportionnel à I, avec $k = \mu_0 \dfrac{N}{\ell} \approx 3{,}02\,\text{mT/A}$.

2. $I = \dfrac{B\,\ell}{\mu_0\,N} = \dfrac{10 \times 10^{-3} \times 0{,}50}{4\pi \times 10^{-7} \times 1200}$ soit $\boxed{I \approx 3{,}32\,\text{A}}$

3. Erreur relative :

$$\frac{47 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-3}} \approx 0{,}047$$

soit jusqu'à 4,7 % d'erreur, selon l'orientation de la bobine par rapport au champ terrestre. C'est inacceptable pour un étalonnage : on fait le zéro, bobine non alimentée.

4. Vue de l'extérieur, une face parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est une **face nord** (règle de la main droite : les doigts suivent le courant, le pouce indique $\overrightarrow{B}$, qui sort par X). Si l'on inverse le courant, le champ s'inverse : X devient une face sud.

5. $P = R\,I^2 = 4{,}5 \times 3{,}32^2$ soit $\boxed{P \approx 49\,\text{W}}$

Ces 49 W sont dissipés dans un bobinage compact : sans ventilation, sa température monte, sa résistance augmente et l'isolant des fils vieillit. On limite la durée des essais à fort champ.

Circuits magnétiques, forces et induction

✓ Corrigé de l'exercice 7.3 – Inductance de lissage d'un variateur

1. $S = 12 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$.

$$\mathcal{R}_f = \frac{\ell_f}{\mu_0\,\mu_r\,S} = \frac{0{,}24}{4\pi \times 10^{-7} \times 3000 \times 12 \times 10^{-4}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R}_f \approx 5{,}31 \times 10^{4}\,\text{H}^{-1}}$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{e}{\mu_0\,S} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 12 \times 10^{-4}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R}_e \approx 1{,}33 \times 10^{6}\,\text{H}^{-1}}$$

L'entrefer de 2 mm a une réluctance 25 fois plus grande que les 24 cm de fer : c'est lui qui impose la réluctance totale $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_e \approx 1{,}38 \times 10^{6}\,\text{H}^{-1}$.

2. Le schéma équivalent est une maille : une source $N\,I$ en série avec $\mathcal{R}_f$ et $\mathcal{R}_e$, parcourue par Φ (voir le cours, § 7.5).

$$\Phi = \frac{N\,I}{\mathcal{R}} = \frac{75 \times 25}{1{,}38 \times 10^{6}} \approx 1{,}36 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$$

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1{,}36 \times 10^{-3}}{12 \times 10^{-4}} \quad \text{soit} \quad \boxed{B \approx 1{,}13\,\text{T}}$$

$1{,}13\,\text{T} < 1{,}2\,\text{T}$: le critère de non-saturation est respecté.

3. $L = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}} = \dfrac{75^2}{1{,}38 \times 10^{6}}$ soit $\boxed{L \approx 4{,}08\,\text{mH}}$

$L \geq 4\,\text{mH}$: le cahier des charges est respecté.

4. $W = \dfrac{1}{2}\,L\,I^2 = \dfrac{1}{2} \times 4{,}08 \times 10^{-3} \times 25^2$ soit $\boxed{W \approx 1{,}27\,\text{J}}$

Part stockée dans l'entrefer : $\mathcal{R}_e/\mathcal{R} = 1{,}33 \times 10^{6}/1{,}38 \times 10^{6} \approx 96\,\%$. L'énergie est stockée presque entièrement dans l'entrefer.

5. Sans entrefer : $B = \dfrac{N\,I}{\mathcal{R}_f\,S} = \dfrac{75 \times 25}{5{,}31 \times 10^{4} \times 12 \times 10^{-4}} \approx 29\,\text{T}$.

Cette valeur est impossible : le fer sature vers 1,5 T. Le circuit serait saturé dès quelques ampères ; au-delà, μ_r s'effondre et l'inductance avec elle, précisément aux forts courants où le lissage est nécessaire. **L'entrefer est indispensable** : il rend L stable et fixe le courant de saturation.

✎ **Méthode** Dans un circuit magnétique avec entrefer, on compare toujours les réluctances avant de calculer : si l'entrefer domine, on peut négliger le fer et écrire directement $N\,I \approx B\,e/\mu_0$. Ici, $1{,}13 \times 2 \times 10^{-3}/(4\pi \times 10^{-7}) \approx 1800$ ampères-tours, très proche des $75 \times 25 = 1875$ du calcul complet.

✓ Corrigé de l'exercice 7.4 – Pompe électromagnétique d'une fonderie

1. Pouce = I (de A vers B, vers le haut du schéma), index = $\overrightarrow{B}$ (vers le lecteur) : le majeur indique une force **vers la droite**, le long du canal. Le métal, qui arrive par la gauche, est poussé vers la droite, c'est-à-dire vers les moules.

2. Le conducteur (métal entre les électrodes) est perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$:

$$F = B\,I\,\ell = 0{,}50 \times 1500 \times 0{,}06 \quad \text{soit} \quad \boxed{F = 45\,\text{N}}$$

3. $S = \ell \times h = 0{,}06 \times 0{,}03 = 1{,}8 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$ et $p = \dfrac{45}{1{,}8 \times 10^{-3}} = 25\,000\,\text{Pa}$.

$$z = \frac{p}{\rho\,g} = \frac{25\,000}{2370 \times 9{,}81} \quad \text{soit} \quad \boxed{z \approx 1{,}08\,\text{m}}$$

$1{,}08\,\text{m} > 0{,}80\,\text{m}$: la pompe peut élever le métal jusqu'aux moules, avec une marge pour les pertes de charge.

4. On inverse le sens du courant entre les électrodes **ou** le sens du champ (inversion du courant dans l'électroaimant). Inverser les deux ne change rien.

5. Si le même courant alternatif alimente l'électroaimant et les électrodes, I et B changent de signe en même temps : la force $F = B\,I\,\ell$ garde toujours le même signe (elle pulse à 100 Hz). Le métal est poussé dans le même sens : c'est le principe des pompes à courant alternatif (et du moteur universel).

6. Le fer étant négligé, seul compte l'entrefer : $N\,I = \dfrac{B\,e}{\mu_0}$.

$$N\,I = \frac{0{,}50 \times 0{,}05}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 19\,900\,\text{A (ampères-tours)} \qquad I = \frac{19\,900}{400} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 50\,\text{A}}$$

Méthode Pour appliquer la règle des trois doigts sur un schéma plan, on repère d'abord le vecteur perpendiculaire au plan ($\odot$ vers le lecteur, $\otimes$ vers la feuille) et on oriente la main droite en conséquence ; la force est toujours dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$.

✓ Corrigé de l'exercice 7.5 – Transformateur de commande d'une armoire

1. Le courant alternatif du primaire crée dans le circuit magnétique un flux alternatif, canalisé par le fer jusqu'au secondaire. Ce flux **variable** traverse les spires du secondaire : d'après la loi de Faraday, une f.é.m. y est induite, de même fréquence.

2. Loi de Faraday : $e(t) = -N_1 \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -N_1\,\omega\,\Phi_{max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, de valeur maximale $N_1\,\omega\,\Phi_{max}$. Valeur efficace :

$$E = \frac{N_1\,\omega\,\Phi_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\,N_1\,f\,B_{max}\,S \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \approx 4{,}44$$

3. Le primaire impose $U_1 \approx E_1$:

$$N_1 = \frac{U_1}{4{,}44\, f\, B_{max}\, S}$$

$$N_1 = \frac{230}{4{,}44 \times 50 \times 1{,}2 \times 8 \times 10^{-4}} \approx 1\,079{,}2 \quad \text{soit} \quad \boxed{N_1 = 1080 \text{ spires}}$$

$$N_2 = \frac{25{,}2}{4{,}44 \times 50 \times 1{,}2 \times 8 \times 10^{-4}} \approx 118{,}2 \quad \text{soit} \quad \boxed{N_2 = 119 \text{ spires}}$$

4. À tension égale, B_{max} est inversement proportionnel à f : $B_{max} = 1{,}2 \times \dfrac{50}{60} = 1{,}0\,\text{T}$. Le circuit est moins aimanté, loin de la saturation : le transformateur fonctionne correctement à 60 Hz. (L'inverse, un transformateur 60 Hz utilisé à 50 Hz, risquerait la saturation.)

5. En continu, le flux est constant : aucune f.é.m. ne s'oppose à la tension appliquée, seul le bobinage limite le courant :

$$I = \frac{230}{12} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 19\,\text{A}}$$

soit plusieurs dizaines de fois le courant nominal (de l'ordre de 0,5 A) : le primaire est détruit en quelques secondes. Il faut un convertisseur adapté.

6. Pertes par courants de Foucault à 50 Hz : $3 - 2 = 1\,\text{W}$; elles varient comme e^2 :

$$P'_{foucault} = 1 \times \left(\frac{0{,}35}{0{,}5}\right)^2 = 0{,}49\,\text{W} \qquad P'_{fer} = 2 + 0{,}49 \quad \text{soit} \quad \boxed{P'_{fer} \approx 2{,}49\,\text{W}}$$

Économie : $0{,}51 \times 8760 \approx 4{,}5\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par an et par transformateur. C'est peu pour un appareil, mais significatif sur une production de plusieurs milliers de transformateurs toujours sous tension.

Méthode Pour calculer un nombre de spires, on part de la formule de Boucherot écrite pour l'enroulement concerné : $N = U/(4{,}44\, f\, B_{max}\, S)$. Le rapport des nombres de spires est égal au rapport des tensions à vide : $N_2/N_1 = U_{20}/U_1$. On arrondit toujours à l'entier supérieur, et l'on vérifie que B_{max} reste sous le coude de saturation à la fréquence la plus basse d'utilisation.

✓ Corrigé de l'exercice 7.6 – Électroaimant de levage de tôles

Toutes les formules utilisées (réluctance, loi d'Hopkinson, force portante, inductance) sont rappelées dans les données de l'énoncé ; elles sont hors programme et n'ont pas à être retenues. Les valeurs intermédiaires sont gardées en mémoire de la calculatrice.

A- Circuit magnétique (tôle propre)

1. $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{110}{55}$ soit $\boxed{I = 2{,}0\,\text{A}}$

2. $S = 0{,}01\,\text{m}^2$.

$$\mathcal{R}_f = \frac{0{,}80}{4\pi \times 10^{-7} \times 1500 \times 0{,}01} \approx 4{,}24 \times 10^4\,\text{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{0{,}5 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}01} \approx 3{,}98 \times 10^4\,\text{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_f + 2\,\mathcal{R}_e \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R} \approx 1{,}22 \times 10^5\,\text{H}^{-1}}$$

3. $\Phi = \dfrac{N\,I}{\mathcal{R}} = \dfrac{600 \times 2}{1{,}22 \times 10^5} \approx 9{,}83 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$ et $B = \dfrac{\Phi}{S}$ soit $\boxed{B \approx 0{,}98\,\text{T}}$

$0{,}98\,\text{T} < 1{,}5\,\text{T}$: le fer n'est pas saturé, le modèle linéaire est valable.

B- Force portante

4. Deux pôles identiques :

$$F = \frac{B^2\,S}{\mu_0} = \frac{0{,}983^2 \times 0{,}01}{4\pi \times 10^{-7}} \quad \text{soit} \quad \boxed{F \approx 7{,}7\,\text{kN}}$$

Masse maximale : $\dfrac{7697}{9{,}81} \approx 785\,\text{kg}$.

5. $m = 2 \times 1 \times 0{,}020 \times 7800 = 312\,\text{kg}$, poids $3\,061\,\text{N}$. Coefficient de sécurité : $7697/3061 \approx 2{,}5 \geq 2$: **conforme**.

C- Tôle rouillée

6. $\mathcal{R}' = 4{,}24 \times 10^4 + 2 \times 7{,}96 \times 10^4 \approx 2{,}02 \times 10^5\,\text{H}^{-1}$; $B' = \dfrac{1200}{2{,}02 \times 10^5 \times 0{,}01} \approx 0{,}60\,\text{T}$

$$F' = \frac{0{,}595^2 \times 0{,}01}{4\pi \times 10^{-7}} \quad \text{soit} \quad \boxed{F' \approx 2{,}8\,\text{kN}}$$

$2{,}8\,\text{kN} < 3{,}06\,\text{kN}$: l'électroaimant ne peut plus porter la tôle. Un demi-millimètre de rouille par pôle a divisé la force par 2,7 : c'est l'explication de l'incident.

7. Il faut $F = 2 \times 3061 = 6\,122\,\text{N}$:

$$B = \sqrt{\frac{F\,\mu_0}{S}} \approx 0{,}877\,\text{T} \qquad I = \frac{\mathcal{R}'\,B\,S}{N} = \frac{2{,}02 \times 10^5 \times 0{,}877 \times 0{,}01}{600} \approx 2{,}95\,\text{A}$$

Il faudrait $55 \times 2{,}95 \approx 162\,\text{V}$ et la puissance dissipée passerait à $55 \times 2{,}95^2 \approx 478\,\text{W}$ (plus du double) : le bobinage surchaufferait. La bonne solution est de **nettoyer la surface** (brossage) avant de lever.

D- Bobinage

8. $L = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}} = \dfrac{600^2}{1{,}22\times10^5} \approx 2{,}95\,\text{H}$; $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{2{,}95}{55} \approx 54\,\text{ms}$; $\boxed{W = \tfrac{1}{2} L I^2 \approx 5{,}9\,\text{J}}$

9. À l'ouverture du circuit, le courant tend à s'annuler brutalement : la f.é.m. d'auto-induction $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ (loi de Lenz) devient très grande. La surtension provoque un arc aux contacts et peut percer l'isolant du bobinage. Une diode de roue libre ou une varistance offre un chemin au courant et dissipe l'énergie de 5,9 J.

10. $P = R\,I^2 = 55\times 2^2 = 220\,\text{W}$.

Consigne : (1) nettoyer la zone de contact (rouille, calamine, peinture écaillée) avant chaque levage ; (2) ne pas dépasser la charge maximale affichée et ne jamais passer sous une charge suspendue ; (3) poser la tôle avant de couper l'alimentation et signaler tout glissement.

Méthode Pour un électroaimant, l'entrefer domine presque toujours : un calcul rapide en négligeant le fer ($N\,I \approx (B/\mu_0)\times 2e$) donne déjà le bon ordre de grandeur. Toute augmentation de l'entrefer fait chuter B, et la force, qui varie comme B^2, chute encore plus vite.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 7.A – Frein électromagnétique d'un pont roulant

Partie A – Bobine

A.1. $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{24}{12}$ soit $\boxed{I = 2\,\text{A}}$ et $P = U\,I = 48\,\text{W}$.

A.2. Le frein est serré par les ressorts et ne s'ouvre que si la bobine est alimentée : il serre dès que le courant manque. En cas de coupure du réseau, de rupture d'un câble ou d'arrêt d'urgence, la charge reste donc bloquée au lieu de descendre.

Partie B – Décollage de l'armature (frein serré)

B.1. $S = 3\times10^{-3}\,\text{m}^2$:

$$\mathcal{R}_f = \frac{0{,}12}{4\pi\times10^{-7}\times1000\times3\times10^{-3}} \approx 3{,}18\times10^4\,\text{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{0{,}6\times10^{-3}}{4\pi\times10^{-7}\times3\times10^{-3}} \approx 1{,}59\times10^5\,\text{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_f + 2\,\mathcal{R}_e \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R} \approx 3{,}50\times10^5\,\text{H}^{-1}}$$

B.2. $\Phi = \dfrac{N\,I}{\mathcal{R}} = \dfrac{600\times2}{3{,}50\times10^5} \approx 3{,}43\times10^{-3}\,\text{Wb}$ et $B = \dfrac{\Phi}{S}$ soit $\boxed{B \approx 1{,}14\,\text{T}}$

B.3. Les deux entrefers ont la même surface et sont traversés par le même flux : la force totale vaut $2 \times B^2\,S/(2\,\mu_0) = B^2\,S/\mu_0$.

$$F = \frac{1{,}142^2 \times 3 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} \quad \text{soit} \quad \boxed{F \approx 3{,}1\,\text{kN}}$$

$3{,}1\,\text{kN} > F_r = 1{,}5\,\text{kN}$: l'armature est attirée, le frein s'ouvre.

Partie C – Frein ouvert et économiseur

C.1. $\mathcal{R}' = 3{,}18 \times 10^4 + 2 \times 5{,}31 \times 10^4 \approx 1{,}38 \times 10^5\,\text{H}^{-1}$, d'où

$$B = \frac{N\,I}{\mathcal{R}'\,S} = \frac{1200}{1{,}38 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3}} \approx 2{,}9\,\text{T}$$

C'est impossible : le fer sature à 1,5 T, le modèle linéaire ne s'applique plus. La force est limitée à

$$F_{max} = \frac{1{,}5^2 \times 3 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 5{,}4\,\text{kN}$$

C.2. $B_m = \sqrt{\dfrac{F_m\,\mu_0}{S}} = \sqrt{\dfrac{2000 \times 4\pi \times 10^{-7}}{3 \times 10^{-3}}} \approx 0{,}915\,\text{T}$ (zone linéaire).

$$I_m = \frac{\mathcal{R}'\,B_m\,S}{N} = \frac{1{,}38 \times 10^5 \times 0{,}915 \times 3 \times 10^{-3}}{600} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_m \approx 0{,}63\,\text{A}}$$

Tension de l'économiseur : $U_m = R\,I_m = 12 \times 0{,}631 \approx 7{,}6\,\text{V}$.

C.3. $P_m = R\,I_m^2 = 12 \times 0{,}631^2 \approx 4{,}8\,\text{W}$, contre 48 W sans économiseur : dix fois moins. La bobine chauffe beaucoup moins (le frein reste ouvert pendant tout le levage), et le frein retombe plus vite (partie D).

Partie D – Retombée du frein

D.1. $L = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}'} = \dfrac{600^2}{1{,}38 \times 10^5} \approx 2{,}61\,\text{H}$; $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{2{,}61}{12} \approx 0{,}217\,\text{s}$;

$\boxed{W = \frac{1}{2}\,L\,I_m^2 \approx 0{,}52\,\text{J}}$

D.2. La force d'attraction égale F_r pour $B_{ret} = \sqrt{\dfrac{1500 \times 4\pi \times 10^{-7}}{3 \times 10^{-3}}} \approx 0{,}793\,\text{T}$, d'où :

$$i_{ret} = \frac{\mathcal{R}'\,B_{ret}\,S}{N} \approx 0{,}547\,\text{A}$$

$i(t) = i_{ret}$ pour $t = \tau\,\ln\!\left(\dfrac{I_m}{i_{ret}}\right) = 0{,}217 \times \ln\!\left(\dfrac{0{,}631}{0{,}547}\right)$ soit $\boxed{t \approx 31\,\text{ms}}$

Le frein retombe rapidement parce que le courant de maintien est proche du seuil : l'économiseur améliore aussi la sécurité. À 2 A, il aurait fallu attendre bien plus longtemps.

D.3. Sans diode, l'ouverture du contact impose une annulation quasi instantanée du courant : la f.é.m. d'auto-induction, qui s'oppose à cette diminution (loi de Lenz), devient très grande. La surtension (plusieurs centaines de volts) crée un arc au contact du contacteur, l'use rapidement et peut claquer l'isolant de la bobine.

✓ Corrigé du sujet BTS 7.B – Alternateur d'une microcentrale hydroélectrique

Partie A – Inducteur

A.1. Fer négligé : seule compte la traversée des deux entrefers, où $H = B/\mu_0$. Le contour enlace $2\,N_p\,I_{exc}$ ampères-tours :

$$\frac{B}{\mu_0} \times 2e = 2\,N_p\,I_{exc} \;\Rightarrow\; N_p = \frac{B\,e}{\mu_0\,I_{exc}}$$

$$N_p = \frac{0{,}9 \times 2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 5} \approx 286{,}5 \quad \text{soit} \quad \boxed{N_p = 287 \text{ spires}}$$

A.2. Le calcul néglige la réluctance du fer (roue polaire, culasse du stator), les fuites magnétiques entre pôles voisins et le début de saturation des dents : il faut davantage d'ampères-tours que prévu.

Partie B – Tension produite

B.1. $f = \dfrac{4 \times 750}{60}$ soit $\boxed{f = 50\,\text{Hz}}$

B.2. $\Omega = \dfrac{2\pi \times 750}{60} \approx 78{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $v = r\,\Omega = 0{,}30 \times 78{,}5 \approx 23{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$e_{max} = B\,\ell\,v = 0{,}9 \times 0{,}40 \times 23{,}6 \quad \text{soit} \quad \boxed{e_{max} \approx 8{,}5\,\text{V}}$$

B.3. $E_{max} = 40 \times 8{,}48 \approx 339\,\text{V}$ et $E = \dfrac{E_{max}}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{E \approx 240\,\text{V}}$

Une f.é.m. de 240 V par phase, un peu supérieure aux 230 V du réseau (pour compenser les chutes de tension internes), convient : couplé en étoile, l'alternateur fournit 400 V entre phases.

Partie C – Couple résistant

C.1. $F = B\,I\,\ell = 0{,}9 \times 50 \times 0{,}40 = 18\,\text{N}$ par conducteur.

$$C = 96 \times F \times r = 96 \times 18 \times 0{,}30 \quad \text{soit} \quad \boxed{C \approx 518\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

C.2. Les courants induits débités par l'alternateur ont pour effet de s'opposer à la cause qui les crée, la rotation de la roue polaire : le moment des forces de Laplace est **résistant**. La turbine doit fournir

$$P = C\,\Omega = 518 \times 78{,}5 \quad \text{soit} \quad \boxed{P \approx 40{,}7\,\text{kW}}$$

C'est la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique : plus l'alternateur débite, plus il freine la turbine.

Partie D – Pertes fer du stator

D.1. L'excitation étant constante, B_{max} est fixé : les pertes par hystérésis varient comme f (une même énergie perdue à chaque cycle), les pertes par courants de Foucault comme f^2. La seconde mesure correspond à $f = 25\,\text{Hz}$:

$$\begin{cases} 50\,a + 2500\,b = 1100 \\ 25\,a + 625\,b = 425 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 1250\,b = 1100 - 850 = 250$$

$$\boxed{b = 0{,}2\,\text{W}\cdot\text{s}^2} \quad \text{et} \quad \boxed{a = 12\,\text{W}\cdot\text{s}}$$

D.2. $P_{hyst} = 12 \times 50 = 600\,\text{W}$ et $P_{foucault} = 0{,}2 \times 50^2 = 500\,\text{W}$.

D.3. $P'_{foucault} = 500 \times \left(\dfrac{0{,}35}{0{,}5}\right)^2 = 245\,\text{W}$, donc $P'_{fer} = 600 + 245 = 845\,\text{W}$.

Gain : $(1100 - 845) \times 8000 = 2\,040\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par an, soit $2040 \times 0{,}12 \approx 245$ € par an de production vendue en plus.

Partie E – Isolement des enroulements

E.1. $U_c = E_c \times d = 20 \times 0{,}4$ soit $\boxed{U_c = 8\,\text{kV}}$

E.2. $U_{essai} = 2 \times 400 + 1000 = 1\,800\,\text{V}$, de valeur crête $1800\sqrt{2} \approx 2{,}55\,\text{kV}$.

Champ dans l'isolant : $E = 2{,}55/0{,}4 \approx 6{,}4\,\text{kV/mm}$, inférieur à $20\,\text{kV/mm}$. Coefficient de sécurité : $8/2{,}55 \approx 3{,}1$. L'isolant supporte l'essai avec une bonne marge ; en service, la tension crête phase-masse n'est que $230\sqrt{2} \approx 325\,\text{V}$.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ calculer un champ électrique et vérifier un isolement ; — ex. 7.1, sujet B
- ☐ citer les sources et ordres de grandeur de B ; — ex. 7.2
- ☐ exploiter un cycle d'hystérésis et expliquer les pertes fer ; — ex. 7.5, sujet B
- ☐ expliquer l'induction (lois de Faraday et de Lenz) ; — ex. 7.5, sujet B
- ☐ appliquer une formule donnée à un circuit magnétique ; — ex. 7.3, sujet A
- ☐ calculer une force de Laplace ou une force portante. — ex. 7.4, 7.6

Complément Ondes électromagnétiques et photons

Une onde électromagnétique est formée d'un champ électrique et d'un champ magnétique variables, perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation, qui se propagent ensemble, même dans le vide. Dans le vide (et pratiquement dans l'air), sa célérité vaut $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Sa **fréquence** f est imposée par la source ; sa **longueur d'onde** λ est la distance parcourue pendant une période : $\lambda = cT = c/f$.

Domaine	radio, micro-ondes	infrarouge	**visible**	ultraviolet	X, γ
λ **dans le vide**	> 1 mm	780 nm à 1 mm	380 à 780 nm	10 à 380 nm	< 10 nm
Exemples	Wi-Fi, 4G, radio	thermographie	éclairage	stérilisation	radiographie

Le photon. La lumière échange son énergie avec la matière par paquets indivisibles, les **photons**. L'énergie d'un photon ne dépend que de la fréquence de l'onde. La puissance d'un rayonnement dépend, elle, du nombre de photons reçus chaque seconde : un faisceau de N photons par seconde transporte $P = N\,E$.

À retenir · Onde et photon

$$\lambda = \frac{c}{f} \qquad E = h\,f = \frac{h\,c}{\lambda} \qquad P = N\,E$$

$c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$ (constante de Planck) ; E en joules, souvent exprimée en électronvolts : $1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$.

Exemple : la bande Wi-Fi à 2,4 GHz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00 \times 10^8}{2{,}4 \times 10^9} = 0{,}125\ \text{m}$$

soit 12,5 cm : l'ordre de grandeur des antennes Wi-Fi (quart d'onde : environ 3 cm).

Exemple : une LED rouge à 625 nm

$$E = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^8}{625 \times 10^{-9}} \approx 3{,}18 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

soit $E \approx 1{,}99$ eV. Si la LED émet 0,10 W de lumière, elle envoie $N = P/E \approx 3{,}1 \times 10^{17}$ photons par seconde.

Piège classique Confondre l'énergie d'un photon et la puissance d'un rayonnement. Une petite lampe UV émet des photons plus énergétiques qu'un puissant projecteur infrarouge, mais beaucoup moins de puissance.

S'entraîner

1. Un capteur LoRa émet à 868 MHz. Calculer la longueur d'onde et la longueur d'une antenne quart d'onde.

2. Une cellule photovoltaïque au silicium ne convertit que les photons d'énergie supérieure à 1,12 eV. Calculer la longueur d'onde maximale utile. Dans quel domaine se situe-t-elle ?

Réponses. 1. $\lambda \approx 0{,}346$ m ; antenne $\lambda/4 \approx 8{,}6$ cm. 2. $\lambda_{max} = hc/E \approx 1{,}11$ µm : infrarouge proche. Suite : chapitres 12 et 13.

CHAPITRE

8

Électronique de puissance

Redresseurs, hacheurs, onduleurs et gradateurs

Dans ce chapitre

- Les quatre familles de convertisseurs statiques
- Diode, thyristor, transistors IGBT et MOSFET
- Valeur moyenne et valeur efficace
- Redressement non commandé et commandé (PD2, PD3)
- Hacheur, onduleur, gradateur
- Pertes, refroidissement, variateur de vitesse

Objectifs

- ✓ Choisir le convertisseur et l'interrupteur adaptés à une application
- ✓ Tracer et exploiter les chronogrammes $u(t)$ et $i(t)$ d'un convertisseur
- ✓ Calculer valeurs moyennes, valeurs efficaces et puissances
- ✓ Dimensionner une inductance de lissage et un dissipateur thermique

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 8

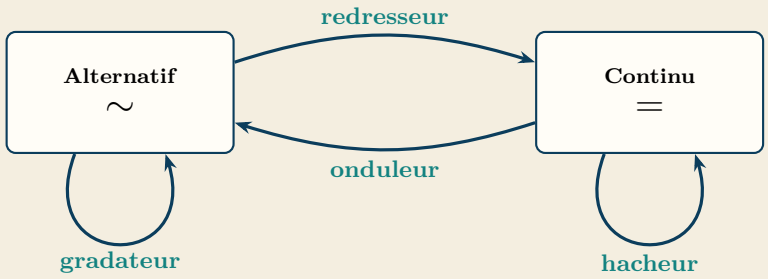
Cours — Chapitre 8

8.1 Les convertisseurs statiques

Le réseau distribue l'énergie sous forme **alternative** (230 V ou 400 V, 50 Hz), mais les récepteurs ont des besoins très variés : une batterie se charge en continu, un moteur asynchrone tourne à une vitesse fixée par la fréquence de sa tension (voir § 6.3), un four doit recevoir une puissance réglable. L'électronique de puissance adapte la forme de l'énergie électrique au besoin du récepteur.

D

Définition Un **convertisseur statique** modifie la forme de l'énergie électrique (alternative ou continue, valeur de la tension, fréquence) à l'aide d'**interrupteurs électroniques**, qui sont soit fermés, soit ouverts. Il ne comporte pas de pièce en mouvement et n'utilise pas de résistance pour « faire chuter » la tension : son rendement est très élevé, de 95 % à 99 %.



Convertisseur	Conversion	Réglage	Exemples
redresseur	alternatif → continu	angle α	chargeur, moteur à courant continu, entrée d'un variateur
hacheur	continu → continu	rapport cyclique α	véhicule électrique, MPPT d'un panneau solaire
onduleur	continu → alternatif	fréquence, indice m	variateur de vitesse, onduleur photovoltaïque, ASI
gradateur	alternatif → alternatif	angle α	chauffage, éclairage, démarreur progressif

Le gradateur conserve la fréquence du réseau : seule la valeur efficace de la tension change. Un convertisseur peut être **réversible** : l'énergie circule alors dans les deux sens (freinage avec récupération, par exemple).

Ex

Exemple : pourquoi pas un rhéostat ? Un moteur doit recevoir 24 V et 10 A à partir d'une batterie de 48 V. Avec un rhéostat en série, celui-ci supporte $48 - 24 = 24$ V et dissipe $24 \times 10 = 240$ W : le rendement vaut $240/480 = 50\,\%$. Avec un hacheur de rendement 0,97, la batterie ne fournit que $240/0{,}97 \approx 247$ W : les pertes tombent à 7 W.

8.2 Les interrupteurs électroniques

Tous les convertisseurs sont construits avec quelques types d'interrupteurs à semi-conducteurs. On les distingue par la façon dont ils passent de l'état ouvert à l'état fermé : spontanément (diode), sur commande à la fermeture seulement (thyristor) ou sur commande dans les deux sens (transistors).

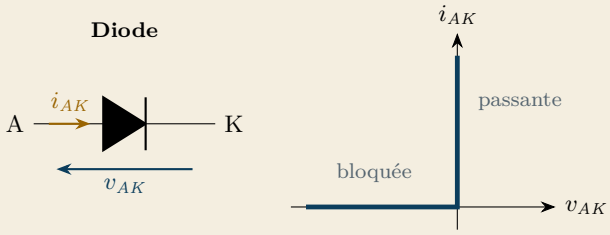
L'interrupteur parfait

Un interrupteur parfait n'a que deux états. **Fermé** (passant), la tension à ses bornes est nulle : $v_K = 0$. **Ouvert** (bloqué), le courant qui le traverse est nul : $i_K = 0$. Dans les deux cas, la puissance qu'il reçoit est nulle :

$$p_K = v_K \times i_K = 0$$

C'est la raison du rendement élevé des convertisseurs : l'énergie n'est pas dissipée, elle est « aiguillée ». Les composants réels présentent une petite tension à l'état passant et mettent un temps non nul pour commuter : ils ont donc des pertes, étudiées au paragraphe 8.9.

La diode

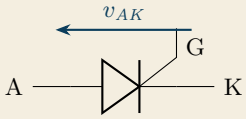


★

À retenir · Diode (interrupteur non commandé) **Passante** si le circuit lui impose un courant $i_{AK} > 0$: alors $v_{AK} = 0$. **Bloquée** si le circuit lui impose une tension $v_{AK} < 0$: alors $i_{AK} = 0$.

La diode n'a pas d'électrode de commande : elle change d'état toute seule (**commutation spontanée**), en fonction de la source et de la charge. Une diode réelle présente à l'état passant une tension de seuil $V_{seuil} \approx 0{,}7$ V à 1 V.

Le thyristor

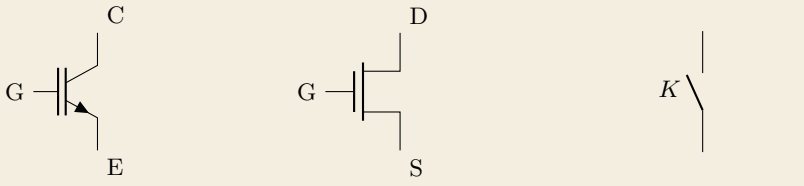


Le thyristor est une diode dont on commande l'instant de mise en conduction. Il possède une troisième électrode, la **gâchette** G.

À retenir · Thyristor (interrupteur commandé à la fermeture) **Amorçage commandé** : il devient passant si l'on envoie une impulsion de courant sur la gâchette **alors que** $v_{AK} > 0$. Une fois amorcé, il reste passant sans courant de gâchette. **Blocage spontané** : il se bloque quand le courant qui le traverse s'annule.

En alternatif, on amorce le thyristor avec un retard réglable sur le début de l'alternance : c'est l'**angle de retard à l'amorçage** α (en degrés ou en radians, avec $\theta = \omega t$). Le **triac** équivaut à deux thyristors montés tête-bêche : on le trouve dans les gradateurs de faible puissance.

Les transistors de puissance : IGBT et MOSFET



IGBT **MOSFET** **symbole simplifié**

Les transistors de puissance sont **commandés à la fermeture et à l'ouverture** par un signal appliqué sur leur grille G. Ils peuvent commuter des milliers de fois par seconde : ce sont les interrupteurs des hacheurs et des onduleurs. Dans les schémas de principe, on les représente souvent par un interrupteur commandé K.

Composant	Commande	Domaine d'emploi	Applications
diode	aucune	toutes puissances	redresseurs, roue libre
thyristor	fermeture seulement	très fortes puissances, 50 Hz	redresseurs commandés, gradateurs
IGBT	fermeture et ouverture	600 V à 6,5 kV, jusqu'à 20 kHz	variateurs, traction, photovoltaïque
MOSFET	fermeture et ouverture	jusqu'à quelques centaines de volts, 20 kHz à 1 MHz	alimentations à découpage, chargeurs

Dans un onduleur ou un hacheur réversible, chaque transistor est associé à une **diode en antiparallèle** : elle laisse passer le courant de la charge inductive dans le sens que

le transistor ne peut pas conduire. Sans elle, l'ouverture du transistor interromprait brutalement le courant d'une inductance, ce qui créerait une surtension destructrice ($u_L = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ très grande) (voir § 7.8).

8.3 Valeur moyenne et valeur efficace

Les tensions et courants en sortie d'un convertisseur ne sont ni continus ni sinusoïdaux. Deux valeurs permettent de les caractériser.

★

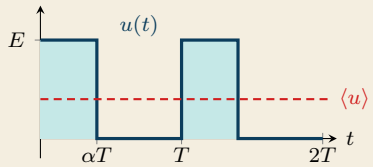
À retenir Pour une grandeur périodique $u(t)$, de période T :

$$\langle u\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\text{aire algébrique sous la courbe sur une période}}{T}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2\rangle}$$

$\langle u\rangle$ se mesure au voltmètre en position **DC** ; U_{eff} se mesure avec un appareil **TRMS** en position **AC+DC**.

La valeur moyenne fixe par exemple la vitesse d'un moteur à courant continu ; la valeur efficace fixe l'échauffement d'une résistance : $P = U_{eff}^2/R$.



Créneau $0\,/\,E$ de rapport cyclique α : l'aire colorée sur une période vaut $E \times \alpha T$, donc

$$\langle u\rangle = \frac{E\,\alpha T}{T} = \alpha\,E$$

et comme u^2 vaut E^2 pendant αT : $U_{eff} = \sqrt{\alpha}\,E$.

Signal	Valeur moyenne $\langle u\rangle$	Valeur efficace U_{eff}
sinusoïde d'amplitude U_{max}	0	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
sinusoïde redressée simple alternance	$\frac{U_{max}}{\pi}$	$\frac{U_{max}}{2}$
sinusoïde redressée double alternance	$\frac{2\,U_{max}}{\pi}$	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
créneau $0\,/\,E$ de rapport cyclique α	$\alpha\,E$	$\sqrt{\alpha}\,E$
créneau symétrique $\pm E$	0	E

Ex

Exemple Un créneau $0\,/\,48$ V de rapport cyclique $\alpha = 0{,}25$: $\langle u\rangle = 0{,}25 \times 48 = 12$ V et $U_{eff} = \sqrt{0{,}25} \times 48 = 24$ V. Un voltmètre en position DC affiche 12 V, un voltmètre TRMS en position AC+DC affiche 24 V.

✗

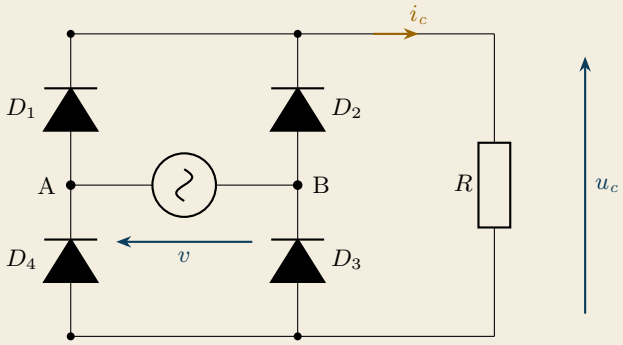
Piège classique La puissance moyenne est la moyenne du **produit** : $P = \langle u\,i\rangle$, qui n'est en général **pas** égale à $\langle u\rangle \times \langle i\rangle$. On peut écrire $P = \langle u\rangle \times I$ seulement si le courant est **constant** (bien lissé). Pour une résistance, on utilise les valeurs efficaces : $P = U_{eff}^2/R = R\,I_{eff}^2$.

8.4 Le redressement non commandé

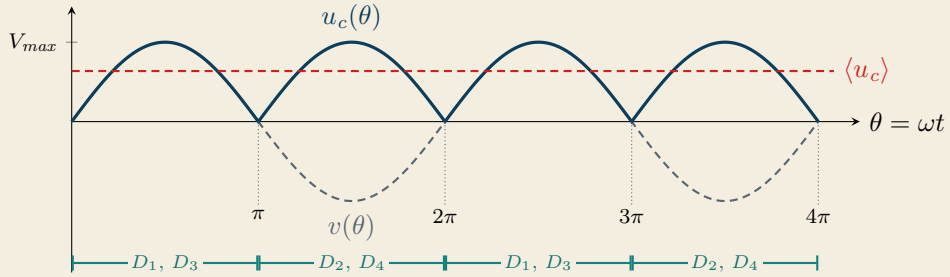
Un redresseur à diodes fournit une tension de signe constant, dont la valeur moyenne est imposée par le réseau : on ne peut pas la régler. C'est le montage des chargeurs, des alimentations et de l'étage d'entrée des variateurs de vitesse.

Le pont de Graëtz PD2 à diodes

Le réseau monophasé impose $v(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t)$, de valeur efficace V. Le pont PD2 comporte quatre diodes.



Alternance positive ($v > 0$, A au potentiel le plus élevé) : le courant sort par A, traverse D_1, la charge, puis revient en B par D_3 : $u_c = v$. **Alternance négative** : D_2 et D_4 conduisent, le courant traverse la charge dans le **même sens** et $u_c = -v$. Ainsi $u_c(t) = |v(t)|$: c'est un redressement **double alternance**.



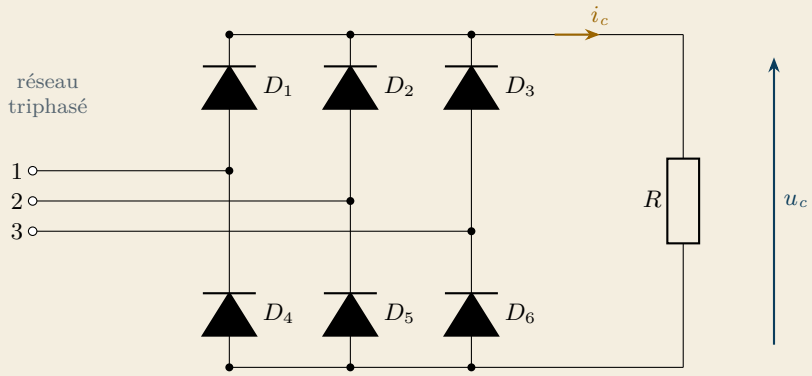
À retenir · Pont PD2 à diodes

$$\langle u_c \rangle = \frac{2\,V_{max}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,V \approx 0{,}9\,V \qquad U_{c,eff} = V \qquad f_{u_c} = 2f$$

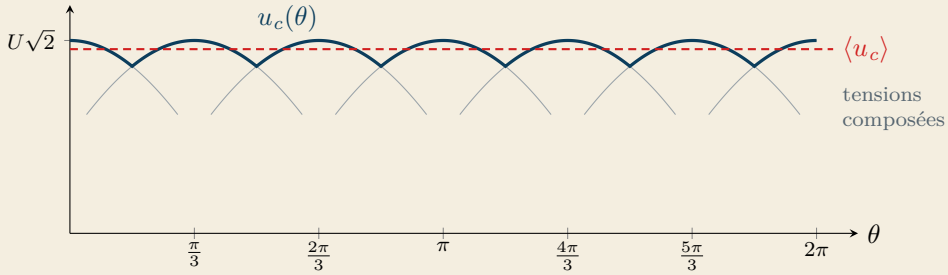
Exemple Sur le réseau $V = 230\,\text{V}$: $V_{max} = 230\sqrt{2} \approx 325\,\text{V}$ et $\langle u_c \rangle = 2 \times 325/\pi \approx 207\,\text{V}$; la tension redressée a pour fréquence $100\,\text{Hz}$.

Lissage. Pour une alimentation, un condensateur placé en sortie lisse la **tension** : u_c se rapproche de V_{max}. Pour un moteur à courant continu, l'inductance de l'induit (complétée si besoin par une bobine de lissage) lisse le **courant** : i_c devient presque constant.

Le pont triphasé PD3 à diodes



Le pont PD3 comporte six diodes. Parmi D_1, D_2, D_3 conduit celle dont l'anode est au potentiel **le plus élevé** ; parmi D_4, D_5, D_6 conduit celle dont la cathode est au potentiel **le plus bas**. La tension u_c est donc, à chaque instant, la plus grande des tensions composées : elle est formée de six « calottes » par période.



À retenir · Pont PD3 à diodes

$$\langle u_c \rangle = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} U \approx 1{,}35\,U \qquad f_{u_c} = 6f = 300\,\text{Hz}$$

U : tension composée efficace du réseau.

Exemple Sur le réseau 400 V : $\langle u_c \rangle = 1{,}35 \times 400 \approx 540$ V. C'est la tension du **bus continu** de tous les variateurs de vitesse industriels. L'ondulation, de faible amplitude et de fréquence 300 Hz, se filtre bien plus facilement qu'avec un pont PD2.

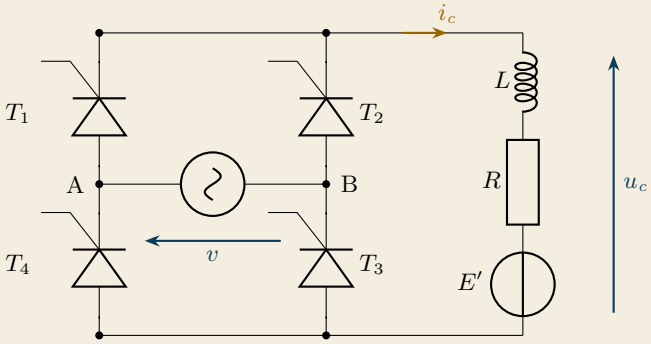
Contraintes sur les diodes d'un pont – hors programme Pour choisir les diodes, on calcule leur courant moyen et la tension inverse qu'elles supportent à l'état bloqué. Pont PD2 : chaque diode conduit I_c pendant une demi-période, $\langle i_D \rangle = \frac{I_c}{2}$, tension inverse maximale V_{max}. Pont PD3 : chaque diode conduit pendant un tiers de période, $\langle i_D \rangle = \frac{I_c}{3}$, tension inverse maximale $U\sqrt{2}$.

8.5 Le redressement commandé

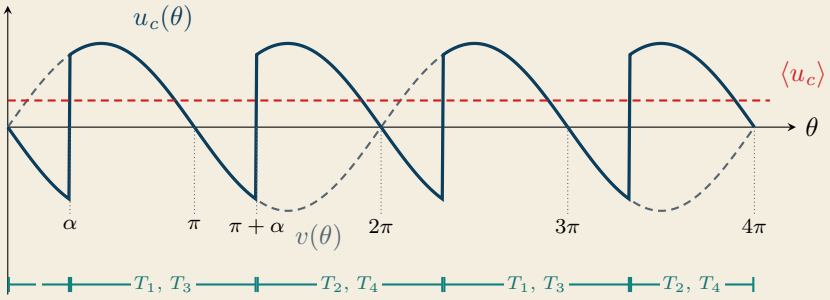
En remplaçant les diodes par des thyristors, on retarde à volonté le début de la conduction : la valeur moyenne de la tension redressée devient réglable. C'est le moyen classique d'alimenter les moteurs à courant continu de forte puissance (laminoirs, levage, traction).

Le pont PD2 à thyristors

On remplace les diodes par des thyristors : T_1 et T_3 sont amorcés à $\theta = \alpha$, T_2 et T_4 à $\theta = \alpha + \pi$. La charge est un moteur à courant continu dont l'inductance est assez grande pour que le courant i_c ne s'annule jamais : c'est la **conduction continue**, et l'on admet alors $i_c \approx I_c$ constant.



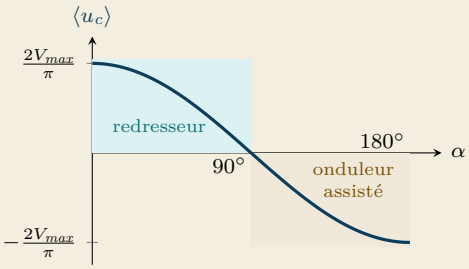
À $\theta = \pi$, v devient négative, mais T_1 et T_3 restent passants : le courant ne s'est pas annulé et aucun autre thyristor n'a été amorcé. Ainsi $u_c = v$ de α à $\alpha + \pi$, puis $u_c = -v$ de $\alpha + \pi$ à $\alpha + 2\pi$: la tension u_c présente des parties **négatives**, alors que le courant reste positif.



À retenir · Pont PD2 à thyristors, conduction continue

$$\langle u_c \rangle = \frac{2\,V_{max}}{\pi}\cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,V\cos(\alpha)$$

$\alpha < 90°$: $\langle u_c \rangle > 0$, le pont fonctionne en **redresseur** (le réseau fournit de l'énergie à la charge). $\alpha > 90°$: $\langle u_c \rangle < 0$, le pont fonctionne en **onduleur assisté** (la charge renvoie de l'énergie au réseau).



Les thyristors ne laissent passer le courant I_c que dans un sens. La puissance reçue par la charge,

$$P = \langle u_c \rangle \times I_c,$$

a donc le signe de $\langle u_c \rangle$. Le fonctionnement en onduleur assisté exige une charge qui fournit de l'énergie : machine à courant continu entraînée par la charge (descente d'un treuil, par exemple).

Ex

Exemple : moteur à courant continu sur pont PD2 à thyristors Réseau $V = 230\,\text{V}$; induit de résistance $R = 1\,\Omega$ parcouru par $I_c = 20\,\text{A}$; $\alpha = 40°$.

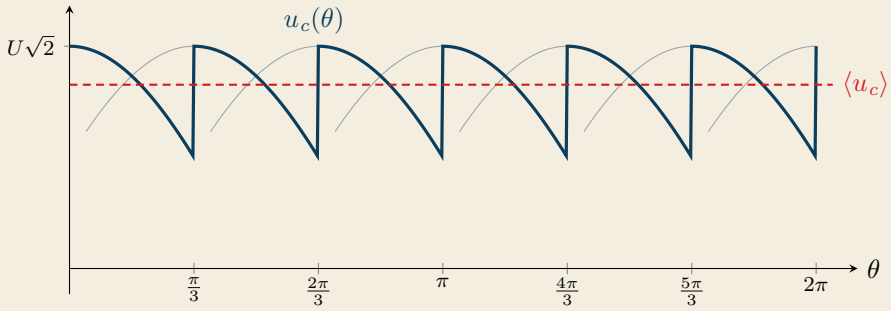
$$\langle u_c \rangle = \frac{2 \times 325}{\pi} \times \cos(40°) \approx 159\,\text{V}$$

$E' = \langle u_c \rangle - R\,I_c = 159 - 1 \times 20 = 139\,\text{V}$ $\qquad$ $P = \langle u_c \rangle \times I_c = 158{,}6 \times 20 \approx 3{,}17\,\text{kW}$

La première relation vient de ce que la tension moyenne aux bornes de l'inductance est nulle en régime établi.

Le pont PD3 à thyristors

Le pont PD3 à thyristors s'étudie de la même manière : chaque thyristor est amorcé avec le retard α sur l'instant où la diode correspondante aurait commencé à conduire.



★

À retenir · Pont PD3 à thyristors, conduction continue

$$\langle u_c \rangle = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}\,U\cos(\alpha) \approx 1{,}35\,U\cos(\alpha) \qquad P = \langle u_c \rangle \times I_c$$

Redresseur pour $\alpha < 90°$, onduleur assisté pour $\alpha > 90°$ (source côté continu).

Ex

Exemple Sur le réseau 400 V, avec $\alpha = 30°$ (cas de la figure) : $\langle u_c \rangle = 1{,}35 \times 400 \times \cos(30°) \approx 468\,\text{V}$; avec $\alpha = 60°$: $\langle u_c \rangle \approx 270\,\text{V}$.

Méthode : étudier un pont redresseur.

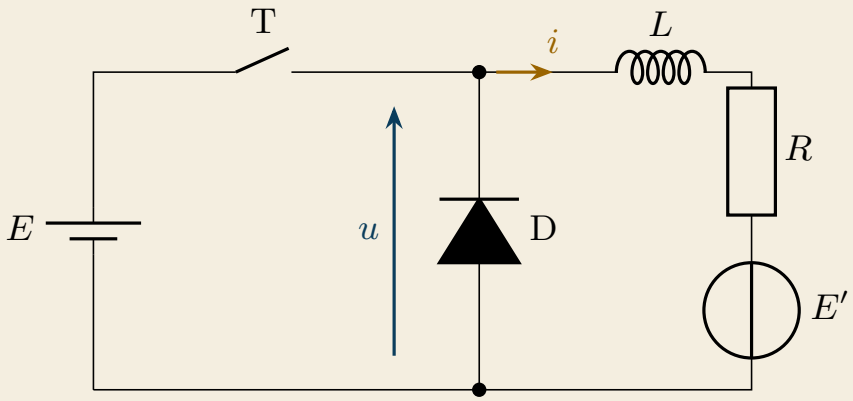
1. Repérer le type de pont (PD2 ou PD3) et d'interrupteurs (diodes : $\alpha = 0$; thyristors : α réglable).
2. Pour chaque intervalle, indiquer les interrupteurs passants et en déduire u_c en fonction des tensions du réseau.
3. Calculer $\langle u_c \rangle$ par la formule du cours, puis la grandeur demandée côté charge avec $\langle u_c \rangle = E' + R\,I_c$.
4. Calculer la puissance par $P = \langle u_c \rangle\, I_c$ (courant constant) ou par $P = U_{c,eff}^2/R$ (charge résistive).
5. Interpréter le signe de P : positif, le réseau fournit l'énergie (redresseur) ; négatif, la charge la renvoie au réseau (onduleur assisté).

8.6 Le hacheur

Le hacheur règle une tension continue à partir d'une source continue fixe (batterie, panneau photovoltaïque, sortie d'un redresseur), sans perdre d'énergie dans une résistance. On l'emploie pour faire varier la vitesse des moteurs à courant continu, charger une batterie ou extraire la puissance maximale d'un panneau solaire.

Le hacheur série (abaisseur)

Le hacheur série découpe une tension continue fixe E à la fréquence $f = 1/T$ (plusieurs kilohertz). L'interrupteur commandé T est fermé pendant αT, puis ouvert pendant $(1-\alpha)T$; α est le **rapport cyclique**.



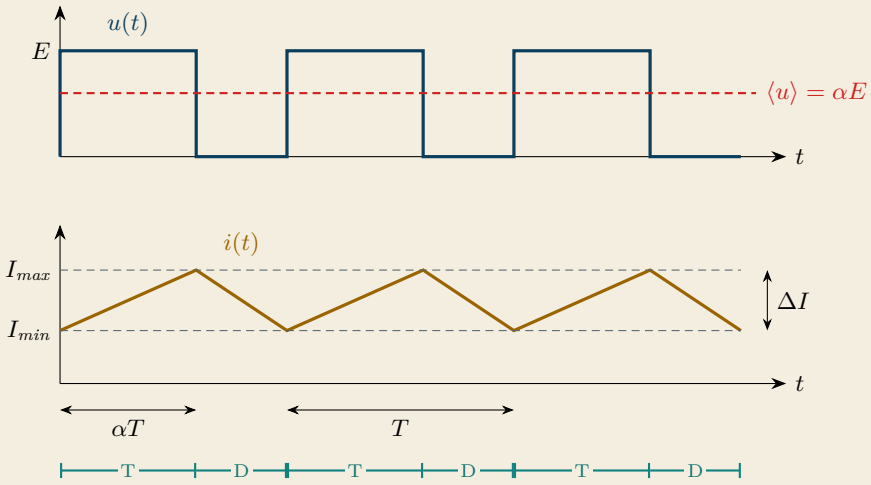
De 0 **à** αT : T est fermé, $u = E$ et la diode est bloquée ; le courant i croît. **De** αT **à** T : T est ouvert ; l'inductance impose la continuité du courant, qui passe par la diode D (diode de **roue libre**) : $u = 0$ et i décroît.

À retenir · Hacheur série

$$\alpha = \frac{t_{fermeture}}{T} \quad (0 \le \alpha \le 1) \qquad \langle u \rangle = \alpha\, E \qquad \langle u \rangle = E' + R\,\langle i \rangle$$

$$\Delta I = I_{max} - I_{min} = \frac{\alpha\,(1-\alpha)\,E}{L\,f} \qquad \Delta I_{max} = \frac{E}{4\,L\,f} \text{ pour } \alpha = 0{,}5$$

La relation $\langle u \rangle = E' + R\,\langle i \rangle$ vient de ce que la tension moyenne aux bornes d'une inductance est nulle en régime établi. Pour un moteur, $E' = k\,\Omega$: la vitesse se règle avec α.



L'ondulation ΔI ne dépend que du découpage (α, E, L, f) ; la valeur moyenne $\langle i \rangle$ dépend de la charge (couple du moteur). Pour réduire l'ondulation, on augmente l'inductance L ou la fréquence f ; cette dernière est limitée par les pertes de commutation.

Exemple Hacheur alimenté sous $E = 300\,\text{V}$, $f = 10\,\text{kHz}$, $L = 10\,\text{mH}$, $\alpha = 0{,}4$:

$$\langle u \rangle = 0{,}4 \times 300 = 120\,\text{V} \qquad \Delta I = \frac{0{,}4 \times 0{,}6 \times 300}{0{,}010 \times 10^4} = 0{,}72\,\text{A}$$

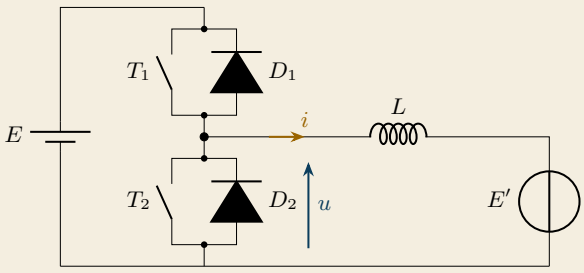
Quel que soit α, l'ondulation ne dépassera pas $\Delta I_{max} = 300/(4 \times 0{,}010 \times 10^4) = 0{,}75\,\text{A}$.

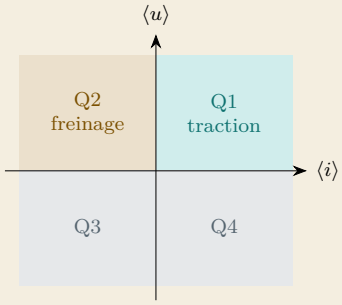
Piège classique Confondre la valeur moyenne $\langle i \rangle$ et l'ondulation ΔI : un oscilloscope en couplage AC ne montre que l'ondulation. Autre erreur fréquente : oublier que f est la fréquence de **découpage** (en kHz), à convertir en Hz dans la formule de ΔI.

Les hacheurs réversibles

Le hacheur série ne fonctionne que dans un **quadrant** : $\langle u \rangle > 0$ et $\langle i \rangle > 0$. Pour freiner un véhicule en renvoyant l'énergie à la batterie (**freinage avec récupération**), le moteur fonctionne en génératrice : E' garde son signe, mais le courant s'inverse.

Hacheur réversible en courant (deux quadrants) – hors programme **Traction** (Q1) : on commande T_1, la roue libre se fait par D_2 ; $\langle u \rangle = \alpha E$ et $\langle i \rangle > 0$. **Freinage** (Q2) : on commande T_2, le courant négatif revient à la source par D_1 ; $\langle u \rangle$ reste positive, $\langle i \rangle < 0$ et la puissance $\langle u \rangle \langle i \rangle$ est renvoyée à la batterie.





Q3 et Q4 : marche arrière

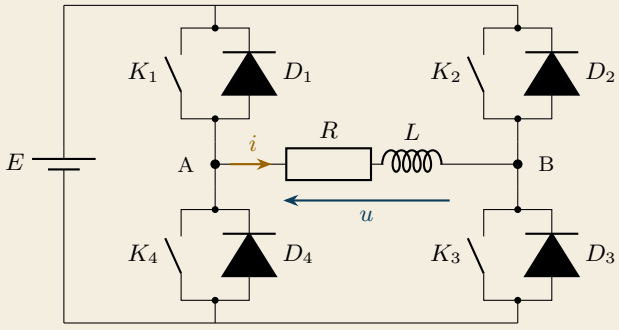
Pour inverser aussi le signe de $\langle u \rangle$ (marche arrière), on utilise un **hacheur en pont** (pont en H, quatre interrupteurs) : il fonctionne dans les **quatre quadrants**.

8.7 L'onduleur

L'onduleur fabrique une tension alternative, de fréquence et d'amplitude réglables, à partir d'une source continue E : batterie d'une alimentation sans interruption (ASI), panneaux photovoltaïques, bus continu d'un variateur de vitesse.

L'onduleur monophasé en pont

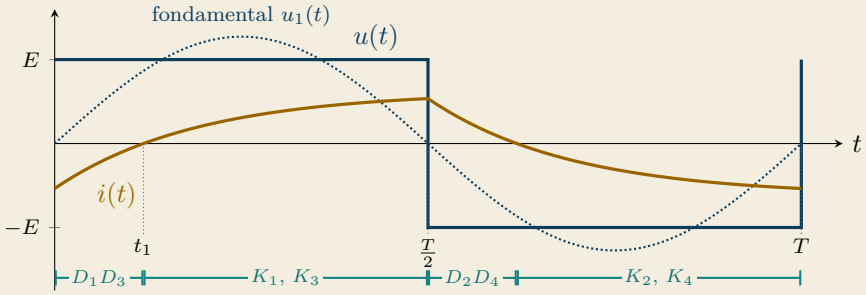
Le pont complet comporte quatre interrupteurs commandés, chacun avec sa diode en antiparallèle.



À retenir · Règles de commande K_1 et K_3 fermés : $u = +E$. K_2 et K_4 fermés : $u = -E$. Les deux interrupteurs d'un même bras (K_1 et K_4, ou K_2 et K_3) ne doivent **jamais** être fermés en même temps : la source serait en court-circuit.

La commande pleine onde

Chaque paire d'interrupteurs est commandée pendant une demi-période : $u(t)$ est un créneau $\pm E$ de fréquence f, réglée par la commande. Avec une charge inductive, le courant $i(t)$ est en retard sur $u(t)$: au début de chaque demi-période, jusqu'à l'instant t_1 où il s'annule, il circule encore dans l'ancien sens et passe par les **diodes**, qui renvoient de l'énergie à la source.

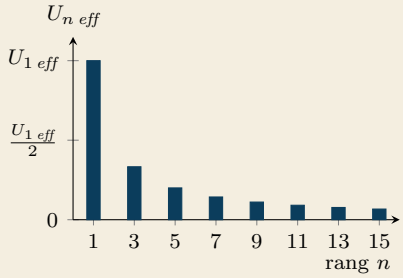


Le créneau se décompose en une somme de sinusoïdes : le **fondamental** $u_1(t)$, de fréquence f, et des **harmoniques** de fréquences $3f$, $5f$, $7f$… (rangs impairs).

À retenir · Commande pleine onde

$$U_{eff} = E \qquad U_{1\,eff} = \frac{4\,E}{\pi\sqrt{2}} \approx 0{,}9\,E \qquad U_{n\,eff} = \frac{U_{1\,eff}}{n} \quad (n \text{ impair})$$

$U_{1\,eff}$ et $U_{n\,eff}$: valeurs efficaces du fondamental et de l'harmonique de rang n.



Les harmoniques sont importants : leur taux de distorsion harmonique (THD) atteint environ 48 %. Dans un moteur, ils provoquent des pertes supplémentaires et des à-coups de couple. De plus, l'amplitude du fondamental ne se règle qu'en modifiant E. On préfère donc la commande MLI.

La commande MLI

En **modulation de largeur d'impulsion** (MLI), on compare une tension de référence sinusoïdale v_{ref} (de la fréquence f souhaitée) à une porteuse triangulaire v_p de fréquence élevée f_{dec}. Quand $v_{ref} > v_p$, on ferme K_1 et K_3 ($u = +E$) ; sinon K_2 et K_4 ($u = -E$). La largeur des impulsions varie au rythme de la référence : la valeur moyenne de u sur chaque période de découpage suit la sinusoïde.

À retenir · Commande MLI

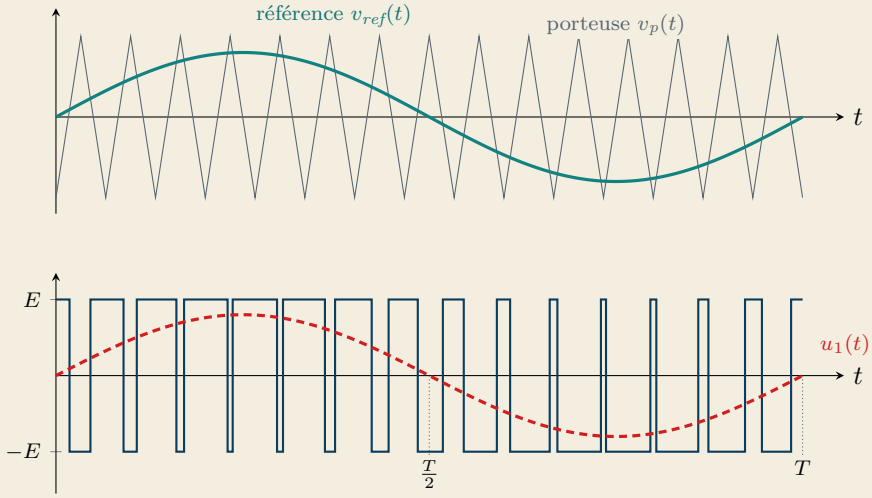
$$m = \frac{V_{ref,max}}{V_{p,max}} \quad (0 \le m \le 1) \qquad U_{1\,max} = m \times E$$

m : indice de modulation. La commande règle l'amplitude du fondamental (par m) et sa fréquence (par f). Les harmoniques sont rejetés autour de f_{dec} et de ses multiples.

L'inductance de la charge présente une impédance $L\omega$ bien plus grande pour ces harmoniques de haute fréquence que pour le fondamental : elle les filtre, et le courant est presque sinusoïdal.

Exemple Onduleur alimenté par un bus continu $E = 540\,\text{V}$, avec $m = 0{,}8$: $U_{1\,max} = 0{,}8 \times 540 = 432\,\text{V}$, soit une valeur efficace $U_{1\,eff} = 432/\sqrt{2} \approx 305\,\text{V}$. Avec une porteuse à $f_{dec} = 4\,\text{kHz}$, les premiers harmoniques se situent vers $4\,\text{kHz}$, loin du fondamental à $50\,\text{Hz}$.

La figure ci-dessous montre la construction des impulsions pour $m = 0{,}8$ et une porteuse quinze fois plus rapide que la référence (en pratique, bien davantage).



Un onduleur **triphasé** comporte trois bras (six interrupteurs) commandés avec des références décalées de $\frac{2\pi}{3}$: il alimente les moteurs asynchrones et synchrones des variateurs de vitesse et raccorde les installations photovoltaïques au réseau.

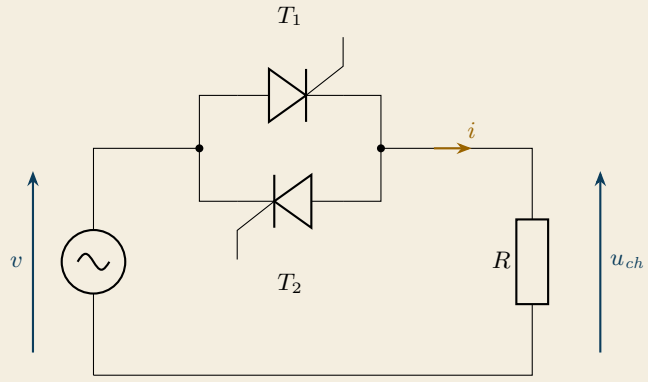
En ligne : simulateurs des ponts PD2 et PD3 (réglage de α), du hacheur série (rapport cyclique et ondulation), de l'onduleur pleine onde et MLI (spectre), et du gradateur.

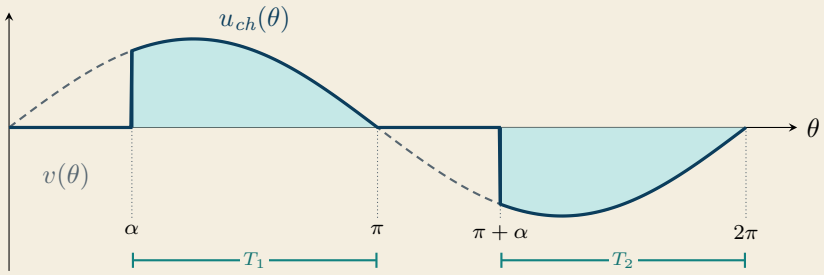
8.8 Le gradateur

Le gradateur est placé entre le réseau et une charge : il ne laisse passer qu'une partie de la tension du réseau. La fréquence ne change pas, mais la valeur efficace de la tension appliquée à la charge, donc la puissance reçue, est réglable. Le gradateur monophasé comporte deux thyristors tête-bêche (ou un triac) : T_1 conduit pendant les alternances positives, T_2 pendant les alternances négatives. Contrairement à un autotransformateur variable, il ne comporte aucune pièce mobile et règle la puissance en quelques millisecondes.

Commande par angle de phase

T_1 est amorcé à $\theta = \alpha$ et se bloque quand le courant s'annule (à $\theta = \pi$ pour une charge résistive) ; T_2 est amorcé à $\theta = \pi + \alpha$. Entre-temps, aucun thyristor ne conduit et $u_{ch} = 0$.





★ **À retenir · Gradateur à angle de phase, charge résistive**

$$U_{ch} = V\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}} \qquad P = \frac{U_{ch}^2}{R}$$

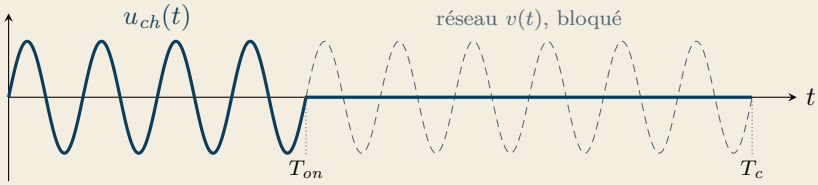
V : tension efficace du réseau ; U_{ch} : tension efficace aux bornes de la charge ; α en **radians**.

Ex **Exemple** Résistance $R = 23\,\Omega$ sous $V = 230\,\text{V}$: $P_{max} = 230^2/23 = 2\,300\,\text{W}$. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $U_{ch} = 230\sqrt{1 - 0{,}5 + 0} \approx 163\,\text{V}$ et $P = 1\,150\,\text{W}$: la moitié de P_{max}. Pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$: $U_{ch} \approx 206\,\text{V}$ et $P \approx 1\,850\,\text{W}$.

Le courant n'est pas sinusoïdal : le gradateur à angle de phase crée des harmoniques et dégrade le facteur de puissance (voir §5.4). Applications : variateurs de lumière, démarreurs progressifs de moteurs asynchrones, régulation rapide de chauffage.

Commande par train d'ondes

Le gradateur laisse passer des périodes **entières** du réseau pendant T_{on}, puis bloque jusqu'à la fin du cycle de durée T_c. Les thyristors commutent au passage par zéro de la tension : pas d'harmoniques ni de parasites.



À retenir · Gradateur à train d'ondes

$$P = \frac{T_{on}}{T_c} \times P_{max}$$

Réservé aux charges à forte inertie thermique (fours, chauffe-eau) ; à proscrire pour l'éclairage (papillotement).

8.9 Pertes et refroidissement

Même avec un rendement de 98 %, un variateur de 100 kW dissipe 2 kW sous forme de chaleur, concentrée dans quelques puces de silicium de quelques centimètres carrés. Évacuer cette chaleur est indispensable : au-delà de sa température maximale, un semi-conducteur est détruit.

Les pertes dans les semi-conducteurs

Les interrupteurs réels dissipent de l'énergie de deux façons. Les **pertes en conduction** viennent de la petite tension qui subsiste à l'état passant : pour une diode réelle, $p \approx V_{seuil} \times I$ ($V_{seuil} \approx 0{,}7\,\text{V}$ à $1\,\text{V}$). Les **pertes par commutation** se produisent à chaque fermeture et à chaque ouverture : pendant quelques centaines de nanosecondes, le composant supporte à la fois une tension et un courant. Elles sont **proportionnelles à la fréquence de découpage** : augmenter f réduit l'ondulation du courant et la taille des inductances, mais augmente les pertes. C'est le compromis principal du concepteur.

Calcul des pertes – hors programme Pour une diode ou un thyristor de tension de seuil V_{seuil} et de résistance dynamique r_d, et pour un MOSFET de résistance $R_{DS(on)}$ à l'état passant :

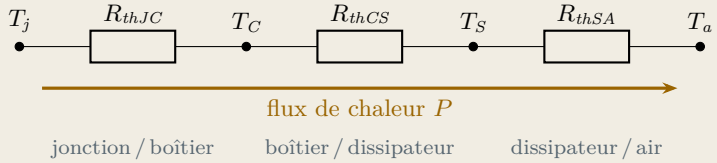
$$P_{cond} = V_{seuil}\,\langle i \rangle + r_d\,I_{eff}^2 \qquad\qquad P_{cond} = R_{DS(on)}\,I_{eff}^2$$

Si chaque cycle de découpage coûte l'énergie $E_{on} + E_{off}$: $P_{com} = (E_{on} + E_{off}) \times f$.

Le refroidissement

La chaleur produite dans la puce (la **jonction**) doit être évacuée vers l'air ambiant à travers le boîtier et un **dissipateur** (radiateur à ailettes, souvent ventilé). Chaque composant a une température de jonction maximale, de 125 °C à 175 °C : au-delà, il est détruit. Une panne du ventilateur de l'armoire est une cause fréquente de destruction des variateurs.

Le modèle thermique – hors programme Chaque étape du trajet de la chaleur oppose une **résistance thermique** R_{th} (en K/W) ; la puissance P joue le rôle du courant, les températures celui des potentiels (voir § 12.5).



$$T_j - T_a = P \times (R_{thJC} + R_{thCS} + R_{thSA}) \qquad \text{avec} \quad T_j \leq T_{j,max}$$

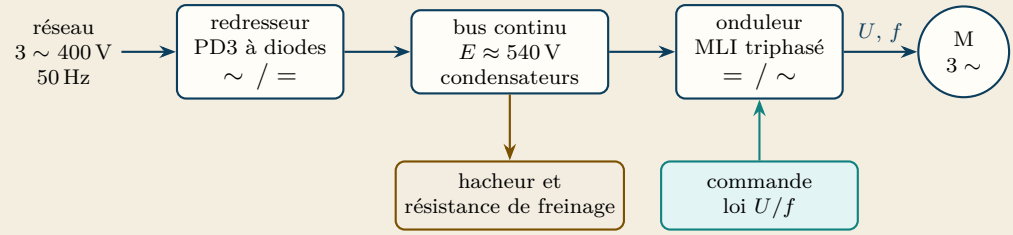
Exemple. Un IGBT dissipe $P = 60\,\text{W}$; $R_{thJC} = 0{,}4\,\text{K/W}$, $R_{thCS} = 0{,}1\,\text{K/W}$, $T_a = 40\,°\text{C}$; pour $T_j \leq 125\,°\text{C}$:

$$R_{thSA} \leq \frac{125 - 40}{60} - 0{,}4 - 0{,}1 \approx 0{,}92\,\text{K/W}$$

Si plusieurs composants partagent le même dissipateur, R_{thSA} est traversée par la **somme** de leurs puissances.

8.10 Le variateur de vitesse

Le variateur de vitesse d'un moteur asynchrone associe trois étages : un **redresseur** PD3 à diodes, un **bus continu** filtré par des condensateurs ($E \approx 540\,\text{V}$ sur le réseau 400 V) et un **onduleur** MLI triphasé, qui fournit au moteur une tension de fréquence f et de valeur efficace U réglables.



À retenir · Commande à U/f constante

$$N_s = \frac{60\,f}{p} \qquad \frac{U}{f} = \text{constante} \quad \left(\text{par exemple } \frac{400\,\text{V}}{50\,\text{Hz}} = 8\,\text{V/Hz}\right)$$

N_s : vitesse de synchronisme (tr/min) ; p : nombre de paires de pôles. Le moteur tourne un peu moins vite que N_s (glissement) (voir § 6.3).

✗ **Piège classique** Confondre la fréquence f de la tension fournie au moteur (de quelques hertz à 50 Hz ou plus : elle fixe la vitesse) et la fréquence de découpage f_{dec} des IGBT (quelques kilohertz : elle fixe les pertes par commutation et le bruit du moteur). De même, U est la valeur efficace du fondamental de la tension composée, et non la tension E du bus continu.

En gardant U/f constant, le flux dans le moteur, donc le couple maximal, reste le même à toutes les vitesses. Le variateur assure aussi les démarrages progressifs (sans pointe de courant), l'inversion du sens de marche et le freinage.

Freinage. Quand la charge entraîne le moteur (ralentissement d'une machine à forte inertie, descente d'une charge), le moteur fonctionne en génératrice : l'onduleur renvoie l'énergie vers le bus continu. Le pont de diodes ne peut pas la transmettre au réseau, donc la tension du bus monte. Un **hacheur de freinage** connecte alors une **résistance de freinage** aux bornes du bus pour y dissiper cette énergie ; pour la récupérer, il faut un redresseur réversible (pont à IGBT, dit « actif »).

Ex **Exemple : ventilateur d'une tour aéroréfrigérante** Moteur à 4 pôles ($p = 2$), 400 V, 50 Hz. Pour un débit d'air réduit, on règle $f = 35$ Hz : $N_s = 60 \times 35/2 = 1\,050$ tr/min et $U = 8 \times 35 = 280$ V. Le débit d'air, donc la consommation, diminue fortement : c'est l'intérêt énergétique majeur des variateurs.

\+ **Lois de similitude et résistance de freinage** – hors programme La puissance absorbée par un ventilateur ou une pompe centrifuge varie comme le **cube** de la vitesse : à 35 Hz au lieu de 50 Hz, elle est divisée par environ $\left(\frac{50}{35}\right)^3 \approx 2{,}9$.

Résistance de freinage. Une centrifugeuse (moment d'inertie $J = 12\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$) doit s'arrêter en 10 s depuis 1 500 tr/min, soit $\Omega = 157$ rad/s. L'énergie cinétique à évacuer vaut

$$W = \frac{1}{2} J\,\Omega^2 = \frac{1}{2} \times 12 \times 157^2 \approx 148\,\text{kJ} \qquad \text{soit en moyenne} \quad P = \frac{W}{\Delta t} \approx 14{,}8\,\text{kW}$$

À couple de freinage constant, la puissance décroît linéairement avec la vitesse : elle vaut $2P \approx 29{,}6$ kW au début du freinage. Le hacheur connecte la résistance lorsque le bus atteint $U_{bus} = 700$ V ; pour absorber la puissance maximale, il faut

$$R \leq \frac{U_{bus}^2}{2P} = \frac{700^2}{29\,600} \approx 16{,}5\,\Omega$$

✎ **Méthode : identifier un convertisseur.** Repérer la nature de la source (alternative ou continue) et celle dont le récepteur a besoin, ce qui donne la famille ; puis la grandeur à régler (valeur moyenne, valeur efficace, fréquence), ce qui donne le mode de commande ; enfin le sens de transfert de l'énergie (freinage ou non), ce qui dit si le convertisseur doit être réversible.

L'essentiel

Chapitre 8

Interrupteurs, valeurs moyennes, redresseurs

Diode	passante si $i_{AK} > 0$ bloquée si $v_{AK} < 0$
Thyristor	amorcé si $v_{AK} > 0$ et $i_G > 0$ bloqué si $i = 0$
Valeur moyenne (DC)	$\langle u \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$
Valeur efficace (TRMS, AC+DC)	$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$
Créneau $0\,/\,E$	$\langle u \rangle = \alpha\, E$ $U_{eff} = \sqrt{\alpha}\, E$
Redressement double alternance	$\langle u \rangle = \dfrac{2\,U_{max}}{\pi}$ $U_{eff} = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
Redressement simple alternance	$\langle u \rangle = \dfrac{U_{max}}{\pi}$ $U_{eff} = \dfrac{U_{max}}{2}$
Puissance, courant constant	$P = \langle u \rangle \times I$
Puissance, charge résistive	$P = \dfrac{U_{eff}^2}{R} = R\,I_{eff}^2$
Pont PD2 à diodes	$\langle u_c \rangle = \dfrac{2\,V_{max}}{\pi} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\,V \approx 0{,}9\,V$ $f_{u_c} = 2f$
Pont PD2 à thyristors	$\langle u_c \rangle = \dfrac{2\,V_{max}}{\pi}\cos(\alpha)$
Pont PD3 à diodes	$\langle u_c \rangle = \dfrac{3\sqrt{2}}{\pi}\,U \approx 1{,}35\,U$ $f_{u_c} = 6f$
Pont PD3 à thyristors	$\langle u_c \rangle = \dfrac{3\sqrt{2}}{\pi}\,U\cos(\alpha) \approx 1{,}35\,U\cos(\alpha)$
Mode redresseur	$\alpha < 90°$ $\langle u_c \rangle > 0$
Mode onduleur assisté	$\alpha > 90°$ $\langle u_c \rangle < 0$
Charge R, L, E'	$\langle u_c \rangle = E' + R\,I_c$ $E' = k\,\Omega$

Mode onduleur assisté : pont entièrement commandé idéal, courant I_c continu de sens fixé ; le côté continu (machine entraînée, $E' < 0$) entretient ce courant et fournit la puissance.

Hacheur, onduleur, gradateur, pertes

Rapport cyclique	$\alpha = \dfrac{t_{fermeture}}{T} \qquad f = \dfrac{1}{T}$
Hacheur série	$\langle u \rangle = \alpha\, E$
Charge R, L, E'	$\langle u \rangle = E' + R\,\langle i \rangle$
Ondulation du courant	$\Delta I = I_{max} - I_{min} = \dfrac{\alpha\,(1-\alpha)\,E}{L\,f}$
Ondulation maximale ($\alpha = 0{,}5$)	$\Delta I_{max} = \dfrac{E}{4\,L\,f}$
Onduleur pleine onde	$U_{eff} = E \qquad U_{1\,eff} = \dfrac{4\,E}{\pi\sqrt{2}} \approx 0{,}9\,E$
Harmoniques (pleine onde)	$U_{n\,eff} = \dfrac{U_{1\,eff}}{n}$ (n impair)
Onduleur MLI	$m = \dfrac{V_{ref,max}}{V_{p,max}} \qquad U_{1\,max} = m \times E$
Gradateur à angle de phase	$U_{ch} = V\sqrt{1 - \dfrac{\alpha}{\pi} + \dfrac{\sin(2\alpha)}{2\pi}} \qquad P = \dfrac{U_{ch}^2}{R}$
Gradateur à train d'ondes	$P = \dfrac{T_{on}}{T_c} \times P_{max}$
Pertes dans une diode réelle	$p \approx V_{seuil} \times I \qquad V_{seuil} \approx 0{,}7\,\text{V}$ à $1\,\text{V}$
Variateur de vitesse	$N_s = \dfrac{60\,f}{p} \qquad \dfrac{U}{f} = \text{constante}$

Exercices

Chapitre 8

Exercice 8.1 – Audit énergétique d'une biscuiterie ★☆☆

Une biscuiterie industrielle fait réaliser un audit de ses consommations électriques. Le technicien chargé de l'inventaire doit identifier, pour chaque équipement, le convertisseur statique qui l'alimente et le type d'interrupteurs qu'il contient, puis montrer à la direction l'intérêt de ces convertisseurs par rapport aux anciens rhéostats encore présents sur une machine.

1. Pour chacun des équipements suivants, nommer le convertisseur utilisé et préciser la nature (alternative ou continue) de la tension d'entrée et de la tension de sortie :
   a) le moteur à courant continu d'un convoyeur, alimenté par la batterie d'un chariot, dont on règle la vitesse ;
   b) les résistances du four tunnel, dont la puissance est réglée sans changer la fréquence de 50 Hz ;
   c) le chargeur des batteries 24 V des transpalettes, branché sur une prise du réseau ;
   d) les panneaux photovoltaïques de la toiture, qui injectent leur production sur le réseau ;
   e) l'étage de sortie du variateur du moteur asynchrone du pétrin, qui fournit une tension de fréquence réglable.
2. Quel interrupteur électronique (diode, thyristor, IGBT ou MOSFET) choisir pour : le redresseur non commandé d'un chargeur ; un hacheur 48 V découpant à 40 kHz ; un onduleur de 30 kW alimenté sous 540 V ; le gradateur du four ? Justifier brièvement.
3. Sur une ancienne machine, un ventilateur à courant continu qui doit recevoir 24 V et 4 A est alimenté à partir d'une source de 48 V à travers un rhéostat en série. Calculer la résistance du rhéostat, la puissance qu'il dissipe et le rendement de l'alimentation.
4. On remplace le rhéostat par un hacheur série. Quel rapport cyclique α faut-il régler ? Les pertes totales du hacheur sont estimées à 3 W : calculer son rendement et conclure.
5. Expliquer en une phrase pourquoi un interrupteur parfait ne dissipe aucune puissance.

→ corrigé p. 293

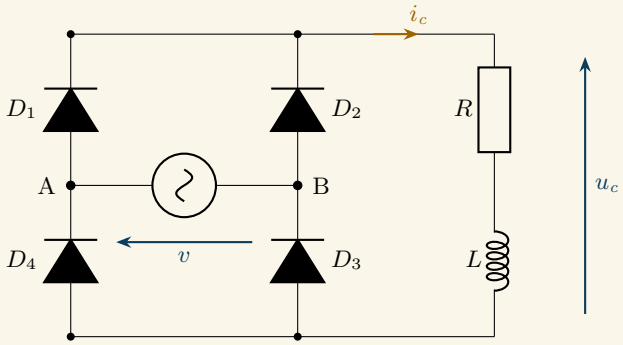
Exercice 8.2 – Alimentation d'un séparateur magnétique ★☆☆

Dans un centre de tri des déchets, un électroaimant suspendu au-dessus d'un convoyeur (« overband ») attire les pièces en acier mélangées aux autres déchets. Sa bobine doit être alimentée en courant continu : le constructeur a prévu un

transformateur abaisseur suivi d'un pont de Graëtz à diodes. Après le remplacement du pont, le technicien doit vérifier le courant dans la bobine et choisir des diodes adaptées.

Données

- Tension au secondaire du transformateur : $v(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t)$, $V = 110\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$.
- Bobine de l'électroaimant : résistance $R = 4{,}5\,\Omega$ et inductance L assez grande pour que le courant i_c soit constant : $i_c = I_c$.
- Diodes parfaites, sauf à la question 7 (tension de seuil $V_{seuil} = 0{,}9\,\text{V}$).



1. Calculer la valeur maximale V_{max} de la tension $v(t)$.
2. Indiquer les diodes passantes pendant chaque alternance et exprimer $u_c(t)$ en fonction de $v(t)$.
3. Représenter $v(t)$, $u_c(t)$ et $i_c(t)$ sur deux périodes du réseau. Quelle est la fréquence de $u_c(t)$?
4. Calculer la valeur moyenne $\langle u_c \rangle$. En déduire le courant I_c dans la bobine.
5. Calculer la puissance P reçue par la bobine.
6. Chaque diode conduit I_c pendant une demi-période et supporte, bloquée, une tension inverse maximale égale à V_{max}. Calculer son courant moyen et cette tension. Les diodes disponibles en magasin sont de calibre 15 A (valeur moyenne) et 200 V, 400 V ou 800 V : lesquelles choisir, avec un coefficient de sécurité de 2 sur la tension ?
7. Avec des diodes réelles, deux diodes conduisent en permanence. Calculer les pertes dans le pont et le rendement du redresseur (on néglige la variation de I_c).
8. Pourquoi, dans la bobine, un ampèremètre en position DC et un ampèremètre TRMS en position AC+DC indiquent-ils la même valeur, alors que deux voltmètres ainsi réglés donnent des valeurs différentes en sortie du pont ?

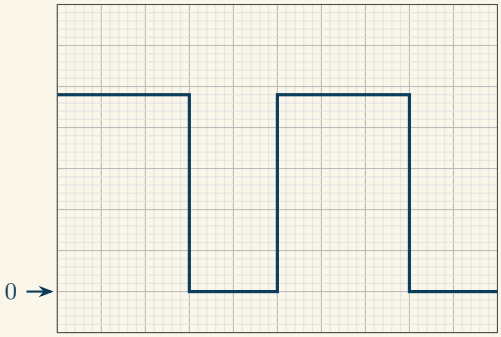
→ corrigé p. 294

Exercice 8.3 – Variation de vitesse d'un transpalette électrique ★★☆

Un fabricant de matériel de manutention met au point un transpalette électrique. Le moteur de traction, à courant continu, est alimenté par la batterie 24 V à travers un hacheur série à transistor MOSFET. Le technicien d'essais relève à l'oscilloscope la tension $u(t)$ appliquée au moteur et sa bobine de lissage, et doit vérifier le dimensionnement du hacheur : ondulation du courant, courant de démarrage, possibilité de freinage.

Données

- Schéma : celui du hacheur série du cours (source E, interrupteur T, diode D, inductance L, moteur R, E').
- Moteur : résistance d'induit $R = 0{,}12\,\Omega$; f.é.m. $E' = k\,\Omega$ avec $k = 0{,}10\,\mathrm{V\cdot s\cdot rad^{-1}}$.
- Inductance totale du circuit : $L = 0{,}5\,\mathrm{mH}$. Point de fonctionnement étudié : $\langle i\rangle = 40\,\mathrm{A}$.



Tension $u(t)$: 5 V/div ; base de temps : 10 µs par division ; la flèche repère le niveau zéro.

1. À partir de l'oscillogramme, déterminer la tension E de la batterie, la période T et la fréquence de découpage f.

2. Déterminer la durée de fermeture du transistor, le rapport cyclique α et la valeur moyenne $\langle u\rangle$.

3. Calculer la valeur efficace U_{eff} de $u(t)$. Avec quel appareil, et dans quelle position, mesure-t-on $\langle u\rangle$? et U_{eff} ?

4. Calculer la f.é.m. E' du moteur, sa vitesse angulaire Ω et sa fréquence de rotation N en tr/min.

5. Calculer l'ondulation ΔI du courant, puis I_{max} et I_{min}. Représenter $i(t)$ sur deux périodes, en concordance de temps avec $u(t)$.

6. Quelle serait l'ondulation maximale du courant, et pour quel rapport cyclique ?

7. Au démarrage, le moteur est à l'arrêt. Quel rapport cyclique maximal faut-il imposer pour que le courant de démarrage ne dépasse pas 60 A ?

8. Dans une pente, le transpalette chargé est entraîné par son poids. Expliquer pourquoi ce hacheur ne permet pas de freiner en renvoyant l'énergie à la batterie. Quel montage faut-il utiliser, et dans quel quadrant fonctionne-t-il alors ?

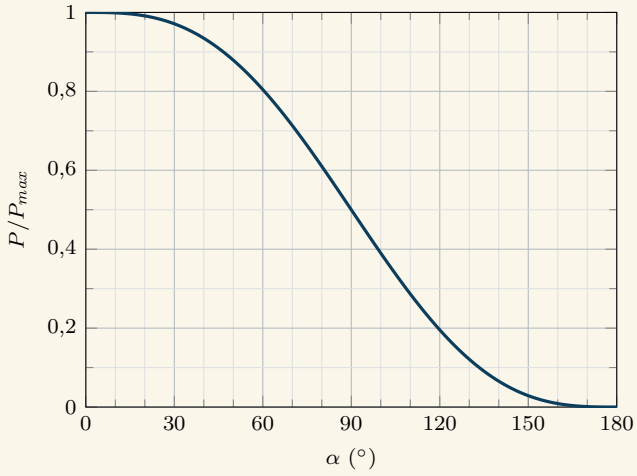
→ corrigé p. 295

Exercice 8.4 – Chauffage d'un bain de dégraissage ★★☆

Dans un atelier de traitement de surface, les pièces métalliques sont dégraissées dans un bain chauffé par un thermoplongeur. La puissance de chauffe est réglée par un gradateur monophasé à deux thyristors tête-bêche, piloté par un régulateur de température. Le service maintenance constate des perturbations sur le réseau de l'atelier et se demande s'il faut changer de mode de commande.

Données

- Réseau : $V = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$. Thermoplongeur résistif : $P_{max} = 4{,}6\,\text{kW}$ sous $230\,\text{V}$.
- Schéma : celui du gradateur du cours ; thyristors parfaits.
- Courbe ci-dessous : rapport $\frac{P}{P_{max}}$ en fonction de l'angle de retard α (commande par angle de phase, charge résistive).



I- Commande par angle de phase

1. Calculer la résistance R du thermoplongeur et le courant efficace qu'il absorbe à pleine puissance.

2. Représenter $v(\theta)$ et $u_{ch}(\theta)$ sur une période pour $\alpha = 120°$, en indiquant les intervalles de conduction de T_1 et T_2.

3. Calculer la valeur efficace U_{ch} et la puissance P pour $\alpha = 90°$, puis pour $\alpha = 120°$. Vérifier les résultats sur la courbe.

4. Le régulateur demande $P = 3{,}5\,\text{kW}$. Déterminer graphiquement l'angle α correspondant.

5. Chaque thyristor ne conduit que pendant une alternance. Calculer le courant efficace dans un thyristor à pleine puissance et la tension maximale qu'il doit supporter.

II- Commande par train d'ondes

On choisit un cycle de durée $T_c = 2\,\text{s}$.

6. Combien de périodes du réseau un cycle contient-il ?

7. Pour maintenir le bain à sa température, il faut une puissance moyenne de 2,76 kW. Calculer T_{on} et le nombre de périodes de conduction par cycle.

8. Pourquoi ce mode de commande supprime-t-il les perturbations constatées ? Pourquoi convient-il au bain, mais pas à l'éclairage de l'atelier ?

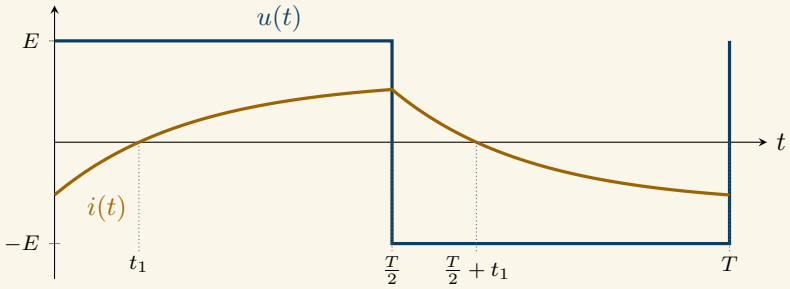
→ corrigé p. 297

Exercice 8.5 – Onduleur d'un relais de télécommunication ★★☆

Un opérateur de télécommunication exploite un relais isolé en montagne, alimenté par des panneaux photovoltaïques et une batterie 48 V. Les équipements de transmission fonctionnent en 230 V, 50 Hz : un onduleur en pont, suivi d'un transformateur élévateur, les alimente. L'ancien onduleur à commande pleine onde fait chauffer le transformateur ; le technicien étudie son remplacement par un onduleur MLI et vérifie l'autonomie du site.

Données

- Onduleur en pont complet (schéma du cours), $E = 48\,\text{V}$; la charge vue par l'onduleur est inductive.
- Chronogrammes relevés en commande pleine onde ($T = 20\,\text{ms}$) :



I- Commande pleine onde

1. Quels interrupteurs sont commandés pour obtenir $u = +E$? et $u = -E$? Pourquoi K_1 et K_4 ne doivent-ils jamais être fermés simultanément ?

2. Sur chacun des intervalles $[0\,;t_1]$, $[t_1\,;\frac{T}{2}]$, $[\frac{T}{2}\,;\frac{T}{2}+t_1]$ et $[\frac{T}{2}+t_1\,;T]$, indiquer les composants passants et le signe de la puissance $p = u\,i$ reçue par la charge. Interpréter.

3. Calculer la valeur efficace U_{eff} de $u(t)$, celle $U_{1\,eff}$ de son fondamental et celles des harmoniques de rangs 3, 5 et 7.

4. Quel rapport de transformation m_T faut-il pour obtenir un fondamental de 230 V au secondaire ? Calculer alors la valeur efficace de l'harmonique 3 au secondaire. Pourquoi le transformateur chauffe-t-il ?

II- Commande MLI

Le nouvel onduleur utilise une porteuse à $f_{dec} = 16\,\text{kHz}$ et un indice de modulation $m = 0{,}9$.

5. Calculer l'amplitude $U_{1\,max}$ et la valeur efficace $U_{1\,eff}$ du fondamental. En déduire le nouveau rapport de transformation.

6. Où se situent les premiers harmoniques ? Par combien l'impédance d'une inductance est-elle multipliée entre 50 Hz et 16 kHz ? Conclure.

III- Autonomie

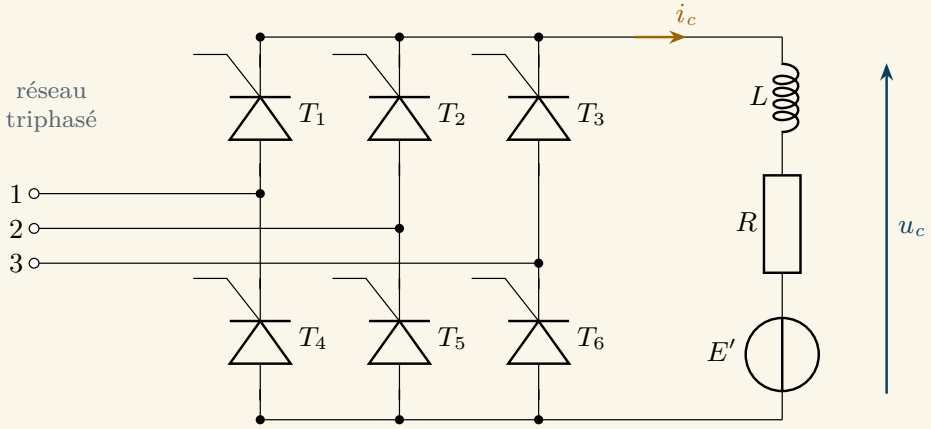
La batterie a une capacité de $600\,\text{A}\cdot\text{h}$; on n'utilise que 80 % de l'énergie stockée. Les équipements absorbent 400 W en moyenne et l'onduleur MLI a un rendement de 0,93.

7. Calculer la puissance fournie par la batterie, son courant moyen et l'autonomie du relais sans soleil.

→ corrigé p. 298

Exercice 8.6 – Entraînement d'une extrudeuse ★★★

Une usine de profilés en PVC entraîne la vis de son extrudeuse par un moteur à courant continu de forte puissance, alimenté par un pont PD3 à thyristors raccordé au réseau 400 V. Lors d'un audit, deux points sont soulevés : le facteur de puissance de l'installation est jugé faible, et le dissipateur des thyristors atteint une température élevée en été. Le technicien est chargé de l'étude complète du variateur.



Données

- Réseau triphasé : $U = 400\,\text{V}$ (tension composée), $f = 50\,\text{Hz}$.
- Moteur : résistance d'induit $R = 0{,}15\,\Omega$; $E' = k\,\Omega$ avec $k = 2{,}7\,\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$;

régime nominal : $I_n = 120\,\text{A}$, $N_n = 1\,500\,\text{tr/min}$. Inductance suffisante : $i_c = I_c$ constant.

- ▷ Courant en ligne absorbé par le pont : créneaux de valeur efficace $I_L = \sqrt{2/3}\, I_c$.
- ▷ Thyristor : $V_{seuil} = 1{,}0\,\text{V}$, $r_d = 4\,\text{m}\Omega$, $R_{thJC} = 0{,}25\,\text{K/W}$, $R_{thCS} = 0{,}05\,\text{K/W}$; les six thyristors sont sur un même dissipateur ; $T_j \leq 125\,^\circ\text{C}$; $T_a = 40\,^\circ\text{C}$ en été.
- ▷ Formules utiles (hors programme) : pertes d'un thyristor $P_T = V_{seuil}\langle i_T\rangle + r_d I_{T,eff}^2$; loi thermique $T_j - T_a = P\,(R_{thJC} + R_{thCS} + R_{thSA})$, la résistance R_{thSA} du dissipateur commun étant traversée par la puissance totale.

A- Le pont et le moteur

1. Calculer la valeur moyenne maximale de u_c et préciser pour quel angle elle est obtenue.

2. Représenter l'allure de $u_c(\theta)$ sur une période du réseau pour $\alpha = 60°$. Que remarque-t-on ?

3. Au régime nominal, calculer Ω_n, E', $\langle u_c\rangle$ et l'angle α à régler.

4. Calculer la puissance reçue par le moteur, ses pertes Joule d'induit et sa puissance électromagnétique.

5. Au démarrage, on limite le courant à $1{,}5\,I_n$. Quel angle α faut-il imposer ?

6. Pour un autre profilé, on règle $\alpha = 60°$ avec $I_c = I_n$. Calculer la fréquence de rotation.

B- Facteur de puissance

7. Au régime nominal, calculer le courant efficace en ligne, la puissance apparente et le facteur de puissance du pont (thyristors parfaits).

8. Montrer que $f_p = \dfrac{3}{\pi}\cos(\alpha)$. Que devient-il à basse vitesse ? Conclure sur la remarque de l'audit.

C- Pertes et refroidissement

9. Chaque thyristor conduit I_c pendant un tiers de période. Au régime nominal, calculer le courant moyen et le courant efficace dans un thyristor, puis ses pertes et celles des six thyristors.

10. Calculer la résistance thermique maximale R_{thSA} du dissipateur.

11. Le dissipateur installé a une résistance thermique de $0{,}15\,\text{K/W}$ grâce à un ventilateur ; sans ventilation, elle passe à $0{,}45\,\text{K/W}$. Calculer T_j dans les deux cas et conclure.

→ corrigé p. 299

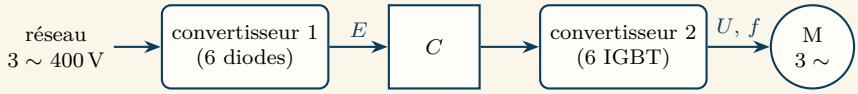
Sujets de type BTS

Chapitre 8

Sujet BTS 8.A – Variateur de vitesse d'une pompe de relevage

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure 30

Dans une station d'épuration, une pompe de relevage remonte les eaux usées vers les bassins de traitement. Elle tournait jusqu'ici à vitesse constante, son débit étant réduit par une vanne de laminage pendant les heures creuses. L'exploitant fait installer un variateur de vitesse et vous demande d'en vérifier le dimensionnement, puis d'évaluer l'économie d'énergie réalisée.



Données

- Réseau triphasé 400 V, 50 Hz. Convertisseur 1 : pont PD3 à diodes de tension de seuil $V_{seuil} = 1{,}0\,\text{V}$; on admet $E = \langle u_c \rangle$.
- Moteur asynchrone : $p = 2$; $P_{u,n} = 30\,\text{kW}$; rendement $\eta_m = 0{,}93$; $N_n = 1\,475\,\text{tr/min}$ sous 400 V, 50 Hz. On admet que l'écart $N_s - N$ reste égal à $25\,\text{tr/min}$.
- Convertisseur 2 : onduleur MLI triphasé de rendement $\eta_o = 0{,}98$, commande à U/f constant (400 V à 50 Hz), fréquence de découpage $f_{dec} = 4\,\text{kHz}$.
- Pertes d'un IGBT au régime nominal : conduction 42 W ; énergie de commutation $E_{on} + E_{off} = 7{,}5\,\text{mJ}$ par période de découpage. Pertes d'une diode antiparallèle : 18 W.
- Module à 6 IGBT et 6 diodes sur un dissipateur commun : $R_{thJC} = 0{,}22\,\text{K/W}$ (par IGBT), $R_{thCS} = 0{,}02\,\text{K/W}$ (module) ; $T_a = 45\,^\circ\text{C}$ dans l'armoire ; on impose $T_j \leq 125\,^\circ\text{C}$.
- Formules utiles : pertes par commutation $P_{com} = (E_{on} + E_{off})\,f_{dec}$; loi thermique $T_j - T_a = P\,(R_{thJC} + R_{thCS} + R_{thSA})$, chaque résistance thermique étant traversée par la puissance qui la traverse réellement (un IGBT pour R_{thJC}, tout le module pour R_{thCS} et R_{thSA}). Une diode du PD3 conduit I_c pendant un tiers de période et supporte une tension inverse maximale $U\sqrt{2}$.
- Pompe : sa puissance varie comme le cube de la vitesse, $P_u = P_{u,n} \times \left(\frac{N}{N_n}\right)^3$. Prix de l'énergie : 0,15 € par kW · h.

Partie A – Structure du variateur

A.1. Nommer les convertisseurs 1 et 2 et préciser la conversion réalisée par chacun. Quel est le rôle du condensateur C ?

A.2. Pourquoi des diodes suffisent-elles pour le convertisseur 1, alors que le convertisseur 2 utilise des IGBT ?

Partie B – Le redresseur

B.1. Calculer la tension E du bus continu. Quelle est la fréquence de l'ondulation de la tension redressée ?

B.2. Au régime nominal, calculer la puissance absorbée par le moteur, puis la puissance fournie par le bus et le courant moyen I_c débité par le redresseur.

B.3. Calculer le courant moyen dans une diode et la tension inverse maximale qu'elle supporte. Choisir la classe de tension des diodes parmi 600 V, 1 200 V et 1 600 V.

B.4. Deux diodes conduisent à chaque instant. Calculer les pertes du redresseur et son rendement.

Partie C – Commande à U/f constant

C.1. Pendant les heures creuses, on veut faire tourner la pompe à 80 % de sa vitesse nominale. Calculer la fréquence de rotation, la vitesse de synchronisme, puis la fréquence f et la tension U que doit fournir l'onduleur.

C.2. Pourquoi maintient-on le rapport U/f constant ? Que se passerait-il si l'on réduisait la fréquence en gardant $U = 400\,\text{V}$?

Partie D – Pertes et refroidissement de l'onduleur

D.1. Calculer les pertes par commutation d'un IGBT, ses pertes totales, puis les pertes totales du module. Vérifier la valeur annoncée du rendement de l'onduleur.

D.2. Calculer la résistance thermique maximale R_{thSA} du dissipateur. On choisit un dissipateur ventilé de 0,09 K/W : calculer la température de jonction des IGBT.

D.3. Pour réduire le bruit du moteur, l'exploitant souhaite passer à $f_{dec} = 8\,\text{kHz}$ sans changer de dissipateur. Calculer la nouvelle température de jonction et conclure.

Partie E – Bilan énergétique

E.1. Avec l'ancienne vanne, la pompe tournait à pleine vitesse 16 h par jour en fournissant 27 kW. Avec le variateur, elle tourne pendant ce temps à 80 % de sa vitesse nominale. Calculer, dans les deux cas, la puissance absorbée au réseau (on néglige les pertes du redresseur dans le second cas).

E.2. Calculer l'économie d'énergie annuelle et sa valeur en euros. Le variateur coûte 6 000 € installé : calculer son temps de retour sur investissement. Rédiger une conclusion pour l'exploitant.

→ corrigé p. 301

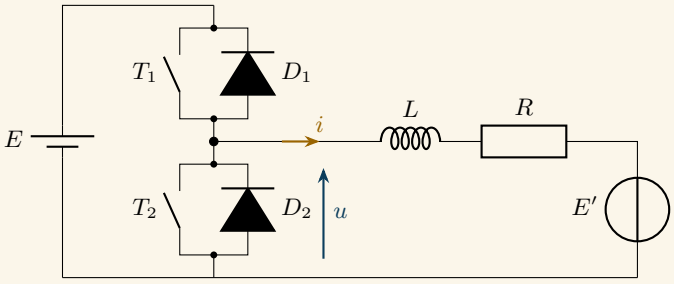
Sujet BTS 8.B – Motorisation d'un chariot filoguidé

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Dans un entrepôt logistique, des chariots filoguidés (AGV) transportent les palettes entre les quais et les zones de stockage. Chaque chariot est entraîné par un moteur à courant continu alimenté par une batterie 48 V à travers un hacheur réversible en courant ; une rampe relie deux niveaux de l'entrepôt. Le bureau d'études vous demande de vérifier la commande en traction et en freinage, le chargeur et le refroidissement du hacheur.

Données

- Batterie : $E = 48\,\text{V}$ (supposée constante). Interrupteurs T_1 et T_2 : MOSFET ; fréquence de découpage $f = 20\,\text{kHz}$; inductance totale $L = 0{,}2\,\text{mH}$.
- Moteur : $R = 0{,}06\,\Omega$; $E' = k\,\Omega$ avec $k = 0{,}30\,\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$. Vitesse du chariot : $v = 0{,}012\,\Omega$ (v en m/s, Ω en rad/s).
- Chargeur : transformateur de tension secondaire $V_2 = 70\,\text{V}$, suivi d'un pont PD2 à thyristors ; conduction continue. Batterie en charge : f.é.m. E_b, résistance interne $R_b = 0{,}05\,\Omega$.
- MOSFET : $R_{DS(on)} = 3\,\text{m}\Omega$; $E_{on} + E_{off} = 0{,}2\,\text{mJ}$ par période ; $R_{thJC} = 0{,}5\,\text{K/W}$, $R_{thCS} = 0{,}2\,\text{K/W}$. Diode : $V_{seuil} = 0{,}8\,\text{V}$. T_1 et D_2 sont montés sur un même dissipateur ; $T_a = 35\,^\circ\text{C}$; on impose $T_j \leq 125\,^\circ\text{C}$.
- Formules utiles : $P_{cond} = R_{DS(on)}\, I_{T,eff}^2$ avec $I_{T,eff} = \sqrt{\alpha}\,\langle i\rangle$; $P_{com} = (E_{on} + E_{off})\, f$; diode : $P_D = V_{seuil}\,\langle i_D\rangle$; loi thermique $T_j - T_a = P\,(R_{thJC} + R_{thCS} + R_{thSA})$.



Partie A – Traction en palier

Le chariot roule à $v = 1{,}5\,\text{m/s}$; le moteur absorbe $\langle i\rangle = 50\,\text{A}$. On commande T_1 avec le rapport cyclique α ; T_2 reste ouvert.

A.1. Quels composants conduisent pendant αT, puis pendant $(1-\alpha)T$? Exprimer $\langle u\rangle$ en fonction de α et E.

A.2. Calculer Ω, E', $\langle u\rangle$ puis α.

A.3. Calculer l'ondulation ΔI du courant. Représenter $u(t)$ et $i(t)$ sur deux périodes.

A.4. Calculer la puissance fournie par la batterie.

Partie B – Freinage dans la rampe

Dans la descente, le chariot roule à 1,2 m/s et l'on veut un courant $\langle i \rangle = -30$ A pour le retenir. On commande T_2 avec le rapport cyclique α_2 ; T_1 reste ouvert.

B.1. Quels composants conduisent pendant $\alpha_2 T$, puis pendant $(1-\alpha_2)T$? Montrer que $\langle u \rangle = (1-\alpha_2)\,E$.

B.2. Calculer E', $\langle u \rangle$ et α_2.

B.3. Calculer la puissance renvoyée à la batterie. Dans quel quadrant le hacheur fonctionne-t-il ? Quel est l'intérêt de ce freinage ?

Partie C – Le chargeur

C.1. En début de charge, $E_b = 50$ V et le courant de charge vaut 40 A. Calculer la tension moyenne à appliquer, puis l'angle α des thyristors.

C.2. En fin de charge, $E_b = 56$ V et le courant est réduit à 10 A. Calculer le nouvel angle α.

Partie D – Refroidissement du hacheur

On étudie le régime de traction de la partie A ; le courant est assimilé à sa valeur moyenne.

D.1. Calculer le courant efficace dans T_1, ses pertes en conduction et par commutation.

D.2. Calculer les pertes de la diode D_2.

D.3. Calculer la résistance thermique maximale du dissipateur commun à T_1 et D_2 (on vérifie la jonction de T_1).

→ corrigé p. 303

Corrigés

✓ Corrigé de l'exercice 8.1 – Audit énergétique d'une biscuiterie

1. a) **Hacheur** : continu (batterie) → continu réglable. b) **Gradateur** : alternatif 50 Hz → alternatif 50 Hz de valeur efficace réglable. c) **Redresseur** : alternatif (réseau) → continu (batterie), souvent suivi d'un hacheur qui règle le courant de charge. d) **Onduleur** : continu (panneaux) → alternatif 230 V, 50 Hz. e) **Onduleur** : continu (bus du variateur) → alternatif de fréquence réglable.

2. Redresseur non commandé : des **diodes** (aucune commande nécessaire). Hacheur 48 V à 40 kHz : un **MOSFET** (basse tension, fréquence élevée). Onduleur 30 kW sous 540 V : des **IGBT** (forte puissance, tension élevée, quelques kilohertz). Gradateur du four : des **thyristors** tête-bêche (commutation à 50 Hz, blocage naturel au passage par zéro du courant).

3. Le rhéostat supporte $48 - 24 = 24\,\text{V}$ sous $4\,\text{A}$:

$$R = \frac{24}{4} \quad \text{soit} \quad \boxed{R = 6\,\Omega} \qquad P_{rh} = 24 \times 4 = 96\,\text{W} \qquad \eta = \frac{24 \times 4}{48 \times 4} = \boxed{\eta = 50\,\%}$$

La moitié de l'énergie prélevée sur la source est perdue en chaleur dans le rhéostat.

4. $\langle u \rangle = \alpha\, E$ donne $\alpha = 24/48$, soit $\boxed{\alpha = 0{,}5}$. Le ventilateur reçoit toujours $96\,\text{W}$:

$$\eta = \frac{96}{96 + 3} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 0{,}97}$$

Les pertes passent de $96\,\text{W}$ à $3\,\text{W}$: le hacheur est 32 fois moins dissipatif que le rhéostat.

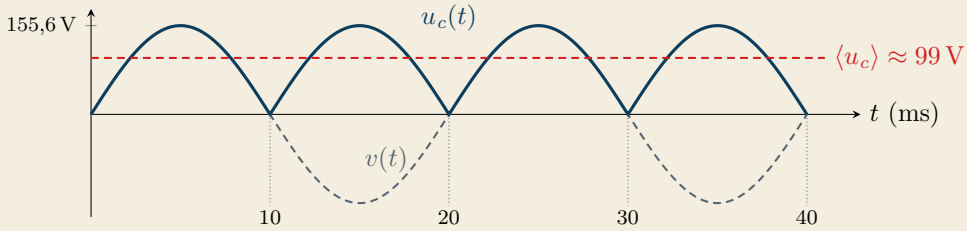
5. Fermé, sa tension est nulle ; ouvert, son courant est nul : dans les deux cas, $p = v\,i = 0$.

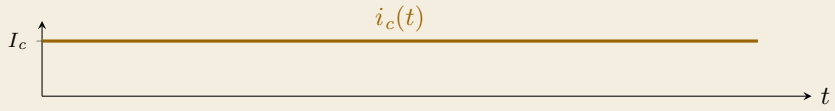
✓ Corrigé de l'exercice 8.2 – Alimentation d'un séparateur magnétique

1. $V_{max} = V\sqrt{2} = 110\sqrt{2}$ soit $\boxed{V_{max} \approx 155{,}6\,\text{V}}$

2. Alternance positive ($v > 0$) : D_1 et D_3 conduisent, $\boxed{u_c = v}$. Alternance négative ($v < 0$) : D_2 et D_4 conduisent, $\boxed{u_c = -v}$. Ainsi $u_c(t) = |v(t)|$.

3. La période du réseau vaut $T = 20\,\text{ms}$; le courant est constant (inductance élevée).





u_c reproduit une calotte de sinusoïde toutes les $10\,\text{ms}$: $\boxed{f_{u_c} = 2f = 100\,\text{Hz}}$

4. $\langle u_c \rangle = \dfrac{2\,V_{max}}{\pi} = \dfrac{2 \times 155{,}6}{\pi}$ soit $\boxed{\langle u_c \rangle \approx 99{,}0\,\text{V}}$

En régime établi, la tension moyenne aux bornes de l'inductance est nulle : $\langle u_c \rangle = R\,I_c$, d'où

$$I_c = \frac{99{,}0}{4{,}5} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_c \approx 22{,}0\,\text{A}}$$

5. Le courant est constant : $P = \langle u_c \rangle \times I_c = 99{,}0 \times 22{,}0$ soit $\boxed{P \approx 2{,}18\,\text{kW}}$ (on retrouve $R\,I_c^2 = 4{,}5 \times 22^2$: toute la puissance est dissipée par effet Joule dans la bobine).

6. Chaque diode conduit I_c pendant une demi-période : $\langle i_D \rangle = \dfrac{I_c}{2} \approx 11{,}0\,\text{A}$. Une diode bloquée supporte au maximum $V_{max} \approx 156\,\text{V}$; avec le coefficient de sécurité, il faut $2 \times 155{,}6 \approx 311\,\text{V}$: on choisit des diodes $\boxed{15\,\text{A},\ 400\,\text{V}}$

7. Deux diodes en série sur le trajet du courant : $P_D = 2\,V_{seuil}\,I_c = 2 \times 0{,}9 \times 22$ soit $\boxed{P_D \approx 39{,}6\,\text{W}}$

$$\eta = \frac{2180}{2180 + 39{,}6} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 0{,}982}$$

8. Le courant est constant : sa valeur moyenne et sa valeur efficace sont égales ($\approx 22\,\text{A}$). La tension u_c, elle, varie entre 0 et V_{max} : $\langle u_c \rangle \approx 99\,\text{V}$ (DC) mais $U_{c,eff} = V = 110\,\text{V}$ (TRMS, AC+DC).

✓ Corrigé de l'exercice 8.3 – Variation de vitesse d'un transpalette électrique

1. Le niveau haut est à 4,8 divisions du zéro : $E = 4{,}8 \times 5$, soit $\boxed{E = 24\,\text{V}}$. Une période occupe 5 divisions : $T = 5 \times 10 = 50\,\mu\text{s}$ et

$$f = \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \quad \text{soit} \quad \boxed{f = 20\,\text{kHz}}$$

2. $u = E$ pendant 3 divisions : $t_f = 30\,\mu\text{s}$, $\alpha = \dfrac{30}{50}$, soit $\boxed{\alpha = 0{,}6}$ et $\langle u \rangle = \alpha\,E = 0{,}6 \times 24$, soit $\boxed{\langle u \rangle = 14{,}4\,\text{V}}$

3. $U_{eff} = \sqrt{\alpha}\,E = \sqrt{0{,}6} \times 24$ soit $\boxed{U_{eff} \approx 18{,}6\,\text{V}}$

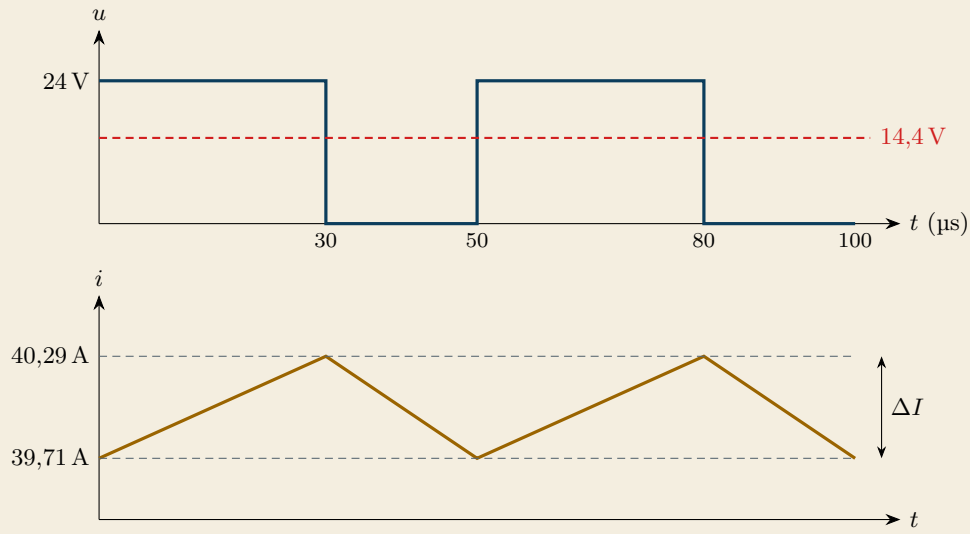
$\langle u \rangle$: voltmètre en position DC. U_{eff} : voltmètre TRMS en position AC+DC (un appareil non TRMS donnerait une valeur fausse sur ce signal non sinusoïdal).

4. $\langle u \rangle = E' + R\,\langle i \rangle$ d'où $E' = 14{,}4 - 0{,}12 \times 40$, soit $\boxed{E' = 9{,}6\,\text{V}}$

$$\Omega = \frac{E'}{k} = \frac{9{,}6}{0{,}10} = 96\,\text{rad/s} \qquad N = \frac{60\,\Omega}{2\pi} \quad \text{soit} \quad \boxed{N \approx 917\,\text{tr/min}}$$

5. $\Delta I = \dfrac{\alpha\,(1-\alpha)\,E}{L\,f} = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}4 \times 24}{0{,}5 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{3}}$ soit $\boxed{\Delta I \approx 0{,}58\,\text{A}}$

Le courant oscille autour de sa valeur moyenne : $I_{max} = 40 + \dfrac{0{,}58}{2} \approx 40{,}29\,\text{A}$ et $I_{min} \approx 39{,}71\,\text{A}$.



L'axe du courant ne part pas de zéro : l'ondulation (0,58 A) est très faible devant la valeur moyenne (40 A).

6. ΔI est maximale pour $\alpha = 0{,}5$: $\Delta I_{max} = \dfrac{E}{4\,L\,f} = \dfrac{24}{4 \times 0{,}5 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{3}}$ soit

$\boxed{\Delta I_{max} = 0{,}6\,\text{A}}$

7. À l'arrêt, $E' = 0$: $\langle u \rangle = R\,\langle i \rangle$. Pour $\langle i \rangle \leq 60\,\text{A}$, il faut $\alpha\,E \leq R \times 60$:

$$\alpha_{max} = \frac{0{,}12 \times 60}{24} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha_{max} = 0{,}3}$$

Le démarrage se fait donc en augmentant progressivement α à mesure que le moteur prend de la vitesse.

8. Dans le hacheur série, le transistor et la diode ne laissent passer le courant que dans un sens : $\langle i \rangle \geq 0$ et $\langle u \rangle \geq 0$, donc la puissance $\langle u \rangle\,\langle i \rangle$ va toujours de la batterie vers le moteur. Pour freiner en récupérant l'énergie, le courant doit s'inverser : il faut un **hacheur réversible en courant** (deux transistors et deux diodes), qui fonctionne alors dans le **quadrant 2** ($\langle u \rangle > 0$, $\langle i \rangle < 0$).

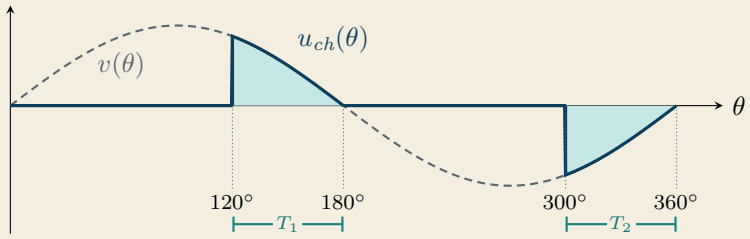
Méthode : exploiter l'oscillogramme d'un hacheur. Lire E (niveau haut, compté depuis le repère du zéro), puis T et αT sur l'axe des temps, en divisions multipliées par les calibres. En déduire $f = \frac{1}{T}$, α et $\langle u \rangle = \alpha E$; côté moteur, écrire $\langle u \rangle = E' + R\,\langle i \rangle$ avant tout calcul de vitesse. Une voie en couplage AC ne donne que l'ondulation ΔI, jamais la valeur moyenne.

✓ Corrigé de l'exercice 8.4 – Chauffage d'un bain de dégraissage

I- Commande par angle de phase

1. $R = \dfrac{V^2}{P_{max}} = \dfrac{230^2}{4600}$ soit $\boxed{R = 11{,}5\,\Omega}$ $\quad I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{230}{11{,}5}$ soit $\boxed{I = 20\,\text{A}}$

2. T_1 conduit de 120° à 180°, T_2 de 300° à 360° ; en dehors de ces intervalles, $u_{ch} = 0$.



3. $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$: $U_{ch} = 230\sqrt{1 - 0{,}5 + 0}$, soit $\boxed{U_{ch} \approx 163\,\text{V}}$ et $P = \dfrac{162{,}6^2}{11{,}5}$, soit $\boxed{P = 2{,}30\,\text{kW}}$

$\alpha = 120° = \frac{2\pi}{3}$: $\dfrac{\sin(2\alpha)}{2\pi} = \dfrac{-0{,}866}{2\pi} \approx -0{,}138$ et

$$U_{ch} = 230\sqrt{1 - 0{,}667 - 0{,}138} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{ch} \approx 102\,\text{V}}$$

$$P = \frac{101{,}7^2}{11{,}5} \quad \text{soit} \quad \boxed{P \approx 0{,}90\,\text{kW}}$$

Sur la courbe : $\frac{P}{P_{max}} = 0{,}50$ pour 90° et $\approx 0{,}20$ pour 120° ($\frac{900}{4600} \approx 0{,}196$) ✓.

4. $\dfrac{P}{P_{max}} = \dfrac{3{,}5}{4{,}6} \approx 0{,}76$; la courbe donne $\boxed{\alpha \approx 65°}$

5. Le courant de la charge, de valeur efficace $I = 20\,\text{A}$, est partagé : chaque thyristor conduit une alternance sur deux. Comme i^2 a la même valeur moyenne sur chaque alternance, $I_T^2 = \dfrac{I^2}{2}$:

$$I_T = \frac{20}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_T \approx 14{,}1\,\text{A}} \qquad V_{T,max} = V\sqrt{2} \approx 325\,\text{V}$$

II- Commande par train d'ondes

6. $\dfrac{T_c}{T} = \dfrac{2}{0{,}02}$, soit $\boxed{100 \text{ périodes}}$

7. $\dfrac{T_{on}}{T_c} = \dfrac{P}{P_{max}} = \dfrac{2{,}76}{4{,}6} = 0{,}6$ d'où $\boxed{T_{on} = 1{,}2\,\text{s}}$, soit **60 périodes** de conduction par cycle.

8. Les thyristors sont amorcés au passage par zéro de la tension : le courant reste sinusoïdal (pas d'harmoniques) et il n'y a plus de fronts raides de tension, sources de parasites. Le bain, de grande inertie thermique, ne « voit » pas les coupures de 0,8 s ; une lampe, au contraire, s'éteindrait et se rallumerait à chaque cycle (papillotement très visible).

✓ Corrigé de l'exercice 8.5 – Onduleur d'un relais de télécommunication

I- Commande pleine onde

1. $u = +E$: K_1 et K_3 commandés ; $u = -E$: K_2 et K_4 commandés. K_1 et K_4 appartiennent au même bras : fermés ensemble, ils court-circuiteraient la batterie, dont le courant (plusieurs milliers d'ampères) détruirait les transistors.

2. On regroupe les résultats dans un tableau :

Intervalle	u	signe de i	composants passants	$p = u\,i$
$[0\,;t_1]$	$+E$	$i<0$	D_1, D_3	$p<0$
$[t_1\,;\frac{T}{2}]$	$+E$	$i>0$	K_1, K_3	$p>0$
$[\frac{T}{2}\,;\frac{T}{2}+t_1]$	$-E$	$i>0$	D_2, D_4	$p<0$
$[\frac{T}{2}+t_1\,;T]$	$-E$	$i<0$	K_2, K_4	$p>0$

Quand $p>0$, la batterie fournit de l'énergie à la charge par les transistors. Quand $p<0$, la charge inductive restitue l'énergie magnétique stockée dans son inductance : le courant revient à la batterie par les diodes en antiparallèle.

3. Créneau $\pm E$: $\boxed{U_{eff} = E = 48\,\text{V}}$ $\quad U_{1\,eff} = \dfrac{4\times 48}{\pi\sqrt{2}}$ soit $\boxed{U_{1\,eff} \approx 43{,}2\,\text{V}}$

$U_{3\,eff} = \dfrac{U_{1\,eff}}{3} \approx 14{,}4\,\text{V}$; $\quad U_{5\,eff} = \dfrac{U_{1\,eff}}{5} \approx 8{,}64\,\text{V}$; $\quad U_{7\,eff} = \dfrac{U_{1\,eff}}{7} \approx 6{,}17\,\text{V}$.

4. $m_T = 230/43{,}2$ soit $\boxed{m_T \approx 5{,}32}$. L'harmonique 3 est multiplié par le même rapport ; au secondaire, $U'_{3\,eff} = 230/3 \approx 76{,}7\,\text{V}$, à 150 Hz. Les harmoniques augmentent les pertes fer (qui croissent avec la fréquence) et les pertes Joule : le transformateur chauffe.

II- Commande MLI

5. $U_{1\,max} = m\,E = 0{,}9\times 48$ soit $\boxed{U_{1\,max} = 43{,}2\,\text{V}}$ et $U_{1\,eff} = \dfrac{43{,}2}{\sqrt{2}} \approx 30{,}5\,\text{V}$.

Nouveau rapport : $m_T = \dfrac{230}{30{,}5} \approx 7{,}53$.

6. Les premiers harmoniques se situent autour de 16 kHz (et de ses multiples). L'impédance $L\omega$ est proportionnelle à la fréquence : elle est multipliée par $16\,000/50 = 320$. Les courants harmoniques deviennent négligeables : le courant est presque sinusoïdal et le transformateur ne subit plus d'échauffement anormal.

III- Autonomie

7. $P_{bat} = \dfrac{400}{0{,}93} \approx 430\,\text{W}$; $\langle i_{bat}\rangle = \dfrac{430}{48} \approx 8{,}96\,\text{A}$.

Énergie utilisable : $W = 0{,}8 \times 48 \times 600 = 23\,040\,\text{W}\cdot\text{h}$, d'où

$$\Delta t = \frac{23\,040}{430} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta t \approx 53{,}6\,\text{h}}$$

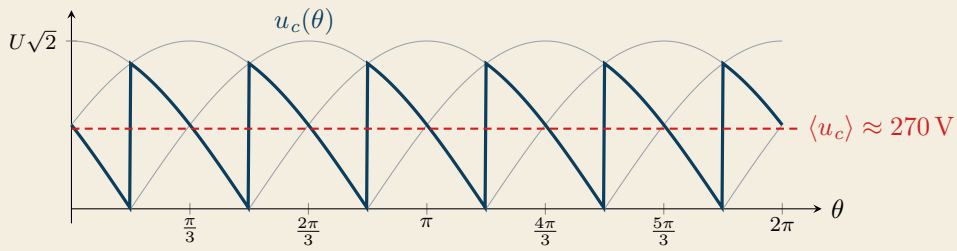
soit un peu plus de deux jours sans soleil.

✓ Corrigé de l'exercice 8.6 – Entraînement d'une extrudeuse

A- Le pont et le moteur

1. $\langle u_c\rangle = 1{,}35\,U\cos(\alpha)$ est maximale pour $\alpha = 0$: $\langle u_c\rangle_{max} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\pi} \times 400$ soit $\boxed{\langle u_c\rangle_{max} \approx 540\,\text{V}}$

2. Pour $\alpha = 60°$, chaque calotte de tension composée commence 60° après l'instant où elle serait devenue la plus grande :



On remarque que u_c décroît de $U\sqrt{2}\cos(30°)$ jusqu'à 0 sur chaque intervalle de 60° : pour $\alpha = 60°$, la tension redressée s'annule à la fin de chaque calotte (pour $\alpha > 60°$, elle présenterait des parties négatives).

3. $\Omega_n = \dfrac{2\pi \times 1500}{60} \approx 157{,}1\,\text{rad/s}$; $E' = k\,\Omega_n = 2{,}7 \times 157{,}1 \approx 424{,}1\,\text{V}$;

$$\langle u_c\rangle = E' + R\,I_n = 424{,}1 + 0{,}15 \times 120 \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle u_c\rangle \approx 442{,}1\,\text{V}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{442{,}1}{540{,}2} \approx 0{,}818 \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha \approx 35{,}1°}$$

4. $P = \langle u_c\rangle\, I_n = 442{,}1 \times 120$ soit $\boxed{P \approx 53{,}1\,\text{kW}}$

$P_j = R\,I_n^2 = 0{,}15 \times 120^2 = 2{,}16\,\text{kW}$; $P_{em} = E'\,I_n = 424{,}1 \times 120 \approx 50{,}9\,\text{kW}$ ($= P - P_j$ ✓).

5. À l'arrêt, $E' = 0$: $\langle u_c\rangle = R \times 1{,}5\,I_n = 0{,}15 \times 180 = 27\,\text{V}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{27}{540{,}2} \approx 0{,}050 \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha \approx 87{,}1°}$$

6. $\langle u_c \rangle = 540{,}2 \times \cos(60°) = 270{,}1\,\text{V}$; $E' = 270{,}1 - 18 = 252{,}1\,\text{V}$; $\Omega = 252{,}1/2{,}7 \approx 93{,}4\,\text{rad/s}$ soit $\boxed{N \approx 892\,\text{tr/min}}$

B- Facteur de puissance

7. $I_L = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 120 \approx 98{,}0\,\text{A}$; $S = \sqrt{3}\,U\,I_L = \sqrt{3} \times 400 \times 98{,}0 \approx 67{,}9\,\text{kVA}$.

Thyristors parfaits : le pont transmet intégralement $P = 53{,}1\,\text{kW}$, d'où

$$f_p = \frac{P}{S} = \frac{53{,}1}{67{,}9} \quad \text{soit} \quad \boxed{f_p \approx 0{,}78}$$

8. $f_p = \dfrac{\langle u_c \rangle\, I_c}{\sqrt{3}\,U\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,I_c} = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{\pi}\,U\cos(\alpha)}{\sqrt{2}\,U}$, soit $\boxed{f_p = \dfrac{3}{\pi}\cos(\alpha) \approx 0{,}955\cos(\alpha)}$

À basse vitesse, α se rapproche de 90° et f_p chute (0,48 pour $\alpha = 60°$). La remarque de l'audit est fondée : un pont à thyristors consomme d'autant plus de puissance réactive que la vitesse est faible. Remèdes : batterie de condensateurs (avec filtre anti-harmoniques), ou variateur moderne à pont de diodes suivi d'un hacheur ($f_p \approx 0{,}95$ à toutes les vitesses).

C- Pertes et refroidissement

9. Chaque thyristor conduit I_c pendant un tiers de période :

$$\langle i_T \rangle = \frac{120}{3} = 40\,\text{A} \qquad I_{T,eff} = \sqrt{\frac{I_c^2}{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} \approx 69{,}3\,\text{A}$$

$$P_T = V_{seuil}\,\langle i_T \rangle + r_d\,I_{T,eff}^2 = 1 \times 40 + 0{,}004 \times 4800 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_T = 59{,}2\,\text{W}}$$

Pour les six thyristors : $\boxed{P_{tot} \approx 355\,\text{W}}$

10. On écrit la loi thermique étape par étape, depuis la jonction (chaque thyristor dissipe 59,2 W ; le dissipateur reçoit 355 W) :

$$T_{S,max} = T_{j,max} - P_T\,(R_{thJC} + R_{thCS}) = 125 - 59{,}2 \times 0{,}30 \approx 107{,}2\,°\text{C}$$

$$R_{thSA} \le \frac{T_{S,max} - T_a}{P_{tot}} = \frac{107{,}2 - 40}{355} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{thSA} \le 0{,}19\,\text{K/W}}$$

11. Avec 0,15 K/W : $T_S = 40 + 355 \times 0{,}15 \approx 93{,}3\,°\text{C}$ et $T_j = 93{,}3 + 59{,}2 \times 0{,}30$, soit $\boxed{T_j \approx 111\,°\text{C}}$: correct.

Sans ventilation : $T_S = 40 + 355 \times 0{,}45 \approx 200\,°\text{C}$ et $T_j \approx 218\,°\text{C} \gg 125\,°\text{C}$: les thyristors seraient détruits. Le ventilateur est un organe de sécurité : il faut surveiller son fonctionnement (thermostat sur le dissipateur, qui arrête le variateur en cas de surchauffe).

Méthode : choisir un dissipateur commun. Partir de $T_{j,max}$, retrancher la chute de température dans un composant ($P_{composant} \times (R_{thJC} + R_{thCS})$) pour obtenir $T_{S,max}$, puis diviser l'écart $T_{S,max} - T_a$ par la **puissance totale** reçue par le dissipateur.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 8.A – Variateur de vitesse d'une pompe de relevage

Partie A – Structure du variateur

A.1. Convertisseur 1 : **redresseur** PD3 à diodes, alternatif triphasé → continu. Convertisseur 2 : **onduleur** MLI triphasé, continu → alternatif de fréquence et de tension réglables. Le condensateur C lisse la tension du bus continu et fournit les pointes de courant découpé appelées par l'onduleur.

A.2. La tension du bus n'a pas besoin d'être réglée : des diodes, qui commutent spontanément à 50 Hz, suffisent. L'onduleur doit au contraire ouvrir et fermer ses interrupteurs sur commande, des milliers de fois par seconde : il lui faut des transistors (IGBT pour cette puissance et cette tension).

Partie B – Le redresseur

B.1. $E = \dfrac{3\sqrt{2}}{\pi} U = 1{,}35 \times 400$ soit $\boxed{E \approx 540\,\text{V}}$; l'ondulation est à $6f = 300\,\text{Hz}$.

B.2. $P_m = \dfrac{P_{u,n}}{\eta_m} = \dfrac{30}{0{,}93} \approx 32{,}3\,\text{kW}$; $P_{bus} = \dfrac{P_m}{\eta_o} = \dfrac{32{,}26}{0{,}98} \approx 32{,}9\,\text{kW}$.

$$I_c = \frac{P_{bus}}{E} = \frac{32\,916}{540{,}2} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_c \approx 60{,}9\,\text{A}}$$

B.3. $\langle i_D \rangle = \dfrac{I_c}{3} \approx 20{,}3\,\text{A}$; tension inverse maximale : $U\sqrt{2} = 400\sqrt{2} \approx 566\,\text{V}$. La classe 600 V n'offre aucune marge : on choisit $\boxed{1\,200\,\text{V}}$ (marge d'environ 2, indispensable face aux surtensions du réseau).

B.4. $P_D = 2\,V_{seuil}\,I_c = 2 \times 1 \times 60{,}9 \approx 122\,\text{W}$ et $\eta_r = \dfrac{32\,916}{32\,916 + 122}$ soit $\boxed{\eta_r \approx 0{,}996}$

Partie C – Commande à U/f constant

C.1. $N = 0{,}8 \times 1475 = 1\,180\,\text{tr/min}$; $N_s = N + 25 = 1\,205\,\text{tr/min}$;

$$f = \frac{p\,N_s}{60} = \frac{2 \times 1205}{60} \quad \text{soit} \quad \boxed{f \approx 40{,}2\,\text{Hz}}$$

$$U = 8 \times 40{,}17 \quad \text{soit} \quad \boxed{U \approx 321\,\text{V}}$$

C.2. Le flux dans le moteur est proportionnel à U/f. En le gardant constant, on conserve le couple maximal à toutes les vitesses, sans saturer le circuit magnétique aux basses fréquences. Avec $U = 400\,\text{V}$ à $40\,\text{Hz}$, le flux augmenterait de $25\,\%$: le circuit magnétique saturerait, le courant magnétisant et l'échauffement du moteur deviendraient excessifs.

Partie D – Pertes et refroidissement de l'onduleur

D.1. $P_{com} = (E_{on} + E_{off})\,f_{dec} = 7{,}5 \times 10^{-3} \times 4000 = 30\,\text{W}$; $P_{IGBT} = 42 + 30 = 72\,\text{W}$;

$P_{mod} = 6 \times 72 + 6 \times 18$ soit $\boxed{P_{mod} = 540\,\text{W}}$ $\eta_o = \dfrac{32\,258}{32\,258 + 540} \approx 0{,}984$

ce qui confirme la valeur de 0,98 annoncée.

D.2. $T_{C,max} = 125 - 72 \times 0{,}22 \approx 109{,}2\,^\circ\text{C}$; $T_{S,max} = 109{,}2 - 540 \times 0{,}02 \approx 98{,}4\,^\circ\text{C}$;

$$R_{thSA} \leq \frac{98{,}4 - 45}{540} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{thSA} \leq 0{,}099\,\text{K/W}}$$

Avec $0{,}09\,\text{K/W}$: $T_S = 45 + 540 \times 0{,}09 = 93{,}6\,^\circ\text{C}$, $T_C = 93{,}6 + 540 \times 0{,}02 = 104{,}4\,^\circ\text{C}$ et $\boxed{T_j = 104{,}4 + 72 \times 0{,}22 \approx 120\,^\circ\text{C}}$: correct.

D.3. À $8\,\text{kHz}$: $P_{com} = 60\,\text{W}$, $P_{IGBT} = 102\,\text{W}$ et $P_{mod} = 6 \times 102 + 108 = 720\,\text{W}$.

$T_S = 45 + 720 \times 0{,}09 = 109{,}8\,^\circ\text{C}$; $T_C = 124{,}2\,^\circ\text{C}$; $\boxed{T_j \approx 147\,^\circ\text{C} > 125\,^\circ\text{C}}$

Doubler la fréquence de découpage est impossible sans changer de dissipateur ou réduire le courant (déclassement du variateur) : c'est le compromis entre bruit, ondulation et pertes par commutation.

Partie E – Bilan énergétique

E.1. Avec la vanne : $P_a = \dfrac{27}{0{,}93} \approx 29{,}0\,\text{kW}$. Avec le variateur : $P_u = 30 \times 0{,}8^3 = 15{,}36\,\text{kW}$ et

$$P'_a = \frac{15{,}36}{0{,}93 \times 0{,}98} \quad \text{soit} \quad \boxed{P'_a \approx 16{,}9\,\text{kW}}$$

E.2. Économie de puissance : $29{,}0 - 16{,}9 \approx 12{,}2\,\text{kW}$, pendant $16 \times 365 = 5\,840\,\text{h}$ par an :

$$\Delta W \approx 12{,}18 \times 5840 \approx 71\,100\,\text{kW} \cdot \text{h} \quad \text{soit} \quad \boxed{\approx 10\,700\ \text{€ par an}}$$

Temps de retour : $\dfrac{6000}{10\,700} \approx 0{,}56$ an, soit environ $\boxed{7\ \text{mois}}$

Conclusion : le variateur est correctement dimensionné (diodes 1 200 V, dissipateur de 0,09 K/W à 4 kHz). En remplaçant la vanne de laminage par une réduction de vitesse, il réduit d'environ 40 % la puissance absorbée aux heures creuses et économise environ 71 MW · h par an. La fréquence de découpage doit rester à 4 kHz, sauf à surdimensionner le refroidissement.

✓ Corrigé du sujet BTS 8.B – Motorisation d'un chariot filoguidé

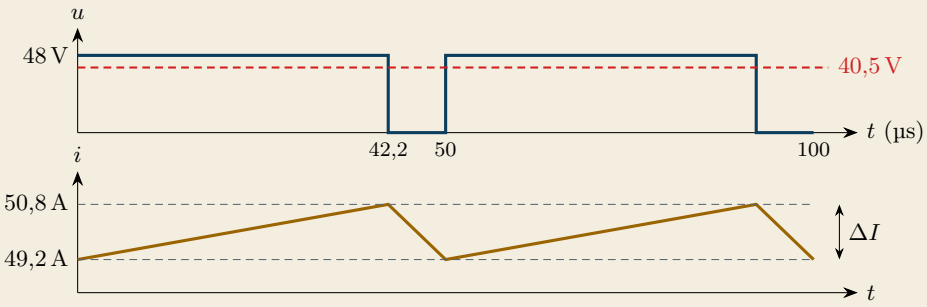
Partie A – Traction en palier

A.1. Pendant αT : T_1 conduit, $u = E$. Pendant $(1-\alpha)T$: le courant, positif, continue par la diode de roue libre D_2, $u = 0$. D'où $\langle u \rangle = \dfrac{E\,\alpha T}{T}$, soit $\boxed{\langle u \rangle = \alpha\, E}$

A.2. $\Omega = \dfrac{1{,}5}{0{,}012} = 125\,\text{rad/s}$; $E' = 0{,}30 \times 125 = 37{,}5\,\text{V}$; $\langle u \rangle = E' + R\,\langle i \rangle = 37{,}5 + 0{,}06 \times 50 = 40{,}5\,\text{V}$;

$$\alpha = \frac{40{,}5}{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha \approx 0{,}844}$$

A.3. $\Delta I = \dfrac{\alpha\,(1-\alpha)\,E}{L\,f} = \dfrac{0{,}844 \times 0{,}156 \times 48}{0{,}2 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{3}}$ soit $\boxed{\Delta I \approx 1{,}58\,\text{A}}$
($T = 50\,\mu\text{s}$, $\alpha T \approx 42{,}2\,\mu\text{s}$).



A.4. Le courant étant quasi constant : $P = \langle u \rangle\,\langle i \rangle = 40{,}5 \times 50$ soit $\boxed{P \approx 2{,}03\,\text{kW}}$

Partie B – Freinage dans la rampe

B.1. Le courant est négatif. Pendant $\alpha_2 T$: T_2 conduit, $u = 0$. Pendant $(1-\alpha_2)T$: T_2 est ouvert, le courant ne peut passer que par D_1 et revient vers la batterie : $u = E$. Donc $\boxed{\langle u \rangle = (1-\alpha_2)\,E}$

B.2. $\Omega = \dfrac{1{,}2}{0{,}012} = 100\,\text{rad/s}$; $E' = 0{,}30 \times 100 = 30\,\text{V}$; $\langle u \rangle = 30 + 0{,}06 \times (-30) = 28{,}2\,\text{V}$;

$$\alpha_2 = 1 - \frac{28{,}2}{48} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha_2 \approx 0{,}41}$$

B.3. $P = \langle u \rangle \langle i \rangle = 28{,}2 \times (-30) = -846\,\text{W}$: 846 W renvoyés à la batterie

Le hacheur fonctionne dans le **quadrant 2** ($\langle u \rangle > 0$, $\langle i \rangle < 0$). Intérêt : autonomie accrue, freins moins sollicités.

Partie C – Le chargeur

C.1. $\langle u_c \rangle = E_b + R_b\, I = 50 + 0{,}05 \times 40 = 52\,\text{V}$; $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \times 70 \approx 63{,}0\,\text{V}$;

$$\cos(\alpha) = \frac{52}{63{,}0} \approx 0{,}825 \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha \approx 34{,}4^\circ}$$

C.2. $\langle u_c \rangle = 56 + 0{,}05 \times 10 = 56{,}5\,\text{V}$; $\cos(\alpha) = \dfrac{56{,}5}{63{,}0} \approx 0{,}897$ soit $\boxed{\alpha \approx 26{,}3^\circ}$

Partie D – Refroidissement du hacheur

D.1. T_1 conduit 50 A pendant αT : $I_{T,eff} = \sqrt{\alpha} \times 50 \approx 45{,}9\,\text{A}$.

$$P_{cond} = R_{DS(on)}\, I_{T,eff}^2 = 0{,}003 \times 45{,}9^2 \approx 6{,}33\,\text{W}$$

$$P_{com} = 0{,}2 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^3 = 4\,\text{W} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_{T1} \approx 10{,}3\,\text{W}}$$

D.2. D_2 conduit 50 A pendant $(1-\alpha)T$: $P_{D2} = V_{seuil} \langle i_D \rangle = 0{,}8 \times 0{,}156 \times 50$ soit $\boxed{P_{D2} \approx 6{,}25\,\text{W}}$

D.3. $T_{S,max} = 125 - 10{,}3 \times (0{,}5 + 0{,}2) \approx 117{,}8\,^\circ\text{C}$; le dissipateur reçoit $10{,}3 + 6{,}25 \approx 16{,}6\,\text{W}$:

$$R_{thSA} \leq \frac{117{,}8 - 35}{16{,}6} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{thSA} \leq 5{,}0\,\text{K/W}}$$

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ choisir le convertisseur et l'interrupteur adaptés à un besoin ; — ex. 8.1, sujet A
- ☐ étudier un pont redresseur PD2 ou PD3, commandé ou non ; — ex. 8.2, 8.6
- ☐ exploiter les chronogrammes d'un hacheur, d'un onduleur, d'un gradateur ; — ex. 8.3 à 8.5
- ☐ évaluer les pertes d'un convertisseur et choisir un dissipateur. — ex. 8.6, sujet B

CHAPITRE

9

Mécanique des fluides

Statique, écoulements, Bernoulli, pompes et turbines

Dans ce chapitre

- Masse volumique et pression
- Statique des fluides, théorème de Pascal
- Débits et conservation du débit
- Relation de Bernoulli
- Viscosité, Reynolds, pertes de charge
- Pompes, turbines et éoliennes

Objectifs

- ✓ Calculer une pression en un point d'un liquide au repos
- ✓ Exploiter la conservation du débit dans une canalisation
- ✓ Appliquer la relation de Bernoulli, avec ou sans machine
- ✓ Dimensionner une pompe, évaluer la puissance d'une turbine

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 9

Cours — Chapitre 9

9.1 Fluides, masse volumique et pression

Qu'est-ce qu'un fluide ?

D

Définition Un **fluide** est formé de particules très petites, libres de se déplacer les unes par rapport aux autres : il n'a pas de forme propre et prend la forme du récipient qui le contient. Les **liquides** et les **gaz** sont des fluides.
Un fluide est **incompressible** si son volume ne varie pas quand on le comprime : c'est le cas, avec une très bonne approximation, des liquides (eau, huile). Les **gaz** sont **compressibles**.

Masse volumique

★

À retenir · Masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad m = \rho \times V$$

ρ en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; m en kg ; V en $\mathrm{m^3}$. Un fluide incompressible a une masse volumique constante.

Fluide (à 20 °C)	air	essence	fioul	huile hydraulique	eau	eau de mer
ρ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	1,20	750	840	870	1000	1030

Conversions utiles : $1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm^3} = 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$; $1\,\mathrm{cm^3} = 10^{-6}\,\mathrm{m^3}$; $\rho_{eau} = 1\,000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 1\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$.

Ex

Exemple : cuve de fioul d'un groupe électrogène La cuve journalière contient $V = 1\,200\,\mathrm{L} = 1{,}2\,\mathrm{m^3}$ de fioul ($\rho = 840\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) : $m = \rho V = 840 \times 1{,}2 = 1\,008\,\mathrm{kg}$, soit environ une tonne à prendre en compte pour la dalle qui la supporte.

Pression

D

Définition Un fluide exerce sur toute paroi une **force pressante** F_p, perpendiculaire à la paroi. La **pression** est cette force rapportée à la surface sur laquelle elle s'exerce.

À retenir · Pression

$$p = \frac{F_p}{S} \qquad F_p = p \times S$$

p en pascals (Pa) avec $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$; F_p en N ; S en m^2.
$1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$ $\quad$ $1\,\text{hPa} = 100\,\text{Pa}$ $\quad$ $1\,\text{atm} = 101\,325\,\text{Pa} \approx 1\,\text{bar}$

Ex **Exemple : vérin d'une presse** Un vérin de diamètre $D = 63\,\text{mm}$ est alimenté sous $p = 100\,\text{bar}$:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0{,}063^2}{4} \approx 3{,}12 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$F_p = p\,S = 100 \times 10^5 \times 3{,}12 \times 10^{-3} \approx 31{,}2\,\text{kN}$$

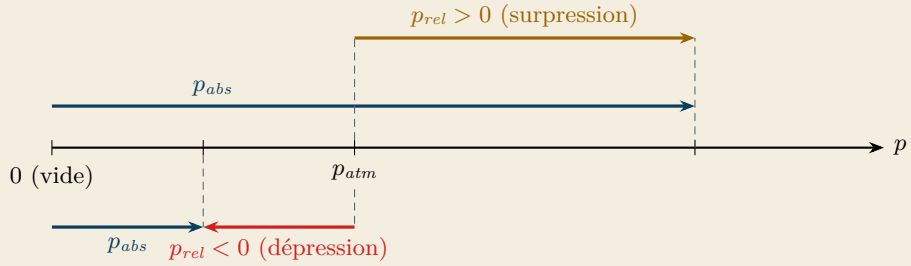
soit l'équivalent du poids d'une masse de plus de trois tonnes, avec un vérin pas plus gros qu'une canette.

Pression absolue et pression relative

À retenir

$$p_{abs} = p_{atm} + p_{rel} \qquad p_{atm} \approx 1\,013\,\text{hPa} \approx 1\,\text{bar}$$

La **pression absolue** est mesurée par rapport au vide : elle est toujours positive. La **pression relative** est mesurée par rapport à la pression atmosphérique : elle est positive en **surpression**, négative en **dépression**.

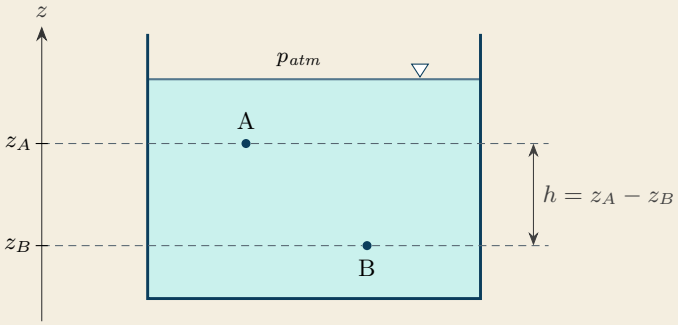


Piège classique La plupart des manomètres industriels affichent une pression **relative** : un pneu « gonflé à 2 bar » contient de l'air à $p_{abs} \approx 3\,\text{bar}$. De même, un vacuomètre qui affiche $-0{,}6\,\text{bar}$ signale une pression absolue d'environ 0,4 bar. Dans un calcul, ne jamais mélanger pressions absolues et relatives ; dans la relation de Bernoulli, on peut travailler en relatif à condition de le faire pour **tous** les points.

9.2 Statique des fluides

Principe fondamental de la statique des fluides

Dans un liquide au repos, la pression augmente avec la profondeur : chaque couche de liquide supporte le poids des couches situées au-dessus d'elle.



★ **À retenir · Principe fondamental de la statique des fluides** Pour deux points A et B d'un même fluide incompressible au repos :

$$p_A + \rho\, g\, z_A = p_B + \rho\, g\, z_B \quad \Longleftrightarrow \quad p_B - p_A = \rho\, g\, (z_A - z_B) = \rho\, g\, h$$

z : altitude (axe vertical **orienté vers le haut**), en m ; $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; h : profondeur de B sous A. Le terme $\rho\, g\, z$ est une énergie potentielle volumique ($\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$).

Conséquences :

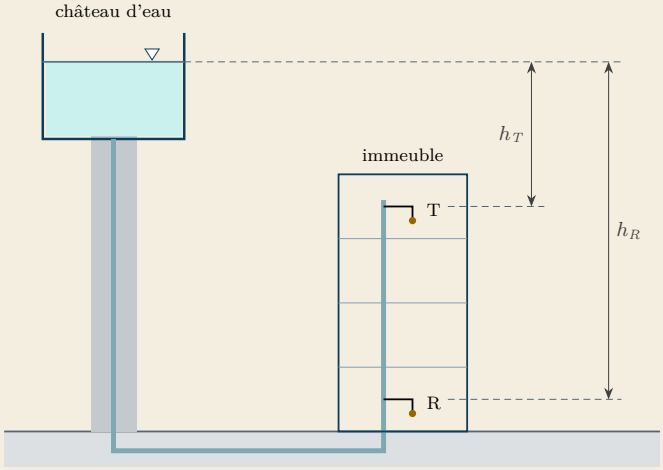
- ▷ la pression ne dépend que de la profondeur, pas de la forme du récipient ;
- ▷ deux points d'un même liquide à la **même altitude** ont la **même pression** : les surfaces de même pression (isobares) sont horizontales, et la surface libre d'un liquide au repos est plane et horizontale ;
- ▷ dans l'eau, la pression augmente d'environ 1 bar tous les 10 m de profondeur ($\rho\, g\, h = 1000 \times 9{,}81 \times 10 \approx 10^5$ Pa).

Ex **Exemple : fond d'une cuve de stockage** Une cuve à l'air libre contient 4 m d'eau. Au fond : $p_{rel} = \rho\, g\, h = 1000 \times 9{,}81 \times 4 = 39\,240$ Pa $\approx 0{,}39$ bar, soit $p_{abs} = 1{,}013 + 0{,}392 \approx 1{,}41$ bar. Un capteur de pression relative placé au fond donne donc directement la hauteur de liquide : c'est le principe des capteurs de niveau hydrostatiques.

✗ **Piège classique** Orienter l'axe z vers le bas, ou se tromper de signe : un point plus profond a une altitude plus **faible** et une pression plus **forte**. Contrôle de bon sens : on descend, la pression monte.

Application : le château d'eau

Le château d'eau est un réservoir placé en hauteur. Lorsque les robinets sont fermés, l'eau du réseau est au repos : la pression en un point du réseau ne dépend que de la différence d'altitude avec la surface libre du réservoir, quelle que soit la longueur des canalisations (principe des vases communicants).



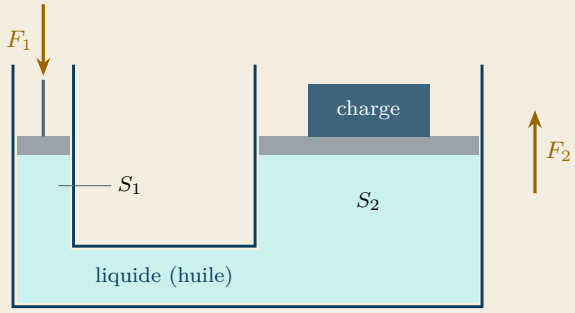
Au robinet R du rez-de-chaussée, la pression relative vaut $\rho\, g\, h_R$; au robinet T du dernier étage, elle n'est plus que $\rho\, g\, h_T$. Un réseau de distribution doit garantir au moins 1 bar au point le plus haut (pour faire fonctionner chauffe-eau et lave-linge) et ne pas dépasser environ 4 bar à 6 bar au point le plus bas (au-delà, on installe un réducteur de pression). Pour obtenir 1 bar, un robinet doit se trouver au moins $10^5/(1000 \times 9{,}81) \approx 10{,}2$ m sous la surface libre ; plus haut, il faut un **surpresseur** (pompe).

Transmission des pressions : théorème de Pascal

D

Théorème de Pascal Dans un liquide incompressible au repos, toute variation de pression imposée en un point est transmise intégralement en tout point du liquide.

C'est le principe des vérins, des presses et des ponts élévateurs : on exerce une petite force F_1 sur un petit piston de section S_1 ; le liquide transmet la pression à un grand piston de section S_2, qui exerce une grande force F_2.



★ **À retenir · Transmission de pression** Les deux pistons étant à la même altitude, ils subissent la même pression :

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \qquad \Longrightarrow \qquad F_2 = F_1 \times \frac{S_2}{S_1}$$

Ex **Exemple : pont élévateur de garage** Pour soulever une voiture de 1 800 kg avec un piston de sortie $S_2 = 800\,\text{cm}^2$ et un piston d'entrée $S_1 = 10\,\text{cm}^2$:

$$F_2 = m\,g = 1800 \times 9{,}81 \approx 17{,}7\,\text{kN} \qquad F_1 = F_2 \times \frac{S_1}{S_2} = 17\,658 \times \frac{10}{800} \approx 221\,\text{N}$$

La pression de l'huile vaut $p = \dfrac{F_2}{S_2} = \dfrac{17\,658}{0{,}08} \approx 2{,}2\,\text{bar}$.

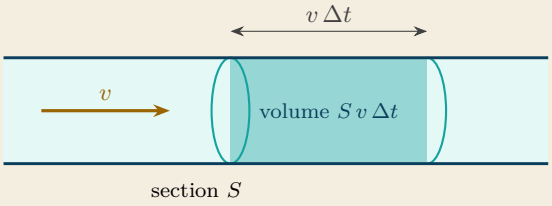
Ce gain en force n'est pas gratuit : le liquide étant incompressible, le volume chassé par le petit piston ($S_1\,d_1$) est égal au volume reçu par le grand ($S_2\,d_2$). Le petit piston doit donc parcourir une distance S_2/S_1 fois plus grande : le travail $F_1\,d_1 = F_2\,d_2$ est conservé (voir § 10.5).

9.3 Débits et conservation du débit

Débits volumique et massique

D **Définition** Le **débit volumique** Q_v est le volume de fluide qui traverse une section de la conduite par unité de temps ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$). Le **débit massique** Q_m est la masse qui la traverse par unité de temps ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$).

Pendant une durée Δt, le fluide qui traverse la section S à la vitesse moyenne v occupe un cylindre de longueur $v\,\Delta t$, donc de volume $S\,v\,\Delta t$:



★ **À retenir · Débits**

$$Q_v = S \times v \qquad Q_m = \rho \times Q_v \qquad S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Q_v en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; S en m^2 ; v : vitesse moyenne du fluide ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ; D : diamètre **intérieur** de la conduite (m).

Conversions : $1\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1} = (1/3600)\,\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; $1\,\text{L} \cdot \text{s}^{-1} = 3{,}6\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$; $1\,\text{L} \cdot \text{min}^{-1} = (10^{-3}/60)\,\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Ex

Exemple : pompe de transfert Une pompe débite $Q_v = 18\,\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$ d'eau dans une conduite de diamètre intérieur $D = 50\,\mathrm{mm}$:

$$Q_v = \frac{18}{3600} = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} \qquad S = \frac{\pi \times 0{,}05^2}{4} \approx 1{,}96 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2}$$

$$v = \frac{Q_v}{S} \approx 2{,}55\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

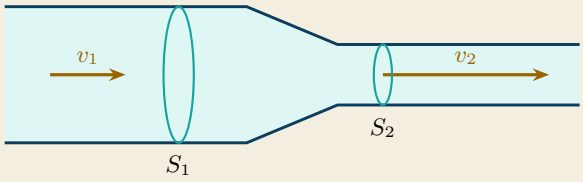
et $Q_m = 1000 \times 5 \times 10^{-3} = 5\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Dans les réseaux d'eau, on vise en général une vitesse comprise entre 0,5 et $2{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (au-delà : bruit, usure, pertes de charge élevées).

Conservation du débit

D

Définition Un écoulement est **stationnaire** (ou permanent) si la pression, la vitesse et la masse volumique en chaque point ne varient pas au cours du temps.

En régime stationnaire, il n'y a ni accumulation ni disparition de fluide dans la conduite : tout ce qui entre par une section ressort par l'autre.



★

À retenir · Conservation du débit Pour un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible :

$$Q_v = v_1\,S_1 = v_2\,S_2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_2 = v_1\,\frac{S_1}{S_2} = v_1\,\frac{D_1^2}{D_2^2}$$

Là où la conduite se rétrécit, le fluide accélère. Diviser le diamètre par 2 multiplie la vitesse par 4.

Ex

Exemple : lance d'incendie Une lance reçoit $Q_v = 500\,\mathrm{L \cdot min^{-1}} = 8{,}33 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$ par un tuyau de 70 mm et l'éjecte par un ajutage de 22 mm :

$$v_1 = \frac{Q_v}{S_1} \approx 2{,}17\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad v_2 = v_1 \times \frac{70^2}{22^2} \approx 21{,}9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Le jet sort à près de $80\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$: c'est ce qui lui permet d'atteindre le feu à distance.

✗

Piège classique Utiliser le rapport des diamètres au lieu du rapport des **sections** : la vitesse varie comme l'inverse du **carré** du diamètre. Autre erreur fréquente : oublier de convertir le débit en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$ et le diamètre en mètres.

En ligne : simulateurs de la statique (plongée, pont élévateur), de la conservation du débit et du tube de Venturi, calcul de HMT et de la puissance d'une pompe, courbe de puissance d'une éolienne.

9.4 Fluide parfait en mouvement : relation de Bernoulli

Trois formes d'énergie volumique

Un **fluide parfait** s'écoule sans frottement (viscosité nulle). Chaque mètre cube de fluide en mouvement possède trois formes d'énergie, toutes exprimées en $\mathrm{J \cdot m^{-3}}$, c'est-à-dire en pascals :

Terme	Énergie volumique	Ce qui la fait varier
p	de pression	pompe, compresseur, rétrécissement
$\rho\, g\, z$	potentielle de pesanteur	altitude du point
$\frac{1}{2}\,\rho\, v^2$	cinétique	vitesse du fluide

Relation de Bernoulli

À retenir · Relation de Bernoulli Pour deux points A et B d'une même ligne de courant :

$$p_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 = p_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\,\rho\, v_B^2$$

Validité : fluide parfait, incompressible, écoulement stationnaire, aucune machine (pompe, turbine) entre A et B.

C'est une **conservation de l'énergie** : ce que le fluide gagne en vitesse, il le perd en pression ou en altitude. Si le fluide est au repos ($v_A = v_B = 0$), on retrouve le principe fondamental de la statique. Dans une conduite horizontale, **là où la vitesse augmente, la pression diminue**.

La charge – hors programme En divisant par $\rho\, g$, chaque terme devient une hauteur (en mètres), appelée **charge** :

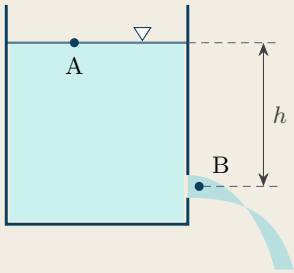
$$H = \frac{p}{\rho\, g} + z + \frac{v^2}{2\, g}$$

La relation de Bernoulli exprime alors que la charge se conserve le long de l'écoulement. C'est l'origine de la notion de hauteur manométrique d'une pompe.

Vidange d'un réservoir (formule de Torricelli) – hors programme

Un réservoir à l'air libre se vide par un orifice situé à une profondeur h sous la surface libre. Point A sur la surface libre : $p_A = p_{atm}$, $v_A \approx 0$ (grande surface). Point B dans le jet, à la sortie : $p_B = p_{atm}$. Bernoulli donne $\rho g z_A = \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$, d'où :

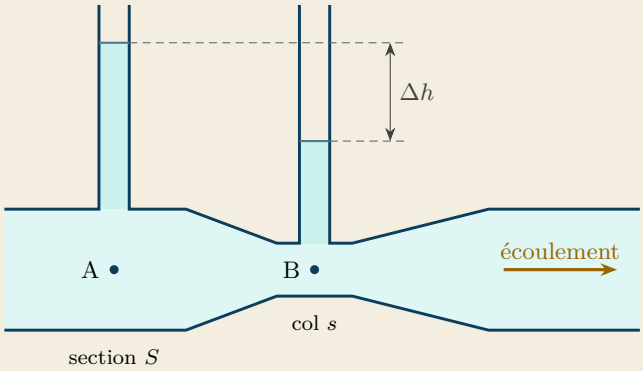
$$v_B = \sqrt{2\,g\,h}$$



Exemple : avec $h = 3{,}2\,\text{m}$: $v_B = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 3{,}2} \approx 7{,}9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, la vitesse qu'aurait un objet après une chute libre de 3,2 m.

Mesurer un débit : tube de Venturi et tube de Pitot

Le **tube de Venturi** est une conduite horizontale qui se rétrécit (section S au point A, col de section s au point B). Dans le col, le fluide accélère, donc sa pression baisse : on mesure la différence de pression $p_A - p_B$ (capteur différentiel ou tubes piézométriques) pour en déduire la vitesse, puis le débit.



À retenir · Tube de Venturi Bernoulli entre A et B (même altitude) et conservation du débit $v_B = v_A\,S/s$ donnent :

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\,\rho\,v_A^2\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) \quad \Longrightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2\,(p_A - p_B)}{\rho\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)}}$$

Exemple : débitmètre d'un circuit d'eau Conduite de 80 mm, col de 40 mm, débit $Q_v = 6\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$: $v_A \approx 1{,}194\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $S^2/s^2 = (80/40)^4 = 16$, d'où

$$p_A - p_B = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1{,}194^2 \times (16 - 1) \approx 10{,}7\,\text{kPa}$$

Le **tube de Pitot** mesure la vitesse locale : une prise de pression fait face à l'écoulement (le fluide y est arrêté, $v = 0$, pression totale p_B), une autre est sur le côté (pression statique p_A). Bernoulli donne $v_A = \sqrt{2\,(p_B - p_A)/\rho}$. C'est l'instrument qui donne la vitesse des avions.

Méthode : appliquer la relation de Bernoulli.

1. Choisir deux points A et B où l'on connaît le plus de grandeurs (surface libre : $p = p_{atm}$ et $v \approx 0$; sortie à l'air libre : $p = p_{atm}$).
2. Vérifier les conditions de validité (pas de machine entre A et B, pertes négligées).
3. Exprimer les vitesses avec la conservation du débit ; choisir l'origine des altitudes.
4. Simplifier les termes égaux des deux côtés, puis isoler l'inconnue.

9.5 Fluide réel : viscosité, régimes d'écoulement, pertes de charge

Viscosité

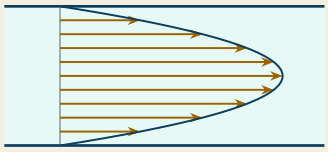
Définition La **viscosité** traduit la résistance d'un fluide à l'écoulement, due aux frottements internes entre ses couches : le miel est plus visqueux que l'eau. On la caractérise par la **viscosité dynamique** η (en Pa · s) ou par la **viscosité cinématique** $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ (en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$).

Fluide (vers 20 °C)	eau	huile hydraulique	air
η (Pa · s)	$1{,}0 \times 10^{-3}$	4×10^{-2}	$1{,}8 \times 10^{-5}$
ν ($\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)	$1{,}0 \times 10^{-6}$	$4{,}6 \times 10^{-5}$	$1{,}5 \times 10^{-5}$

La viscosité des liquides diminue fortement quand la température augmente (une huile froide est « épaisse ») ; celle des gaz augmente légèrement. Dans ce chapitre, la lettre η sans indice désigne toujours la viscosité ; les rendements portent un indice (η_p, η_t, η_m…).

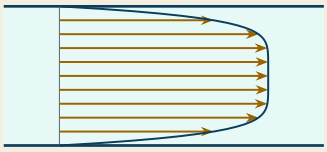
Nombre de Reynolds et régimes d'écoulement

Régime laminaire



filets parallèles, profil parabolique

Régime turbulent



tourbillons, profil presque plat

À retenir · Nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{\rho\, v\, D}{\eta} = \frac{v\, D}{\nu} \qquad \text{(sans unité)}$$

v : vitesse moyenne ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) ; D : diamètre de la conduite (m). $R_e < 2000$: régime **laminaire** ; $2000 < R_e < 3000$: régime transitoire ; $R_e > 3000$: régime **turbulent**.

Ex

Exemple Eau dans la conduite de 50 mm de la pompe de transfert ($v = 2{,}55\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) :

$$R_e = \frac{1000 \times 2{,}55 \times 0{,}05}{1{,}0 \times 10^{-3}} \approx 127\,000$$

régime turbulent, comme presque toujours pour l'eau dans l'industrie.
Huile hydraulique ($\nu = 4{,}6 \times 10^{-5}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$) à $1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans un flexible de 16 mm :

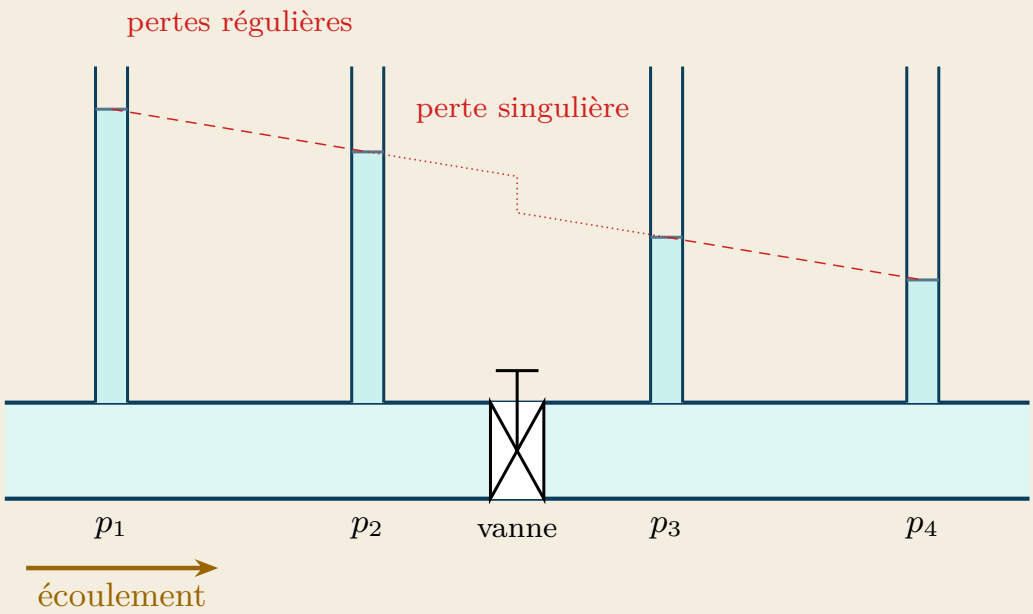
$$R_e = \frac{1{,}5 \times 0{,}016}{4{,}6 \times 10^{-5}} \approx 522 \quad \text{: régime laminaire.}$$

Pertes de charge

D

Définition Dans un fluide réel, les frottements dissipent de l'énergie en chaleur : la charge diminue le long de l'écoulement. Cette perte d'énergie volumique Δp_{pertes} (en Pa) est appelée **perte de charge**. On distingue :

- ▷ les pertes de charge **régulières**, dues au frottement sur les parois tout le long des parties droites : elles augmentent avec la longueur de la conduite et la vitesse, et diminuent quand le diamètre augmente ;
- ▷ les pertes de charge **singulières**, localisées au niveau des « accidents » de parcours : coudes, vannes, filtres, clapets, rétrécissements, élargissements.



Dans une conduite horizontale de section constante, la vitesse ne change pas : la baisse de pression mesurée par les tubes piézométriques est entièrement due aux pertes de charge ($p_1 > p_2 > p_3 > p_4$).

À retenir · Pertes de charge

$$\Delta p_{pertes} = \Delta p_{reg} + \Delta p_{sing} \qquad H_{pertes} = \frac{\Delta p_{pertes}}{\rho\, g} \ \text{(en m)}$$

Calcul des pertes régulières et loi en Q_v^2 – hors programme Pertes régulières dans une conduite de longueur L (formule de Darcy, coefficient λ donné) :

$$H_{reg} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2\,g}$$

Exemple : $L = 120\,\text{m}$ de conduite de $80\,\text{mm}$, $v = 1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\lambda = 0{,}025$:

$$H_{reg} = 0{,}025 \times \frac{120}{0{,}08} \times \frac{1{,}5^2}{2 \times 9{,}81} \approx 4{,}3\,\text{m} \qquad \Delta p_{reg} = \rho\, g\, H_{reg} \approx 0{,}42\,\text{bar}$$

En régime turbulent, les pertes de charge sont pratiquement proportionnelles à v^2, donc au carré du débit : $H_{pertes} = k\, Q_v^2$.

Piège classique Mélanger pertes exprimées en hauteur et en pression :

$$\Delta p_{pertes} = \rho\, g\, H_{pertes}$$

Pour l'eau, 10 m de pertes de charge valent environ 1 bar.

Les pertes de charge augmentent très vite avec la vitesse : doubler le débit dans une installation multiplie à peu près les pertes par 4. On évite donc les conduites trop petites.

Exemple : filtre encrassé Sur un circuit d'eau de $Q_v = 36\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1} = 0{,}01\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, un filtre encrassé crée une perte de charge singulière $\Delta p_{sing} = 0{,}3\,\text{bar}$, soit $H_{sing} = 0{,}3\times10^5/(1000\times9{,}81) \approx 3{,}1\,\text{m}$. La puissance hydraulique dissipée dans le filtre vaut $Q_v\,\Delta p_{sing} = 0{,}01 \times 0{,}3 \times 10^5 = 300\,\text{W}$, que la pompe doit fournir en permanence : nettoyer les filtres est aussi une économie d'énergie. De même, régler un débit en fermant partiellement une vanne revient à créer volontairement une perte de charge : un variateur de vitesse sur le moteur de la pompe est bien plus économe (voir § 8.10), car il adapte la HMT fournie au besoin réel au lieu de dissiper l'excédent dans la vanne. Sur une installation qui fonctionne plusieurs milliers d'heures par an, l'économie rembourse souvent le variateur en moins de deux ans.

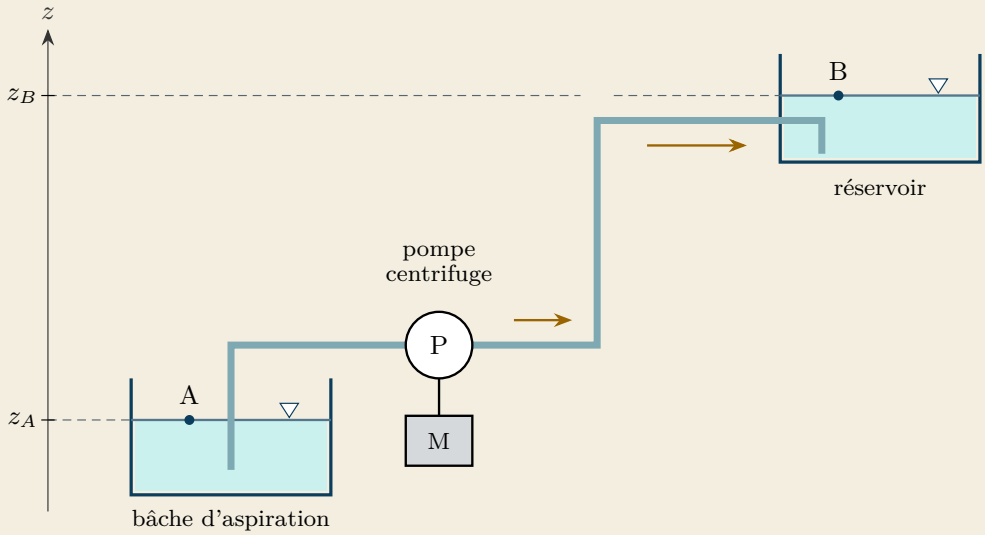
9.6 Machines hydrauliques : Bernoulli généralisée

Entre deux points A et B, le fluide peut recevoir de l'énergie d'une **pompe** ou en céder à une **turbine**, et il en perd par pertes de charge.

À retenir · Relation de Bernoulli généralisée

$$p_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 + \frac{P_h}{Q_v} - \Delta p_{pertes} = p_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2$$

P_h : puissance hydraulique échangée entre la machine et le fluide (W) ; $P_h > 0$ pour une **pompe** (elle fournit de l'énergie au fluide), $P_h < 0$ pour une **turbine** (elle en reçoit du fluide).



Hauteur manométrique totale et puissance hydraulique

En divisant par $\rho\, g$, on obtient la hauteur que la pompe doit fournir au fluide pour l'amener de A à B : c'est la **hauteur manométrique totale** (HMT), la grandeur qui sert à choisir une pompe dans un catalogue, avec le débit.

À retenir · HMT et puissance hydraulique

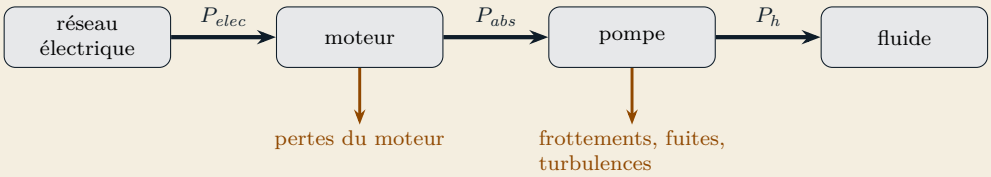
$$HMT = \frac{p_B - p_A}{\rho\, g} + (z_B - z_A) + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\, g} + H_{pertes}$$

$$P_h = \rho\, g\, Q_v\, HMT = Q_v\, \Delta p_{pompe}$$

HMT en m ; P_h en W ; $\Delta p_{pompe} = \rho\, g\, HMT$: surpression fournie par la pompe (Pa).

Dans le cas très fréquent du transfert entre deux surfaces libres à l'air libre ($p_A = p_B = p_{atm}$, $v_A \approx v_B \approx 0$), la HMT se réduit à la **hauteur géométrique** augmentée des pertes de charge : $HMT = (z_B - z_A) + H_{pertes}$.

Rendement et chaîne de puissance



★ **À retenir · Rendements**

$$\eta_p = \frac{P_h}{P_{abs}} \qquad \eta_m = \frac{P_{abs}}{P_{elec}} \qquad \eta_g = \eta_p \times \eta_m = \frac{P_h}{P_{elec}}$$

P_{abs} : puissance mécanique absorbée par la pompe sur son arbre (= puissance utile du moteur).

Ex **Exemple : station de reprise d'eau** Une pompe transfère $Q_v = 30\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ d'eau d'une bâche vers un réservoir dont la surface libre est 22 m plus haut ; les pertes de charge valent $H_{pertes} = 3{,}6\,\text{m}$; $\eta_p = 0{,}68$ et $\eta_m = 0{,}90$.

$$HMT = 22 + 3{,}6 = 25{,}6\,\text{m} \qquad P_h = 1000 \times 9{,}81 \times \frac{30}{3600} \times 25{,}6 \approx 2{,}09\,\text{kW}$$

$$P_{abs} = \frac{P_h}{\eta_p} \approx 3{,}08\,\text{kW} \qquad P_{elec} = \frac{P_{abs}}{\eta_m} \approx 3{,}42\,\text{kW}$$

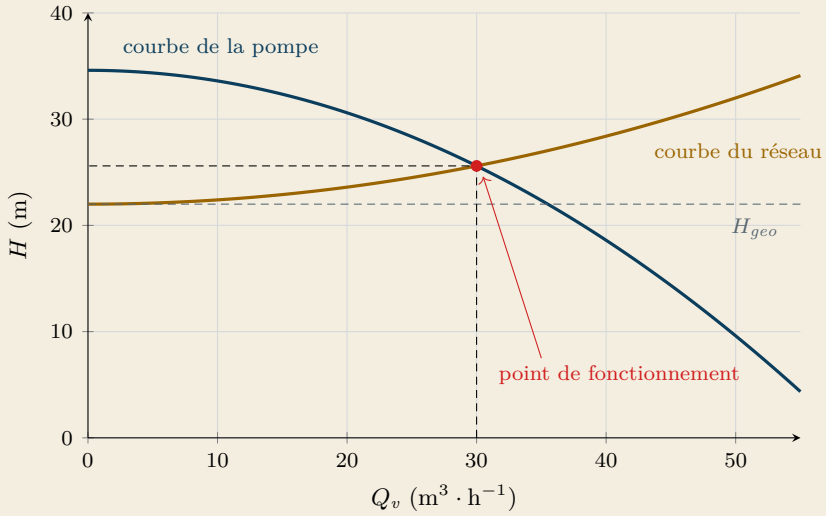
On choisira un moteur de puissance utile normalisée immédiatement supérieure à 3,08 kW, soit 4 kW.

Les pompes et leur point de fonctionnement

Les **pompes volumétriques** (à engrenages, à pistons, à membrane) déplacent un volume fixe à chaque cycle : leur débit dépend peu de la pression, elles servent à produire de fortes pressions (hydraulique industrielle, dosage). Les **pompes centrifuges**, de loin les plus répandues pour l'eau, comportent une roue à aubes entraînée par un moteur : le liquide, aspiré au centre, est projeté vers la périphérie puis refoulé ; elles fournissent de forts débits sous des hauteurs modérées.

La HMT d'une pompe centrifuge diminue quand le débit augmente : c'est sa **courbe caractéristique**, fournie par le constructeur. L'installation impose de son côté une **courbe de réseau** : hauteur géométrique H_{geo} plus pertes de charge, qui croissent avec le débit. Le **point de fonctionnement** est l'intersection des deux courbes (voir § 10.8).

Association de pompes. Deux pompes identiques **en série** additionnent leurs HMT (pour un même débit) : on les utilise pour monter plus haut. **En parallèle**, elles additionnent leurs débits (pour une même HMT) : on les utilise pour débiter plus, ou pour assurer un secours.



Calcul du point de fonctionnement – hors programme Avec des pertes de la forme $k\,Q_v^2$, la courbe du réseau s'écrit $H_{reseau} = H_{geo} + k\,Q_v^2$. Pour la station de reprise précédente : pompe $HMT = 34{,}6 - 0{,}010\,Q_v^2$ et réseau $H = 22 + 0{,}004\,Q_v^2$ (Q_v en $m^3 \cdot h^{-1}$). L'égalité donne $0{,}014\,Q_v^2 = 12{,}6$, soit $Q_v = 30\,m^3 \cdot h^{-1}$ et $HMT = 25{,}6\,m$.

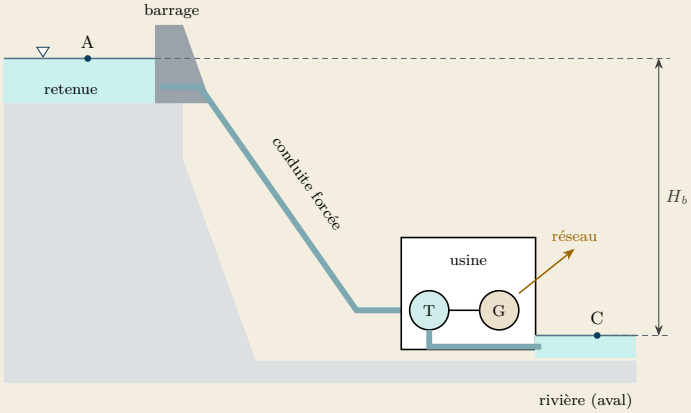
Piège classique : la cavitation Une pompe centrifuge ne « tire » pas l'eau : elle ne peut que la pousser. Si l'aspiration est trop haute ou trop longue, la pression à l'entrée de la roue devient si faible que l'eau se vaporise : des bulles se forment puis implosent sur les aubes (bruit de graviers, chute de débit, érosion). On place donc la pompe le plus bas possible, idéalement **en charge** (sous le niveau du réservoir d'aspiration), avec une conduite d'aspiration courte et de grand diamètre.

Méthode : dimensionner une pompe.

1. Fixer le débit Q_v nécessaire (besoin journalier divisé par la durée de pompage).
2. Calculer la HMT à ce débit par la relation de Bernoulli généralisée (hauteur géométrique, différence de pression, pertes de charge).
3. Choisir une pompe dont le point de fonctionnement (courbe pompe ∩ courbe réseau) est proche du débit voulu et de son rendement maximal.
4. Calculer P_h, puis $P_{abs} = P_h/\eta_p$; choisir un moteur de puissance utile normalisée $\geq P_{abs}$.

Les turbines et la centrale hydraulique

Une **turbine** fait l'inverse d'une pompe : elle convertit l'énergie de l'eau (potentielle et cinétique) en énergie mécanique, transformée en énergie électrique par un **alternateur** (voir § 6.4).



Pour une turbine, $P_h < 0$: l'eau lui cède $|P_h|$ et elle fournit $P_m = \eta_t\,|P_h|$ à l'alternateur.

Hauteurs de chute brute et nette – hors programme Entre la surface libre de la retenue (A) et celle de la rivière aval (C), à la pression atmosphérique et à vitesses négligeables, Bernoulli généralisée donne $|P_h| = \rho\, g\, Q_v\, H_n$, avec la hauteur de chute brute $H_b = z_A - z_C$ et la hauteur nette $H_n = H_b - H_{pertes}$.

Turbines **Pelton** (hautes chutes), **Francis** (chutes moyennes), **Kaplan** (basses chutes, grands débits).

Exemple : centrale de haute chute $H_b = 420\,\text{m}$, $H_{pertes} = 12\,\text{m}$, $Q_v = 8\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, $\eta_t = 0{,}90$:

$$|P_h| = 1000 \times 9{,}81 \times 8 \times 408 \approx 32{,}0\,\text{MW} \qquad P_m = 0{,}90 \times 32{,}0 \approx 28{,}8\,\text{MW}$$

Une **station de transfert d'énergie par pompage** (STEP) relie deux bassins par un groupe réversible pompe-turbine : on pompe quand l'électricité est abondante, on turbine aux heures de forte demande (rendement de cycle de 70 % à 80 %).

Les éoliennes

À retenir · Puissance du vent et d'une éolienne

$$P_{vent} = \frac{1}{2}\,\rho\, S\, v^3 \qquad P_m = C_p\, P_{vent} \qquad S = \frac{\pi D^2}{4}$$

S : surface balayée par les pales ; v : vitesse du vent en amont ; C_p : coefficient de puissance, limité par la **limite de Betz** $C_p \leq 0{,}59$ (en pratique 35 % à 45 %). Vent deux fois plus fort : puissance multipliée par 8.

L'essentiel

Chapitre 9

Fluides au repos, débits, fluide parfait

Masse volumique	$\rho = \dfrac{m}{V} \qquad \rho_{eau} = 1\,000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Pression	$p = \dfrac{F_p}{S} \qquad 1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$
Pression absolue et relative	$p_{abs} = p_{atm} + p_{rel} \qquad p_{atm} \approx 1\,\text{bar}$
Statique des fluides	$p_A + \rho\, g\, z_A = p_B + \rho\, g\, z_B$
Pression à la profondeur h	$p_B - p_A = \rho\, g\, h$
Transmission de pression (Pascal)	$\dfrac{F_1}{S_1} = \dfrac{F_2}{S_2}$
Section d'une conduite	$S = \pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$
Débit volumique	$Q_v = S \times v$
Débit massique	$Q_m = \rho \times Q_v$
Conversion de débit	$1\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1} = \dfrac{1}{3600}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$
Conservation du débit	$v_1\, S_1 = v_2\, S_2 \qquad v_2 = v_1\, \dfrac{D_1^2}{D_2^2}$
Relation de Bernoulli	$p_A + \rho\, g\, z_A + \dfrac{1}{2}\rho\, v_A^2 = p_B + \rho\, g\, z_B + \dfrac{1}{2}\rho\, v_B^2$
Tube de Venturi	$p_A - p_B = \dfrac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 \left(\dfrac{S^2}{s^2} - 1\right)$
Tube de Pitot	$v_A = \sqrt{\dfrac{2\,(p_B - p_A)}{\rho}}$

Fluide réel et machines hydrauliques

Viscosité cinématique	$\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$
Nombre de Reynolds	$R_e = \dfrac{\rho\, v\, D}{\eta} = \dfrac{v\, D}{\nu}$
Régimes d'écoulement	$R_e < 2000$: laminaire $\qquad$ $R_e > 3000$: turbulent
Pertes de charge	$\Delta p_{pertes} = \Delta p_{reg} + \Delta p_{sing} \qquad H_{pertes} = \dfrac{\Delta p_{pertes}}{\rho\, g}$
Bernoulli généralisée	$p_A + \rho\, g\, z_A + \dfrac{1}{2}\rho\, v_A^2 + \dfrac{P_h}{Q_v} - \Delta p_{pertes} = p_B + \rho\, g\, z_B + \dfrac{1}{2}\rho\, v_B^2$
Hauteur manométrique totale	$HMT = \dfrac{p_B - p_A}{\rho\, g} + (z_B - z_A) + \dfrac{v_B^2 - v_A^2}{2\, g} + H_{pertes}$
Puissance hydraulique	$P_h = \rho\, g\, Q_v\, HMT = Q_v\, \Delta p_{pompe}$
Rendement d'une pompe	$\eta_p = \dfrac{P_h}{P_{abs}} \qquad P_{abs} = \dfrac{P_h}{\eta_p}$
Deux pompes en série, en parallèle	série : $HMT_1 + HMT_2 \qquad$ parallèle : $Q_{v1} + Q_{v2}$
Turbine	$P_h < 0 \qquad P_m = \eta_t\, \lvert P_h \rvert$
Rendement global	$\eta_g = \eta_p \times \eta_m = \dfrac{P_h}{P_{elec}}$
Puissance du vent	$P_{vent} = \dfrac{1}{2}\, \rho\, S\, v^3 \qquad P_m = C_p\, P_{vent}$
Limite de Betz	$C_p \leq 0{,}59$

La puissance du vent varie en v^3 : il faut moyenner v^3, pas v. Un vent alterné à 4 et 8 m/s (moyenne 6 m/s) apporte $288/216 = 4/3$ de la puissance d'un vent constant de 6 m/s.

Exercices

Chapitre 9

Fluides au repos et débits

Exercice 9.1 – Cuve de fioul d'un centre de données ★☆☆

Un centre de données est secouru par un groupe électrogène diesel, alimenté par une cuve de fioul verticale installée dans un local technique. L'exploitant veut connaître à tout instant l'autonomie du groupe sans ouvrir la cuve : le service maintenance propose de placer au fond de la cuve un capteur de pression relative, relié à la supervision. Vous êtes chargé de vérifier les calculs avant la mise en service.

Données

- Cuve cylindrique verticale, mise à l'air libre par un évent : diamètre intérieur $D = 1{,}8\,\text{m}$; hauteur de fioul lorsque la cuve est pleine : $h = 2{,}5\,\text{m}$.
- Fioul : $\rho = 840\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $p_{atm} = 1{,}013\,\text{bar}$.
- Consommation du groupe à pleine charge : $45\,\text{L}\cdot\text{h}^{-1}$.

1. Calculer la section S de la cuve, puis le volume V et la masse m de fioul lorsqu'elle est pleine.
2. Calculer la pression relative p_{rel} au fond de la cuve pleine, en Pa puis en bar. En déduire la pression absolue.
3. Calculer la force pressante exercée par le fioul sur le fond de la cuve. Comparer au poids du fioul et commenter.
4. Un jour, le capteur indique $p_{rel} = 0{,}150\,\text{bar}$. Calculer la hauteur de fioul, le volume restant (en litres) et l'autonomie du groupe à pleine charge.

→ corrigé p. 331

Exercice 9.2 – Presse hydraulique de montage de roulements ★☆☆

Dans l'atelier de maintenance d'une entreprise de traction ferroviaire, les roulements des moteurs de traction sont emmanchés sur leur arbre à l'aide d'une presse hydraulique manuelle. Un levier actionne une petite pompe à piston qui envoie de l'huile dans un vérin de grand diamètre. Le chef d'atelier veut vérifier l'effort que doit fournir l'opérateur et le nombre de coups de levier nécessaires.

Données

- Piston de la pompe : diamètre $d_1 = 16\,\text{mm}$, course $30\,\text{mm}$ par coup de levier.
- Piston du vérin : diamètre $D_2 = 80\,\text{mm}$; course nécessaire à l'emmanchement : $25\,\text{mm}$.
- Effort d'emmanchement : $F_2 = 40\,\text{kN}$. Le levier multiplie par 8 l'effort de l'opérateur.

▷ Les deux pistons sont considérés à la même altitude ; l'huile est incompressible.

1. Calculer les sections S_1 et S_2 des deux pistons.
2. Calculer la pression de l'huile pendant l'emmanchement, en Pa puis en bar.
3. Énoncer le principe utilisé, puis calculer la force F_1 exercée sur le petit piston et l'effort que doit fournir l'opérateur sur le levier.
4. Calculer le volume d'huile envoyé dans le vérin pendant l'emmanchement, puis le nombre de coups de levier nécessaires.
5. De combien le vérin avance-t-il à chaque coup de levier ? Commenter : la presse fait-elle gagner de l'énergie ?

→ corrigé p. 332

Exercice 9.3 – Circuit de refroidissement d'une presse à injecter ★★☆

Une usine de pièces plastiques refroidit ses moules de presse à injecter par un circuit d'eau glacée. Le débit nominal de la boucle principale est $Q_v = 36\,\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$. Lors de l'extension de l'atelier, un installateur propose de raccorder la nouvelle presse par une tuyauterie de 50 mm de diamètre intérieur, « pour gagner de la place ». Le responsable maintenance, qui préconise une vitesse d'eau inférieure à $2{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, vous demande votre avis, puis de mettre en place une surveillance du débit.

Données

▷ Eau : $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; viscosité dynamique $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$.

▷ Boucle principale : diamètre intérieur $D_1 = 80\,\mathrm{mm}$. Diamètres intérieurs disponibles : 50, 65, 80 et 100 mm.

▷ Débitmètre à tube de Venturi installé sur la boucle principale : col de diamètre $d = 40\,\mathrm{mm}$.

I- Vitesses et régime d'écoulement

1. Convertir le débit en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$ et calculer le débit massique Q_m.
2. Calculer la vitesse v_1 de l'eau dans la boucle principale.
3. Énoncer la conservation du débit et calculer la vitesse v_2 dans la tuyauterie de 50 mm proposée. Conclure.
4. Calculer le diamètre minimal permettant de respecter la préconisation, puis choisir un diamètre parmi ceux disponibles.
5. Calculer le nombre de Reynolds dans la boucle principale et préciser le régime d'écoulement.

II- Surveillance du débit

6. Calculer la vitesse de l'eau dans le col du Venturi, puis la différence de pression $p_A - p_B$ attendue au débit nominal.

7. Après plusieurs mois, le capteur différentiel n'indique plus que 20 kPa. Calculer le débit correspondant, en $\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$. Proposer une explication.

→ corrigé p. 332

Bernoulli et machines hydrauliques

Exercice 9.4 – Château d'eau et immeuble de grande hauteur ★★☆

Une commune alimente un quartier à partir d'un château d'eau. Un promoteur y projette un immeuble de grande hauteur (rez-de-chaussée et 13 étages de 3 m) et demande au service des eaux si la pression sera suffisante à tous les niveaux. Le technicien du service doit répondre, puis expliquer pourquoi la pression chute au robinet ouvert.

Données

- ▷ On prend l'origine des altitudes au niveau de la rue ($z = 0$). Surface libre du château d'eau : $z_S = 46\,\mathrm{m}$; pression atmosphérique à la surface libre.
- ▷ Robinets de l'immeuble : rez-de-chaussée $z = 1\,\mathrm{m}$; 5e étage $z = 16\,\mathrm{m}$; 13e et dernier étage $z = 40\,\mathrm{m}$; le robinet du n^{e} étage est à l'altitude $z = 1 + 3\,n$ (en m).
- ▷ Pression relative minimale exigée au robinet : 1 bar. $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

I- Robinets fermés

1. Justifier que l'on peut appliquer le principe fondamental de la statique des fluides entre la surface libre et un robinet fermé.

2. Calculer la pression relative au robinet du rez-de-chaussée, du 5e et du dernier étage.

3. Calculer l'altitude maximale d'un robinet pour obtenir 1 bar. Quels étages faudra-t-il équiper d'un surpresseur ?

II- Robinet du rez-de-chaussée ouvert

4. En considérant l'eau comme un fluide parfait et en appliquant la relation de Bernoulli entre la surface libre (vitesse négligeable) et la sortie du robinet (jet à l'air libre), calculer la vitesse de l'eau à la sortie du robinet.

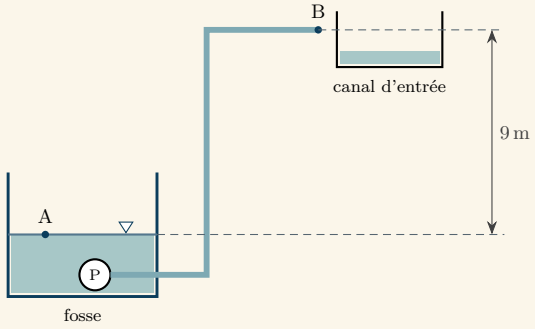
5. La sortie du robinet a un diamètre de 12 mm. Calculer le débit correspondant en $\mathrm{L \cdot s^{-1}}$.

6. On mesure en réalité un débit de $0{,}25\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Calculer la vitesse réelle de sortie, puis, par la relation de Bernoulli avec pertes de charge, la hauteur H_{pertes} perdue entre le château d'eau et la sortie. Où se situent principalement ces pertes ?

→ corrigé p. 334

Exercice 9.5 – Poste de relevage d'une station d'épuration ★★☆

Dans une station d'épuration, les eaux usées arrivent gravitairement dans une fosse, d'où une pompe centrifuge immergée les relève vers le canal d'entrée du traitement biologique. La pompe actuelle, très ancienne, doit être remplacée : le technicien doit établir la HMT et la puissance du nouveau groupe, puis estimer son coût de fonctionnement annuel.



Données

- Débit à assurer : $Q_v = 54\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{h}^{-1}$; masse volumique des eaux usées : $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.
- Point A : surface libre de la fosse ($p_A = p_{atm}$, $v_A \approx 0$). Point B : sortie de la conduite de refoulement, qui débouche à l'air libre ($p_B = p_{atm}$), 9 m au-dessus de A.
- Conduite de refoulement : diamètre intérieur $D = 100\,\mathrm{mm}$. Pertes de charge totales au débit nominal : $H_{pertes} = 2{,}6\,\mathrm{m}$.
- Rendement de la pompe : $\eta_p = 0{,}62$; rendement du moteur : $\eta_m = 0{,}88$.
- La pompe fonctionne en moyenne 6 h par jour, toute l'année ; prix de l'énergie : 0,18 € le kW · h.

1. Calculer la vitesse v_B de l'eau à la sortie de la conduite de refoulement.

2. Écrire la relation de Bernoulli généralisée entre A et B et en déduire l'expression de la HMT. Calculer sa valeur. Quel terme peut-on négliger ?

3. Calculer la puissance hydraulique P_h fournie à l'eau.

4. Calculer la puissance P_{abs} absorbée par la pompe sur son arbre, puis la puissance électrique absorbée par le moteur et le rendement global du groupe.

5. Calculer l'énergie électrique consommée en un an et son coût.

6. Le constructeur propose un groupe de rendement global 0,65, plus cher de 1500 €. Calculer l'économie annuelle et le temps de retour sur investissement.

→ corrigé p. 335

Exercice 9.6 – Micro-centrale sur le site d'un ancien moulin ★★★

Une société coopérative réhabilite un ancien moulin pour y installer une micro-centrale hydroélectrique. L'eau, dérivée de la rivière par un canal d'amenée, arrive dans une chambre de mise en charge, puis descend par une conduite forcée vers une turbine Francis accouplée à un alternateur ; elle retourne ensuite à la rivière. Le bureau d'études vous confie la vérification de la puissance annoncée et de la pression à l'entrée de la turbine.

Données

- Point A : surface libre de la chambre de mise en charge, $z_A = 312\,\text{m}$. Point B : entrée de la turbine, dans la conduite, $z_B = 286\,\text{m}$. Point C : surface libre de la rivière à l'aval, $z_C = 285\,\text{m}$. Pression atmosphérique en A et en C ; vitesses négligeables en A et en C.
- Conduite forcée : longueur $L = 180\,\text{m}$, diamètre intérieur $D = 0{,}60\,\text{m}$, coefficient $\lambda = 0{,}018$; pertes de charge (formule de Darcy) : $H_{pertes} = \lambda \dfrac{L}{D} \dfrac{v^2}{2\,g}$. On néglige les autres pertes.
- Hauteur de chute brute : $H_b = z_A - z_C$; hauteur nette : $H_n = H_b - H_{pertes}$.
- Débit nominal : $Q_v = 0{,}85\,\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Eau à $10\,^\circ\text{C}$: $\rho = 1\,000\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\nu = 1{,}3 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
- Rendement de la turbine : $\eta_t = 0{,}88$; rendement de l'alternateur : $\eta_a = 0{,}95$.
- Production équivalente à $5\,200\,\text{h}$ par an à la puissance nominale ; consommation moyenne d'un foyer : $4{,}5\,\text{MW} \cdot \text{h}$ par an.

I- Écoulement dans la conduite forcée

1. Calculer la section de la conduite, la vitesse v de l'eau et le débit massique.

2. Calculer le nombre de Reynolds. Quel est le régime d'écoulement ?

3. Calculer les pertes de charge H_{pertes} dans la conduite forcée.

II- Puissance de la micro-centrale

4. Calculer la hauteur de chute brute H_b et la hauteur nette H_n.

5. Appliquer la relation de Bernoulli généralisée entre A et C pour exprimer P_h. Justifier son signe et calculer la puissance cédée par l'eau à la turbine.

6. Calculer la puissance électrique fournie au réseau, l'énergie produite en un an et le nombre de foyers alimentés.

III- Pression à l'entrée de la turbine

7. Appliquer la relation de Bernoulli entre A et B (sans machine, avec les pertes de charge de la conduite) et calculer la pression relative p_B à l'entrée de la turbine.

IV- Fonctionnement en été

8. En été, le débit disponible tombe à $0{,}40\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$. Les pertes de charge étant proportionnelles au carré du débit, calculer les nouvelles pertes, la nouvelle hauteur nette et la puissance électrique (rendements inchangés). La puissance est-elle proportionnelle au débit ? Expliquer.

→ corrigé p. 335

Sujets de type BTS

Chapitre 9

Sujet BTS 9.A – Alimentation en eau potable d'un village de montagne

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure 15

Un syndicat intercommunal alimente un village de montagne à partir d'une source captée en fond de vallée. L'eau est recueillie dans une bâche, d'où une station de pompage la refoule vers un réservoir situé au-dessus du village ; le village est ensuite desservi gravitairement. L'ancienne pompe arrivant en fin de vie, le syndicat demande de vérifier la pression chez les abonnés, puis de valider le choix de la nouvelle pompe et d'évaluer le coût du pompage.

Données

- Origine des altitudes : surface libre de la bâche ($z = 0$). Surface libre du réservoir : $z_R = 96\,\mathrm{m}$. Bâche et réservoir sont à l'air libre ; les vitesses de leurs surfaces libres sont négligeables.
- Abonnés : maison la plus haute à $z = 64\,\mathrm{m}$, maison la plus basse à $z = 10\,\mathrm{m}$. Pression relative souhaitée chez un abonné : entre $2\,\mathrm{bar}$ et $4\,\mathrm{bar}$.
- Besoin journalier du village : $360\,\mathrm{m^3}$.
- Conduite de refoulement : longueur $L = 850\,\mathrm{m}$, diamètre intérieur $D = 100\,\mathrm{mm}$, coefficient $\lambda = 0{,}022$; pertes de charge (formule de Darcy) : $H_{pertes} = \lambda \dfrac{L}{D}\dfrac{v^2}{2g}$; les pertes singulières sont négligées.
- Eau : $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\eta = 1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$; $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
- Courbe caractéristique de la pompe proposée : $HMT = 112 - 0{,}025\,Q_v^2$ (HMT en m, Q_v en $\mathrm{m^3\cdot h^{-1}}$) ; rendement de la pompe au point de fonctionnement : $\eta_p = 0{,}68$; rendement du moteur : $\eta_m = 0{,}92$.
- Prix de l'énergie : 0,17 € le $\mathrm{kW\cdot h}$.

Partie A – Pression chez les abonnés

A.1. Robinets fermés, calculer la pression relative chez l'abonné le plus haut et chez l'abonné le plus bas.

A.2. Ces pressions respectent-elles la plage souhaitée ? Calculer l'altitude en dessous de laquelle il faut équiper les abonnés d'un réducteur de pression.

Partie B – Conduite de refoulement

B.1. La pompe fonctionnant 20 h par jour, calculer le débit nécessaire en $\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$ puis en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$.

B.2. Calculer la vitesse de l'eau dans la conduite et le nombre de Reynolds. Préciser le régime d'écoulement.

B.3. Calculer les pertes de charge dans la conduite à ce débit.

B.4. Les pertes de charge étant proportionnelles au carré du débit, montrer que la courbe du réseau s'écrit $H_{reseau} \approx 96 + 0{,}012\,Q_v^2$ (Q_v en $\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$).

Partie C – Point de fonctionnement

C.1. À partir de la relation de Bernoulli généralisée entre la surface libre de la bâche et celle du réservoir, justifier l'expression de la courbe du réseau.

C.2. Déterminer par le calcul le débit et la HMT au point de fonctionnement de la pompe proposée.

C.3. Calculer la durée de pompage quotidienne nécessaire pour satisfaire le besoin du village. Conclure.

Partie D – Puissances et coût du pompage

D.1. Calculer la puissance hydraulique, la puissance absorbée par la pompe et la puissance électrique absorbée par le moteur.

D.2. Proposer une puissance utile normalisée pour le moteur (7,5 kW, 9 kW, 11 kW, 15 kW).

D.3. Calculer l'énergie électrique consommée par jour, l'énergie par mètre cube distribué et le coût annuel du pompage.

D.4. Calculer l'énergie qu'il suffirait de fournir chaque jour pour élever $360\,\mathrm{m^3}$ d'eau de 96 m. Comparer avec D.3 et expliquer l'écart.

→ corrigé p. 337

Sujet BTS 9.B – Station de transfert d'énergie par pompage sur une île

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une île non raccordée au réseau continental développe un grand parc photovoltaïque. Pour stocker l'excédent de production de la journée et le restituer le soir, le

gestionnaire du réseau étudie une petite station de transfert d'énergie par pompage (STEP) : un bassin supérieur creusé sur une colline et un bassin inférieur, reliés par une conduite forcée et un groupe réversible pompe-turbine. On vous demande d'évaluer les puissances mises en jeu et le rendement du cycle de stockage.

Données

- Dénivelé entre les surfaces libres des deux bassins : $H = 185\,\text{m}$ (supposé constant). Les deux bassins sont à l'air libre ; vitesses des surfaces libres négligeables.
- Volume utile du bassin supérieur : $V = 60\,000\,\text{m}^3$.
- Groupe pompe-turbine installé 6 m sous la surface libre du bassin inférieur.
- Conduite forcée : longueur $L = 600\,\text{m}$, diamètre intérieur $D = 1{,}2\,\text{m}$, coefficient $\lambda = 0{,}012$; pertes de charge (formule de Darcy) : $H_{pertes} = \lambda \dfrac{L}{D} \dfrac{v^2}{2\,g}$; les pertes singulières sont négligées. Hauteur nette de chute : $H_n = H - H_{pertes}$. Pression nominale de la conduite : PN 25 (25 bar).
- Eau : $\rho = 1\,000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\nu = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
- Turbinage : débit $Q_t = 4{,}0\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$; rendement de la turbine 0,90 ; rendement de l'alternateur 0,97.
- Pompage : débit $Q_p = 3{,}2\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$; rendement de la pompe 0,88 ; rendement du moteur 0,97 (la même machine électrique fonctionne en moteur ou en alternateur).

Partie A – Statique et énergie stockée

A.1. Bassin supérieur plein et groupe à l'arrêt, calculer la pression relative à l'entrée du groupe. La conduite PN 25 convient-elle ?

A.2. Calculer l'énergie potentielle de pesanteur stockée par le volume utile, en J puis en $\text{MW}\cdot\text{h}$.

Partie B – Fonctionnement en turbinage

B.1. Calculer la vitesse de l'eau dans la conduite et le nombre de Reynolds.

B.2. Calculer les pertes de charge dans la conduite, puis la hauteur nette.

B.3. Calculer la puissance cédée par l'eau à la turbine, puis la puissance électrique fournie au réseau.

B.4. Calculer la durée nécessaire pour vider le volume utile et l'énergie électrique restituée.

Partie C – Fonctionnement en pompage

C.1. Les pertes de charge étant proportionnelles au carré du débit, calculer les pertes au débit de pompage, puis la HMT.

C.2. Calculer la puissance hydraulique, la puissance absorbée par la pompe et la puissance électrique absorbée.

C.3. Calculer la durée nécessaire pour remplir le volume utile et l'énergie électrique consommée.

C.4. En pompage, la pression à l'aspiration de la pompe ne doit pas descendre trop bas, sinon l'eau se vaporise (cavitation). Calculer la pression relative à l'entrée du groupe, à l'arrêt, due aux 6 m d'eau du bassin inférieur, et expliquer pourquoi le groupe est installé sous ce bassin.

Partie D – Bilan

D.1. Calculer le rendement du cycle de stockage (énergie restituée sur énergie consommée).

D.2. Comparer au produit des rendements des machines et expliquer l'écart.

D.3. Le gestionnaire envisage de turbiner à $5\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$ pour mieux couvrir la pointe du soir. Calculer les nouvelles pertes de charge, la puissance électrique fournie et la durée de turbinage. Commenter.

D.4. Rédiger, en quelques lignes, une conclusion pour le gestionnaire du réseau.

→ corrigé p. 338

Corrigés

Fluides au repos et débits

✓ Corrigé de l'exercice 9.1 – Cuve de fioul d'un centre de données

1. $S = \dfrac{\pi D^2}{4} = \dfrac{\pi \times 1{,}8^2}{4} \approx 2{,}545\,\mathrm{m^2}$; $V = S\,h = 2{,}545 \times 2{,}5$ soit $\boxed{V \approx 6{,}36\,\mathrm{m^3}}$

$m = \rho\,V = 840 \times 6{,}362$ soit $\boxed{m \approx 5\,340\,\mathrm{kg}}$ (plus de cinq tonnes).

2. Principe fondamental de la statique entre la surface libre (p_{atm}) et le fond, 2,5 m plus bas :

$$p_{rel} = \rho\,g\,h = 840 \times 9{,}81 \times 2{,}5 \quad \text{soit} \quad \boxed{p_{rel} \approx 20\,600\,\mathrm{Pa} \approx 0{,}206\,\mathrm{bar}}$$

$p_{abs} = p_{atm} + p_{rel} = 1{,}013 + 0{,}206 \approx 1{,}22\,\mathrm{bar}$.

3. La pression atmosphérique s'exerce des deux côtés du fond : seule la pression relative crée une force nette.

$$F = p_{rel} \times S = 20\,601 \times 2{,}545 \quad \text{soit} \quad \boxed{F \approx 52{,}4\,\mathrm{kN}}$$

Poids du fioul : $m\,g = 5344 \times 9{,}81 \approx 52{,}4\,\text{kN}$. Les deux valeurs sont égales : dans une cuve à parois verticales, le fond supporte exactement le poids du liquide ($\rho\,g\,h\,S = \rho\,V\,g$).

4. $h' = \dfrac{p_{rel}}{\rho\,g} = \dfrac{0{,}150 \times 10^5}{840 \times 9{,}81}$ soit $\boxed{h' \approx 1{,}82\,\text{m}}$

$V' = S\,h' = 2{,}545 \times 1{,}820 \approx 4{,}63\,\text{m}^3 = 4\,630\,\text{L}$; autonomie : $4632/45$ soit $\boxed{\Delta t \approx 103\,\text{h}}$ (un peu plus de quatre jours).

Méthode Un capteur de pression relative placé au fond d'une cuve à l'air libre est un capteur de niveau : $h = p_{rel}/(\rho\,g)$. Il faut connaître la masse volumique du liquide stocké, sinon le niveau affiché est faux.

✓ Corrigé de l'exercice 9.2 – Presse hydraulique de montage de roulements

1. $S_1 = \dfrac{\pi \times 0{,}016^2}{4} \approx 2{,}01 \times 10^{-4}\,\text{m}^2 = 2{,}01\,\text{cm}^2$; $S_2 = \dfrac{\pi \times 0{,}080^2}{4} \approx 5{,}03 \times 10^{-3}\,\text{m}^2 = 50{,}3\,\text{cm}^2$.

2. $p = \dfrac{F_2}{S_2} = \dfrac{40 \times 10^3}{5{,}027 \times 10^{-3}}$ soit $\boxed{p \approx 7{,}96 \times 10^6\,\text{Pa} \approx 79{,}6\,\text{bar}}$

3. Théorème de Pascal : la pression imposée par le petit piston est transmise intégralement dans l'huile ; les pistons étant à la même altitude, ils subissent la même pression.

$$F_1 = p\,S_1 = F_2 \times \frac{S_1}{S_2} = 40 \times 10^3 \times \left(\frac{16}{80}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{F_1 = 1\,600\,\text{N}}$$

Effort de l'opérateur : $1600/8 = 200\,\text{N}$, l'équivalent du poids d'une masse de $20\,\text{kg}$: c'est acceptable.

4. $V = S_2 \times 0{,}025 \approx 1{,}26 \times 10^{-4}\,\text{m}^3 = 126\,\text{cm}^3$. Chaque coup de levier envoie $S_1 \times 0{,}030 \approx 6{,}03\,\text{cm}^3$.

$$n = \frac{126}{6{,}03} \approx 20{,}8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{21\ \text{coups de levier}}$$

5. Le volume chassé par le petit piston se retrouve dans le vérin : $d_2 = d_1\,S_1/S_2 = 30/25 = 1{,}2\,\text{mm}$ par coup.

La force est multipliée par 25 mais le déplacement est divisé par 25 : le travail reçu par l'huile ($F_1\,d_1 = 1600 \times 0{,}030 = 48\,\text{J}$) est égal au travail fourni par le vérin ($F_2\,d_2 = 40 \times 10^3 \times 1{,}2 \times 10^{-3} = 48\,\text{J}$). La presse ne crée pas d'énergie, elle multiplie les forces.

✓ Corrigé de l'exercice 9.3 – Circuit de refroidissement d'une presse à injecter

I- Vitesses et régime d'écoulement

1. $Q_v = \dfrac{36}{3600} = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$; $Q_m = \rho\, Q_v = 1000 \times 0{,}01$ soit $\boxed{Q_m = 10\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}}$

2. $S_1 = \dfrac{\pi \times 0{,}08^2}{4} \approx 5{,}03 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$;

$v_1 = \dfrac{Q_v}{S_1} = \dfrac{0{,}01}{5{,}03 \times 10^{-3}}$ soit $\boxed{v_1 \approx 1{,}99\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$

3. En régime stationnaire, pour un fluide incompressible, le débit volumique est le même dans toutes les sections : $v_1\, S_1 = v_2\, S_2$.

$$v_2 = v_1 \times \frac{D_1^2}{D_2^2} = 1{,}99 \times \frac{80^2}{50^2} = 1{,}99 \times 2{,}56 \quad \text{soit} \quad \boxed{v_2 \approx 5{,}09\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

$5{,}09\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} > 2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: la tuyauterie proposée est **trop petite** (bruit, érosion, pertes de charge très élevées).

4. $v \le v_{max}$ impose $S \ge \dfrac{Q_v}{v_{max}}$, soit $D_{min} = \sqrt{\dfrac{4\,Q_v}{\pi\, v_{max}}} = \sqrt{\dfrac{4 \times 0{,}01}{\pi \times 2{,}5}} \approx 71{,}4\,\text{mm}$.

Le diamètre de 65 mm donnerait $v \approx 3{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: trop. On choisit $\boxed{D = 80\,\text{mm}}$, comme la boucle principale ($v \approx 1{,}99\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

5. $R_e = \dfrac{\rho\, v_1\, D_1}{\eta} = \dfrac{1000 \times 1{,}99 \times 0{,}08}{1{,}0 \times 10^{-3}}$ soit $\boxed{R_e \approx 1{,}6 \times 10^5}$ > 3000 : régime **turbulent**.

II- Surveillance du débit

6. Dans le col : $v_B = v_1 \times \dfrac{80^2}{40^2} = 4 \times 1{,}989 \approx 7{,}96\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Bernoulli entre A et B (même altitude, fluide parfait) :

$p_A - p_B = \dfrac{1}{2}\,\rho\,(v_B^2 - v_1^2) = \dfrac{1}{2} \times 1000 \times (7{,}958^2 - 1{,}989^2)$ soit $\boxed{p_A - p_B \approx 29{,}7\,\text{kPa}}$

7. $\dfrac{S^2}{s^2} = \left(\dfrac{80}{40}\right)^4 = 16$, d'où

$$v_A = \sqrt{\frac{2\,(p_A - p_B)}{\rho\,(16-1)}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 10^3}{1000 \times 15}} \approx 1{,}63\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$Q_v = v_A\, S_1 = 1{,}633 \times 5{,}027 \times 10^{-3} \times 3600 \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_v \approx 29{,}5\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}}$$

Le débit a baissé de 18 % : la pression différentielle varie comme le **carré** du débit. Causes possibles : filtre encrassé, entartrage des canaux du moule, vanne partiellement fermée ou usure de la roue de la pompe. Le moule est moins bien refroidi : il faut intervenir.

Bernoulli et machines hydrauliques

✓ Corrigé de l'exercice 9.4 – Château d'eau et immeuble de grande hauteur

I- Robinets fermés

1. Robinets fermés, l'eau du réseau est au repos ; elle forme un seul volume de liquide incompressible continu entre la surface libre et le robinet : le principe fondamental de la statique s'applique, quelle que soit la longueur des canalisations.

2. $p_{atm} + \rho\, g\, z_S = p + \rho\, g\, z$, d'où $p_{rel} = \rho\, g\, (z_S - z)$:

Robinet	rez-de-chaussée	5e étage	13e étage
$z_S - z$ (m)	45	30	6
p_{rel} (bar)	4,41	2,94	0,59

3. $p_{rel} \geq 1$ bar impose $z_S - z \geq \dfrac{10^5}{1000 \times 9{,}81} \approx 10{,}2$ m, soit $\boxed{z \leq 35{,}8\ \text{m}}$

$1 + 3\,n \leq 35{,}8$ donne $n \leq 11{,}6$: les étages 0 à 11 sont correctement desservis ; **les 12e et 13e étages** ($z = 37$ et 40 m) doivent être alimentés par un surpresseur.

II- Robinet du rez-de-chaussée ouvert

4. Bernoulli entre la surface libre S (p_{atm}, $v \approx 0$) et la sortie B du robinet (p_{atm}, $z_B = 1$ m) : $\rho\, g\, z_S = \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2$.

$$v_B = \sqrt{2\, g\, (z_S - z_B)} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 45} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_B \approx 29{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

5. $s = \dfrac{\pi \times 0{,}012^2}{4} \approx 1{,}13 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$; $\quad Q_v = v_B\, s \approx 3{,}36 \times 10^{-3}\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} = 3{,}36\ \text{L}\cdot\text{s}^{-1}$: plus de 200 L par minute, valeur irréaliste pour un robinet.

6. $v_{reel} = \dfrac{0{,}25 \times 10^{-3}}{1{,}131 \times 10^{-4}} \approx 2{,}21\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Bernoulli avec pertes de charge : $\rho\, g\, z_S = \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho\, v_{reel}^2 + \rho\, g\, H_{pertes}$, d'où

$$H_{pertes} = (z_S - z_B) - \frac{v_{reel}^2}{2\, g} = 45 - \frac{2{,}21^2}{2 \times 9{,}81} \quad \text{soit} \quad \boxed{H_{pertes} \approx 44{,}8\ \text{m}}$$

Presque toute l'énergie est dissipée. Les pertes se situent surtout dans le robinet lui-même (perte singulière très forte : c'est son rôle de limiter le débit), dans le compteur et dans les petites canalisations de l'immeuble ; le réseau public, de grand diamètre, en consomme peu. Le modèle du fluide parfait est inutilisable ici.

✓ Corrigé de l'exercice 9.5 – Poste de relevage d'une station d'épuration

1. $Q_v = \dfrac{54}{3600} = 0{,}015\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$; $S = \dfrac{\pi \times 0{,}1^2}{4} \approx 7{,}85\times10^{-3}\,\text{m}^2$; $v_B = \dfrac{Q_v}{S}$ soit $\boxed{v_B \approx 1{,}91\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$

2. $p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \dfrac{P_h}{Q_v} - \Delta p_{pertes} = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$, avec $p_A = p_B$ et $v_A \approx 0$.
En divisant par $\rho\, g$:

$$HMT = \frac{P_h}{\rho\, g\, Q_v} = (z_B - z_A) + \frac{v_B^2}{2\,g} + H_{pertes} = 9 + 0{,}19 + 2{,}6 \quad \text{soit} \quad \boxed{HMT \approx 11{,}8\,\text{m}}$$

Le terme cinétique (0,19 m, moins de 2 %) pourrait être négligé.

3. $P_h = \rho\, g\, Q_v\, HMT = 1000 \times 9{,}81 \times 0{,}015 \times 11{,}79$ soit $\boxed{P_h \approx 1{,}73\,\text{kW}}$

4. $P_{abs} = \dfrac{P_h}{\eta_p} = \dfrac{1734}{0{,}62}$ soit $\boxed{P_{abs} \approx 2{,}80\,\text{kW}}$

$P_{elec} = \dfrac{P_{abs}}{\eta_m} = \dfrac{2797}{0{,}88} \approx 3{,}18\,\text{kW}$; $\eta_g = 0{,}62 \times 0{,}88 \approx 0{,}546$: près de la moitié de l'énergie électrique est perdue.

5. $W = P_{elec} \times \Delta t = 3{,}179 \times 6 \times 365$ soit $\boxed{W \approx 6\,960\,\text{kW}\cdot\text{h}}$ coût : $6961 \times 0{,}18 \approx 1250$ € par an.

6. $P'_{elec} = \dfrac{1734}{0{,}65} \approx 2{,}67\,\text{kW}$, soit $W' \approx 5\,840\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par an. Économie : $6961 - 5843 \approx 1\,120\,\text{kW}\cdot\text{h}$, soit environ 201 € par an.

Temps de retour : $1500/201 \approx 7{,}5$ ans. Pour un équipement prévu pour durer 15 à 20 ans, l'investissement est rentable.

Méthode Pour un transfert entre deux points à la pression atmosphérique, $HMT = \Delta z + H_{pertes}$ (+ éventuellement le terme cinétique en sortie libre). La HMT et le débit sont les deux grandeurs qui permettent de choisir une pompe dans un catalogue.

✓ Corrigé de l'exercice 9.6 – Micro-centrale sur le site d'un ancien moulin

I- Écoulement dans la conduite forcée

1. $S = \dfrac{\pi \times 0{,}60^2}{4} \approx 0{,}283\,\text{m}^2$; $v = \dfrac{Q_v}{S} = \dfrac{0{,}85}{0{,}282\,7}$ soit $\boxed{v \approx 3{,}01\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$;
$Q_m = \rho\, Q_v = 850\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. $R_e = \dfrac{v\,D}{\nu} = \dfrac{3{,}006 \times 0{,}60}{1{,}3\times10^{-6}}$ soit $\boxed{R_e \approx 1{,}4\times10^6}$: régime très turbulent.

3. $H_{pertes} = \lambda \dfrac{L}{D}\dfrac{v^2}{2g} = 0{,}018 \times \dfrac{180}{0{,}60} \times \dfrac{3{,}006^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}018 \times 300 \times 0{,}461$ soit $\boxed{H_{pertes} \approx 2{,}49\,\text{m}}$

II- Puissance de la micro-centrale

4. $H_b = z_A - z_C = 312 - 285 = 27\,\text{m}$; $H_n = H_b - H_{pertes} = 27 - 2{,}49$ soit $\boxed{H_n \approx 24{,}5\,\text{m}}$

5. Entre A et C : $p_A = p_C = p_{atm}$, $v_A \approx v_C \approx 0$:

$$\rho g z_A + \frac{P_h}{Q_v} - \rho g H_{pertes} = \rho g z_C \quad \Longrightarrow \quad P_h = -\rho g Q_v (H_b - H_{pertes}) = -\rho g Q_v H_n$$

$P_h < 0$: le fluide **cède** de l'énergie à la machine, c'est bien une turbine.

$$|P_h| = 1000 \times 9{,}81 \times 0{,}85 \times 24{,}51 \quad \text{soit} \quad \boxed{|P_h| \approx 204\,\text{kW}}$$

6. $P_{elec} = \eta_t \eta_a |P_h| = 0{,}88 \times 0{,}95 \times 204{,}4$ soit $\boxed{P_{elec} \approx 171\,\text{kW}}$

$W = 170{,}9 \times 5200 \approx 8{,}89 \times 10^5\,\text{kW}\cdot\text{h} \approx 889\,\text{MW}\cdot\text{h}$ par an, soit $889/4{,}5 \approx 197$ foyers.

III- Pression à l'entrée de la turbine

7. Entre A (p_{atm}, $v_A \approx 0$) et B ($v_B = v$), sans machine, avec les pertes de la conduite :

$$p_{atm} + \rho g z_A - \rho g H_{pertes} = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$p_{B,rel} = \rho g (z_A - z_B) - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g H_{pertes}$$

$$p_{B,rel} = 255\,060 - 4519 - 24\,402 \quad \text{soit} \quad \boxed{p_{B,rel} \approx 2{,}26\,\text{bar}}$$

En statique (turbine arrêtée, vanne fermée), on aurait $\rho g \times 26 \approx 2{,}55\,\text{bar}$: l'écoulement fait baisser la pression à cause des termes cinétique et de pertes.

IV- Fonctionnement en été

8. $H'_{pertes} = 2{,}487 \times \left(\dfrac{0{,}40}{0{,}85}\right)^2 \approx 0{,}55\,\text{m}$; $H'_n = 27 - 0{,}55 \approx 26{,}45\,\text{m}$.

$$|P'_h| = 1000 \times 9{,}81 \times 0{,}40 \times 26{,}45 \approx 103{,}8\,\text{kW} \qquad \boxed{P'_{elec} \approx 86{,}8\,\text{kW}}$$

Le débit est multiplié par $0{,}40/0{,}85 \approx 0{,}47$, la puissance par $103{,}8/204{,}4 \approx 0{,}51$: la puissance n'est pas exactement proportionnelle au débit, car à faible débit les pertes de charge (en Q_v^2) diminuent fortement et la hauteur nette augmente. En pratique, le rendement de la turbine baisse à faible débit, ce qui réduit ce gain.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 9.A – Alimentation en eau potable d'un village de montagne

Partie A – Pression chez les abonnés

A.1. Robinets fermés, l'eau est au repos entre le réservoir et l'abonné : $p_{rel} = \rho\, g\, (z_R - z)$.

Abonné le plus haut : $p_{rel} = 1000 \times 9{,}81 \times (96 - 64)$ soit $\boxed{p_{rel} \approx 3{,}14\,\text{bar}}$

Abonné le plus bas : $p_{rel} = 1000 \times 9{,}81 \times (96 - 10)$ soit $\boxed{p_{rel} \approx 8{,}44\,\text{bar}}$

A.2. L'abonné le plus haut est dans la plage ; le plus bas reçoit plus du double de la pression maximale souhaitée (usure des joints, bruit, risque de rupture des flexibles). $p_{rel} \leq 4\,\text{bar}$ impose $96 - z \leq \dfrac{4 \times 10^5}{1000 \times 9{,}81} \approx 40{,}8\,\text{m}$, soit $z \geq 55{,}2\,\text{m}$: tous les abonnés situés **en dessous de** 55 m doivent être équipés d'un réducteur de pression (ou le réseau d'un réducteur de secteur).

Partie B – Conduite de refoulement

B.1. $Q_v = \dfrac{360}{20} = 18\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1} = \dfrac{18}{3600} = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

B.2. $S = \dfrac{\pi \times 0{,}1^2}{4} \approx 7{,}85 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$; $v = \dfrac{Q_v}{S} \approx 0{,}637\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;

$$R_e = \frac{1000 \times 0{,}637 \times 0{,}1}{1{,}0 \times 10^{-3}} \approx 63\,700 > 3000 \ : \text{ régime } \textbf{turbulent}.$$

B.3. $H_{pertes} = \lambda \dfrac{L}{D} \dfrac{v^2}{2\,g} = 0{,}022 \times \dfrac{850}{0{,}1} \times \dfrac{0{,}637^2}{2 \times 9{,}81}$ soit $\boxed{H_{pertes} \approx 3{,}86\,\text{m}}$

B.4. $H_{pertes} = k\, Q_v^2$ avec $k = \dfrac{3{,}863}{18^2} \approx 0{,}011\,9 \approx 0{,}012$ (en m pour Q_v en $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$). La hauteur à fournir est la hauteur géométrique (96 m) augmentée des pertes : $H_{reseau} \approx 96 + 0{,}012\, Q_v^2$.

Partie C – Point de fonctionnement

C.1. Entre la surface libre de la bâche (A) et celle du réservoir (B) : $p_A = p_B = p_{atm}$ et $v_A \approx v_B \approx 0$. La relation de Bernoulli généralisée, divisée par ρg, donne $HMT = (z_B - z_A) + H_{pertes} = 96 + k\, Q_v^2$: c'est la courbe du réseau.

C.2. Au point de fonctionnement, la pompe fournit exactement la hauteur demandée par le réseau :

$$112 - 0{,}025\, Q_v^2 = 96 + 0{,}012\, Q_v^2$$

$$Q_v = \sqrt{\frac{16}{0{,}037}} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_v \approx 20{,}8\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}}$$

$$HMT = 112 - 0{,}025 \times 20{,}8^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{HMT \approx 101{,}2\,\text{m}}$$

C.3. $\Delta t = \dfrac{360}{20{,}8} \approx 17{,}3\,\text{h}$ par jour : la pompe satisfait le besoin en moins de 20 h, avec une marge de 2,7 h (pointes de consommation, remplissage après un incident).

Partie D – Puissances et coût du pompage

D.1. $P_h = \rho\, g\, Q_v\, HMT = 1000 \times 9{,}81 \times \dfrac{20{,}795}{3600} \times 101{,}19$ soit $\boxed{P_h \approx 5{,}73\,\text{kW}}$

$P_{abs} = \dfrac{P_h}{\eta_p} = \dfrac{5{,}734}{0{,}68} \approx 8{,}43\,\text{kW}$; $P_{elec} = \dfrac{P_{abs}}{\eta_m} = \dfrac{8{,}432}{0{,}92} \approx 9{,}17\,\text{kW}$.

D.2. Le moteur doit fournir $P_{abs} \approx 8{,}43\,\text{kW}$ sur l'arbre : on choisit $\boxed{P_u = 9\,\text{kW}}$

D.3. $W_j = P_{elec} \times \Delta t = 9{,}166 \times 17{,}31 \approx 159\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par jour, soit $159/360 \approx 0{,}44\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par m^3.

Par an : $158{,}7 \times 365 \approx 57\,900\,\text{kW}\cdot\text{h}$ coût : $\boxed{\approx 9850\ €\ \text{par an}}$

D.4. $W_{min} = \rho\, V\, g\, z_R = 1000 \times 360 \times 9{,}81 \times 96 \approx 3{,}39 \times 10^8\,\text{J} \approx 94\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

$94/159 \approx 0{,}59$: seuls 59 % de l'énergie électrique consommée servent réellement à élever l'eau. Les écarts : rendements de la pompe (0,68) et du moteur (0,92), et pertes de charge dans la conduite ($96/101{,}2 \approx 0{,}95$). On vérifie : $0{,}68 \times 0{,}92 \times 0{,}949 \approx 0{,}59$.

Méthode Pour trouver un point de fonctionnement, on égale la HMT de la pompe et la hauteur demandée par le réseau, $H_{geo} + k\,Q_v^2$. Si la courbe de la pompe est donnée sous forme de graphique, on y trace la parabole du réseau et on lit l'intersection. Un réseau plus résistant (vanne fermée, conduite encrassée : k plus grand) déplace le point vers les faibles débits.

✓ Corrigé du sujet BTS 9.B – Station de transfert d'énergie par pompage sur une île

Partie A – Statique et énergie stockée

A.1. L'entrée du groupe est $185 + 6 = 191\,\text{m}$ sous la surface libre du bassin supérieur :

$$p_{rel} = \rho\, g\, h = 1000 \times 9{,}81 \times 191 \quad \text{soit} \quad \boxed{p_{rel} \approx 18{,}7\,\text{bar}}$$

$18{,}7\,\text{bar} < 25\,\text{bar}$: la conduite PN 25 convient, avec une marge utile pour les surpressions dues aux manœuvres rapides des vannes (coups de bélier).

A.2. $W = m\, g\, H = \rho\, V\, g\, H = 1000 \times 60\,000 \times 9{,}81 \times 185$

soit $\boxed{W \approx 1{,}09 \times 10^{11}\,\text{J} \approx 30{,}2\,\text{MW}\cdot\text{h}}$

Partie B – Fonctionnement en turbinage

B.1. $S = \dfrac{\pi \times 1{,}2^2}{4} \approx 1{,}131\,\text{m}^2$; $v_t = \dfrac{4{,}0}{1{,}131} \approx 3{,}54\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $R_e = \dfrac{3{,}537 \times 1{,}2}{1{,}0 \times 10^{-6}} \approx 4{,}2 \times 10^6$: régime turbulent.

B.2. $H_{pertes} = 0{,}012 \times \dfrac{600}{1{,}2} \times \dfrac{3{,}537^2}{2 \times 9{,}81}$ soit $\boxed{H_{pertes} \approx 3{,}83\,\text{m}}$ et $H_n = 185 - 3{,}83 \approx 181{,}2\,\text{m}$.

B.3. $|P_h| = \rho\, g\, Q_t\, H_n = 1000 \times 9{,}81 \times 4 \times 181{,}17$ soit $\boxed{|P_h| \approx 7{,}11\,\text{MW}}$

$P_{elec} = 0{,}90 \times 0{,}97 \times 7{,}109$ soit $\boxed{P_{elec} \approx 6{,}21\,\text{MW}}$

B.4. $\Delta t_t = \dfrac{V}{Q_t} = \dfrac{60\,000}{4} = 15\,000\,\text{s} \approx 4{,}17\,\text{h}$; $W_t = 6{,}206 \times 4{,}167 \approx 25{,}9\,\text{MW}\cdot\text{h}$.

Partie C – Fonctionnement en pompage

C.1. $H'_{pertes} = 3{,}825 \times \left(\dfrac{3{,}2}{4}\right)^2 \approx 2{,}45\,\text{m}$. Entre les deux surfaces libres, la pompe doit vaincre le dénivelé **et** les pertes :

$$HMT = H + H'_{pertes} = 185 + 2{,}45 \quad \text{soit} \quad \boxed{HMT \approx 187{,}4\,\text{m}}$$

C.2. $P_h = 1000 \times 9{,}81 \times 3{,}2 \times 187{,}45 \approx 5{,}88\,\text{MW}$; $P_{abs} = \dfrac{5{,}884}{0{,}88} \approx 6{,}69\,\text{MW}$; $\boxed{P_{elec} = \dfrac{6{,}687}{0{,}97} \approx 6{,}89\,\text{MW}}$

C.3. $\Delta t_p = \dfrac{60\,000}{3{,}2} = 18\,750\,\text{s} \approx 5{,}21\,\text{h}$; $W_p = 6{,}894 \times 5{,}208 \approx 35{,}9\,\text{MW}\cdot\text{h}$.

C.4. $p_{rel} = \rho\, g \times 6 = 1000 \times 9{,}81 \times 6 \approx 0{,}59\,\text{bar}$ (soit $p_{abs} \approx 1{,}6\,\text{bar}$). Placé sous le bassin inférieur, le groupe est « en charge » : l'eau arrive à l'aspiration en surpression, ce qui compense les pertes de charge et la dépression créée à l'entrée de la roue, et évite la cavitation (bulles de vapeur qui implosent et détruisent les aubes).

Partie D – Bilan

D.1. $\eta_{cycle} = \dfrac{W_t}{W_p} = \dfrac{25{,}86}{35{,}90}$ soit $\boxed{\eta_{cycle} \approx 0{,}72}$

D.2. Produit des rendements des machines : $0{,}90 \times 0{,}97 \times 0{,}88 \times 0{,}97 \approx 0{,}745$. L'écart restant vient des **pertes de charge** : au pompage, il faut fournir 187,4 m au lieu de 185 m ; au turbinage, on ne récupère que 181,2 m. On vérifie : $0{,}745 \times \dfrac{181{,}2}{187{,}4} \approx 0{,}72$.

D.3. $H''_{pertes} = 3{,}825 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 \approx 5{,}98\,\text{m}$; $H_n \approx 179{,}0\,\text{m}$; $|P_h| = 1000 \times 9{,}81 \times 5 \times 179{,}02 \approx 8{,}78\,\text{MW}$ et $P_{elec} = 0{,}873 \times 8{,}781 \approx 7{,}67\,\text{MW}$, pendant $\dfrac{60\,000}{5} = 12\,000\,\text{s} \approx 3{,}33\,\text{h}$.

La puissance augmente de 24 %, mais les pertes de charge, en Q_v^2, augmentent de 56 % : l'énergie restituée baisse un peu ($7{,}666 \times 3{,}333 \approx 25{,}6\,\text{MW}\cdot\text{h}$ au lieu de $25{,}9\,\text{MW}\cdot\text{h}$).

D.4. La STEP stocke environ $36\,\text{MW}\cdot\text{h}$ d'excédent photovoltaïque en un peu plus de 5 h de pompage (6,9 MW) et en restitue environ $26\,\text{MW}\cdot\text{h}$ le soir, pendant un peu plus de 4 h à 6,2 MW, avec un rendement de cycle de 72 %, conforme aux STEP existantes. La conduite PN 25 est adaptée. Le parc photovoltaïque devra disposer d'un excédent d'au moins 6,9 MW pendant plus de 5 h pour remplir le bassin chaque jour.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ calculer une masse volumique, une pression, distinguer pression absolue et relative ; — ex. 9.1, 9.2
- ☐ appliquer le principe fondamental de la statique et le théorème de Pascal ; — ex. 9.1, 9.2, 9.4
- ☐ calculer un débit et exploiter la conservation du débit ; — ex. 9.3, sujet A
- ☐ appliquer la relation de Bernoulli (Torricelli, Venturi) ; — ex. 9.3, 9.4
- ☐ calculer un nombre de Reynolds et des pertes de charge ; — ex. 9.6, sujet A
- ☐ calculer une HMT, une puissance hydraulique et choisir un moteur de pompe ; — ex. 9.5, sujet A
- ☐ évaluer la puissance d'une turbine et le rendement d'une STEP. — ex. 9.6, sujet B

CHAPITRE

10

Mécanique du solide

Forces, couples, dynamique et transmission de puissance aux entraînements électriques

Dans ce chapitre

- Forces usuelles, moment d'une force, couple
- Mouvements de translation et de rotation
- Principe fondamental de la dynamique, moment d'inertie
- Énergie cinétique, travail et puissance
- Réducteur, poulies-courroie, treuil, vis
- Charges entraînées : levage, convoyeur, ventilateur

Objectifs

- ✓ Faire le bilan des forces et des couples sur un solide
- ✓ Appliquer le PFD en translation et en rotation
- ✓ Ramener couples et inerties sur l'arbre du moteur
- ✓ Choisir un moteur à partir des besoins de la charge

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 10

Cours — Chapitre 10

Un moteur électrique n'est jamais choisi pour lui-même : il est choisi pour **entraîner une charge** (un treuil, un convoyeur, un ventilateur…). Le technicien part donc toujours de la mécanique de la charge (forces, vitesses, couples, inerties) pour remonter jusqu'au couple et à la puissance que doit fournir le moteur. C'est l'objet de ce chapitre.

10.1 Forces et actions mécaniques

Notion de force

D

Définition Une **force** modélise une action mécanique capable de mettre un solide en mouvement, de modifier son mouvement ou de le déformer. Elle est représentée par un vecteur $\overrightarrow{F}$ caractérisé par son **point d'application**, sa **direction** (droite d'action), son **sens** et son **intensité** F, en newtons (N).

On distingue les actions **à distance** (le poids, les forces magnétiques) et les actions **de contact** (réaction d'un support, tension d'un câble, poussée d'un vérin, frottements).

Forces usuelles

- La **tension d'un câble** ou d'une courroie est dirigée le long du câble et **tire** toujours sur le solide.
- La **réaction d'un support** $\overrightarrow{R}$ se décompose en une composante normale $\overrightarrow{R_N}$, perpendiculaire à la surface de contact, et une composante tangentielle $\overrightarrow{f}$: la **force de frottement**.

★

À retenir · Forces usuelles

$$P = m \times g \qquad F = k \times \Delta l \qquad \Pi = \rho_{fluide} \times V_{im} \times g$$

Poids $\overrightarrow{P}$: vertical, vers le bas, appliqué au centre de gravité G ; m en kg, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Force de rappel d'un ressort (loi de Hooke) : k raideur en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, Δl allongement en m.
Poussée d'Archimède : verticale, vers le haut ; V_{im} volume immergé en $\mathrm{m^3}$.

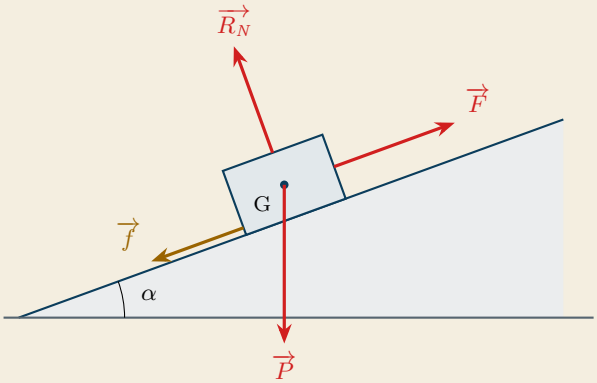
Frottements

Les frottements s'opposent toujours au mouvement (ou à la tendance au mouvement). Ils dissipent de l'énergie sous forme de chaleur : en l'absence de frottements, l'énergie mécanique se conserve. Dans les exercices, ils sont donnés sous la forme d'une force F_f ou d'un couple C_f, souvent supposés constants.

Modèles de frottement – hors programme **Frottement sec** (glissement, paliers, freins) : intensité indépendante de la vitesse, $f = \mu \times R_N$, avec μ coefficient de frottement (sans unité).
Frottement visqueux (fluide, ventilation des machines) : proportionnel à la vitesse, $f = \lambda \times v$ en translation, $C_f = \lambda' \times \Omega$ en rotation. Les pertes mécaniques d'une machine se modélisent souvent par $C_f = C_0 + \lambda' \Omega$.

Équilibre d'un solide

À retenir · Principe d'inertie Un solide immobile ou en mouvement de translation rectiligne uniforme est soumis à des forces qui se compensent : $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$.



$\overrightarrow{P}$: poids du colis
$\overrightarrow{R_N}$: réaction normale de la bande
$\overrightarrow{f}$: frottement, opposé au glissement
$\overrightarrow{F}$: traction qui fait monter le colis

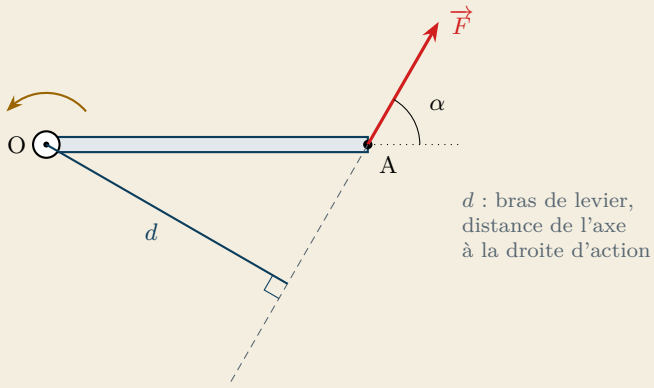
Projection du poids sur un plan incliné – hors programme Sur un plan incliné d'un angle α, on projette le poids sur la pente et sur sa perpendiculaire : la composante $P\sin(\alpha)$ tend à faire descendre le solide, la composante $P\cos(\alpha)$ est compensée par la réaction normale, $R_N = P\cos(\alpha)$. Ces relations sont données dans les énoncés quand elles sont utiles.
Exemple. Un colis de 40 kg repose sur une bande arrêtée, inclinée de 15° ($F = 0$) : $P \approx 392$ N ; la bande doit exercer une force d'adhérence $f = P\sin(\alpha) \approx 102$ N vers le haut de la pente, et $R_N = P\cos(\alpha) \approx 379$ N. Le colis ne glisse pas si $f \leq \mu R_N$, c'est-à-dire si $\mu \geq \tan(\alpha) \approx 0{,}27$.

Piège classique Confondre la masse m (en kg) et le poids P (en N) : une charge de 500 kg a un poids de $500 \times 9{,}81 = 4\,905$ N, pas de 500 N. Attention aussi à la lettre P, utilisée à la fois pour le poids et pour la puissance : préciser toujours de quoi l'on parle.

10.2 Moment d'une force et couple

Moment d'une force par rapport à un axe

Une force appliquée à un solide mobile autour d'un axe Δ le fait tourner d'autant plus facilement qu'elle est intense et appliquée loin de l'axe : c'est le principe du levier et de la clé de serrage.



★ **À retenir · Moment d'une force**

$$M_\Delta(\vec{F}) = F \times d = F \times OA \times \sin(\alpha)$$

M en N·m ; F en N ; d : bras de levier en m, distance entre l'axe et la **droite d'action** de la force ; α : angle entre (OA) et $\vec{F}$. Le moment est compté positivement si la force tend à faire tourner dans le sens choisi comme positif.

Une force dont la droite d'action passe par l'axe ($d = 0$) a un moment nul : elle ne peut pas faire tourner le solide. C'est le cas de la réaction d'un palier sur un arbre.

Ex **Exemple : clé de serrage** Un technicien exerce $F = 150\,\text{N}$ à $OA = 30\,\text{cm}$ de l'axe d'un écrou. Force perpendiculaire à la clé : $M = 150 \times 0{,}30 = 45\,\text{N}\cdot\text{m}$. Force inclinée de $\alpha = 60°$ par rapport à la clé : $M = 150 \times 0{,}30 \times \sin(60°) \approx 39\,\text{N}\cdot\text{m}$. Pour serrer au mieux, on pousse perpendiculairement au manche.

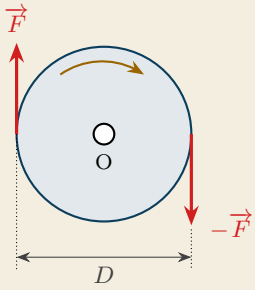
Couple

D **Définition** Un **couple** est un ensemble de deux forces opposées, de même intensité F, dont les droites d'action sont parallèles et distantes de D. Leur somme est nulle (aucun effet de translation) mais elles font tourner le solide. Le **moment du couple**, souvent appelé simplement « couple », vaut

$$C = F \times D \qquad (\text{N}\cdot\text{m})$$

Il ne dépend pas de la position de l'axe.

Couple moteur C_m : couple exercé par le moteur sur son arbre. **Couple résistant** C_r : couple exercé par la charge (et les frottements). Les signes se lisent sur un axe choisi : le moteur fournit de la puissance si $C_m\Omega > 0$ et freine si $C_m\Omega < 0$ (descente d'une charge). Dans un moteur électrique, les forces électromagnétiques réparties sur le rotor forment le couple.



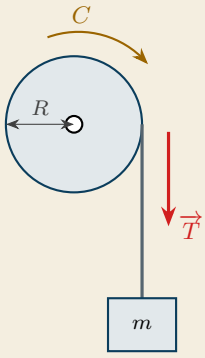
volant de manœuvre

Couple exercé par un câble sur un tambour

Un câble enroulé sur un tambour de rayon R et tendu par une force T exerce sur le tambour un couple de moment

$$C = T \times R$$

car la droite d'action du câble est tangente au tambour : le bras de levier est le rayon. C'est la relation de base du **treuil**, de la **poulie motrice** d'un convoyeur et de la **roue** d'un véhicule ($F = C/R$).



Ex **Exemple** Un treuil de tambour $R = 15\,\text{cm}$ retient une charge de $300\,\text{kg}$: $T = 300 \times 9{,}81 \approx 2\,943\,\text{N}$ et $C = 2943 \times 0{,}15 \approx 441\,\text{N}\cdot\text{m}$.

Rotation uniforme

★ **À retenir · Arbre en rotation uniforme** Un arbre de moteur qui entraîne une charge à vitesse constante est soumis à des couples qui se compensent : $C_m = C_r$.

Le couple se mesure avec un **couplemètre** placé entre le moteur et la charge : l'arbre se tord très légèrement et des jauges de contrainte fournissent une tension proportionnelle au couple.

10.3 Mouvements de translation et de rotation

Translation rectiligne

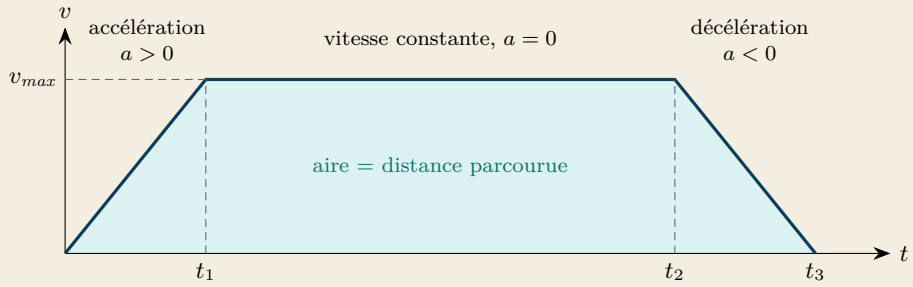
★ **À retenir**

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Mouvement uniforme : $a = 0$ et $d = v \times \Delta t$.
Mouvement uniformément accéléré (a constante) :

$$v(t) = a\,t + v_0 \qquad x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

v en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; a en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$; v_0 et x_0 : vitesse et position à $t = 0$. Les entraînements industriels (navettes, ascenseurs, ponts roulants) suivent presque toujours un **profil trapézoïdal** de vitesse imposé par le variateur : accélération constante, palier à vitesse constante, décélération constante.



Ex **Exemple : navette de magasin automatisé** Une navette part de l'arrêt avec $a = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et doit atteindre $v_{max} = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Durée de l'accélération : $t_1 = \frac{v_{max}}{a} = 3\,\mathrm{s}$; distance parcourue : $\frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 3^2 = 2{,}25\,\mathrm{m}$ (aire du triangle : $\frac{1}{2} \times 3 \times 1{,}5$).

Rotation autour d'un axe fixe

★ **À retenir**

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{30} \times N \qquad v = R \times \Omega \qquad \Gamma = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$$

Ω : vitesse angulaire en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; N en $\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$; θ : angle en rad ; v : vitesse d'un point situé à la distance R de l'axe ; Γ : accélération angulaire en $\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.
Démarrage à Γ constante depuis l'arrêt : $\Omega = \Gamma\, t$.

Ex **Exemple** Un moteur tourne à $N = 1\,450\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$:

$$\Omega = \frac{\pi}{30} \times 1450 \approx 151{,}8\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

Un point de la périphérie d'une poulie de rayon $R = 10\,\mathrm{cm}$ calée sur son arbre se déplace à

$$v = 0{,}10 \times 151{,}8 \approx 15{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

C'est aussi la vitesse de la courroie.

✗ **Piège classique** Les formules de la mécanique ($P = C\,\Omega$, $v = R\,\Omega$, $E_c = \frac{1}{2}J\Omega^2$) s'utilisent **toujours** avec Ω en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, jamais avec N en $\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$. De même, un nombre de tours se convertit en radians :

$$1\,\mathrm{tr} = 2\pi\,\mathrm{rad}$$

10.4 Principe fondamental de la dynamique

En translation

★ **À retenir · PFD en translation**

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}$$

Projeté sur l'axe du mouvement : (somme des forces motrices) − (somme des forces résistantes) $= m\,a$.

Ex **Exemple : chariot filoguidé** Un chariot de 800 kg doit accélérer à $a = 0{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; les frottements de roulement valent 400 N. Force de traction nécessaire : $F = m\,a + F_f = 800 \times 0{,}5 + 400 = 800\ \mathrm{N}$. À vitesse constante, il suffit de 400 N.

En rotation

★ **À retenir · PFD en rotation**

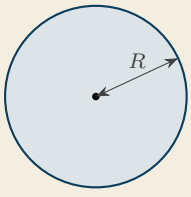
$$J\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \sum C = C_m - C_r$$

J : moment d'inertie de l'ensemble en rotation ($\mathrm{kg\cdot m^2}$) ; C_m : couple moteur ; C_r : couple résistant (charge et frottements), en $\mathrm{N\cdot m}$.

	$C_m > C_r$	$C_m = C_r$	$C_m < C_r$
$\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$	> 0	0	< 0
Mouvement	accélération	vitesse constante	décélération

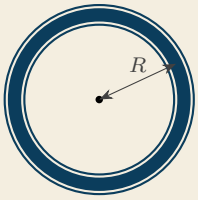
Moment d'inertie

D **Définition** Le **moment d'inertie** J d'un solide par rapport à un axe traduit sa résistance aux variations de vitesse de rotation. Il dépend de la masse **et de sa répartition** autour de l'axe : plus la matière est loin de l'axe, plus J est grand.



disque plein (volant, rotor)

$$J = \frac{1}{2}\,m\,R^2$$



anneau mince (jante, tambour)

$$J = m\,R^2$$

Les moments d'inertie de plusieurs pièces tournant autour du même axe **s'additionnent**. À masse égale, un anneau a un moment d'inertie deux fois plus grand qu'un disque plein.

Exemple : démarrage d'un volant d'inertie Un volant (disque plein, $m = 50\,\text{kg}$, $R = 25\,\text{cm}$) a pour moment d'inertie $J = \frac{1}{2} \times 50 \times 0{,}25^2 \approx 1{,}56\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ (inertie du moteur négligée). Sous $C_m = 60\,\text{N}\cdot\text{m}$ et $C_r = 20\,\text{N}\cdot\text{m}$ constants :

$$\Gamma = \frac{60 - 20}{1{,}562\,5} = 25{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$t_d = \frac{\Omega}{\Gamma} = \frac{157{,}1}{25{,}6} \approx 6{,}1\,\text{s}$$

pour atteindre $1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ ($\Omega \approx 157{,}1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).

Méthode : appliquer le PFD.

1. Choisir le système (le solide, ou l'ensemble moteur + charge) et le sens positif.
2. Faire le bilan des forces (translation) ou des couples (rotation), moteurs et résistants.
3. Écrire $\sum F = m\,a$ ou $J\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = C_m - C_r$, puis en tirer l'inconnue : accélération, durée, ou couple nécessaire.
4. Si l'accélération est constante, utiliser $v = a\,t$ ou $\Omega = \Gamma\,t$ pour les durées.

10.5 Énergie, travail et puissance

Énergies

À retenir

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \quad \text{(translation)} \qquad E_c = \frac{1}{2}\,J\,\Omega^2 \quad \text{(rotation)}$$

$$E_p = m\,g\,h \qquad E_m = E_c + E_p$$

Énergies en joules (J) ; h : altitude en m. En l'absence de frottements, l'énergie mécanique E_m se conserve.

Exemple Le volant précédent ($J \approx 1{,}56\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$) lancé à $1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ stocke

$$E_c = \frac{1}{2} \times 1{,}562\,5 \times 157{,}1^2 \approx 19{,}3\,\text{kJ}$$

C'est l'énergie que le moteur a dû fournir (en plus des pertes) et que le frein devra dissiper pour l'arrêter.

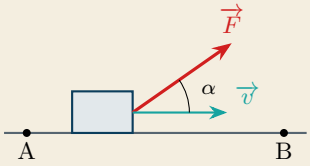
Travail et puissance d'une force

À retenir

$$W(\vec{F}) = F \times AB \times \cos(\alpha) \qquad P = F \times v \times \cos(\beta)$$

W en J ; α : angle entre $\vec{F}$ et le déplacement $\overrightarrow{AB}$; P en W ; β : angle entre $\vec{F}$ et $\vec{v}$ (ici $\alpha = \beta$).

Le travail est **moteur** ($W > 0$) si la force favorise le déplacement, **résistant** ($W < 0$) s'il s'y oppose, nul si la force est perpendiculaire au déplacement (réaction normale).



Pour le poids : $W(\vec{P}) = -m\,g\,h$ quand la charge monte d'une hauteur h, $+m\,g\,h$ quand elle descend. La puissance est le travail fourni par unité de temps : $P = \frac{W}{\Delta t}$.

Ex **Exemple : puissance de levage** Pour monter une charge de 300 kg à vitesse constante $v = 0{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, la traction du câble compense le poids : $T = m\,g$ et $P = m\,g\,v = 300 \times 9{,}81 \times 0{,}5 \approx 1{,}47\,\text{kW}$.

Travail et puissance d'un couple

À retenir

$$W = C \times \theta \qquad P = C \times \Omega$$

C en $\text{N}\cdot\text{m}$; θ : angle de rotation en rad ; Ω en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; P en W.

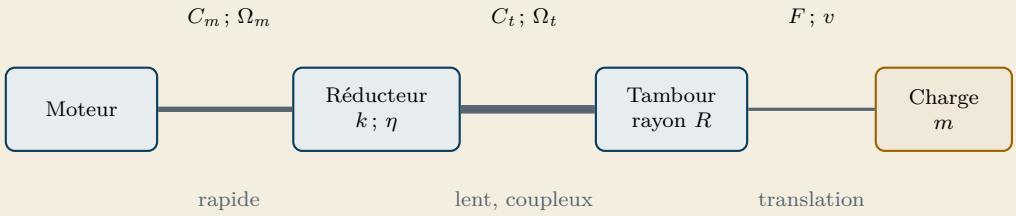
C'est la relation que l'on retrouve sur la plaque signalétique d'un moteur : la puissance nominale est une **puissance utile mécanique**, $P_u = C_u\,\Omega$.

Ex **Exemple : freinage du volant** Moteur coupé, le volant ($J \approx 1{,}56\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $\Omega \approx 157{,}1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) n'est freiné que par un couple constant $C_f = 25\,\text{N}\cdot\text{m}$. Le PFD donne $J\frac{\text{d}\Omega}{\text{d}t} = -C_f$: la vitesse décroît linéairement et s'annule au bout de $t = \frac{J\,\Omega}{C_f} = \frac{1{,}562\,5 \times 157{,}1}{25} \approx 9{,}8\,\text{s}$.

+ **Théorème de l'énergie cinétique** – hors programme Entre deux instants, la variation d'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des travaux des forces et couples qui lui sont appliqués : $\Delta E_c = \sum W$. Pour le volant : $0 - E_c = -C_f\theta$, d'où $\theta = \frac{19276}{25} \approx 771\,\text{rad}$, soit environ 123 tours avant l'arrêt.

10.6 Transmission de mouvement

Entre le moteur, rapide et peu coupleux, et la charge, lente et exigeant un grand couple ou une grande force, on intercale une **chaîne cinématique** : réducteur, poulies et courroie, treuil, système vis-écrou…



Réducteur de vitesse

À retenir · Réducteur de vitesse

$$k = \frac{\Omega_m}{\Omega_{charge}} = \frac{N_m}{N_{charge}} > 1$$

$$\eta = \frac{P_{charge}}{P_m} \qquad C_{charge} = k\,\eta\,C_m$$

k : rapport de réduction (on note parfois $r = 1/k < 1$) ; indice m : arbre d'entrée (moteur) ; indice charge : arbre de sortie.
Sans pertes ($\eta = 1$), la puissance se conserve : la vitesse est divisée par k et le couple multiplié par k.

Exemple Un motoréducteur ($k = 20$, $\eta = 0{,}95$) est entraîné par un moteur tournant à $1\,450\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ et fournissant $30\,\text{N}\cdot\text{m}$. Sortie : $N_{charge} = \frac{1450}{20} = 72{,}5\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ et $C_{charge} = 20 \times 0{,}95 \times 30 = 570\,\text{N}\cdot\text{m}$.

Treuil, tambour, poulie motrice

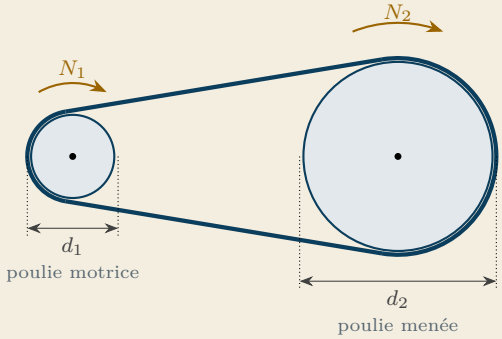
Le tambour transforme une rotation en translation : la vitesse du câble (ou de la bande) est celle de la périphérie du tambour, et l'effort est lié au couple par le rayon (c'est le moment de la force exercée par le câble, de bras de levier R).

À retenir

$$v = R \times \Omega_t \qquad C_t = F \times R \qquad P = F\,v = C_t\,\Omega_t$$

Poulies et courroie, système vis-écrou

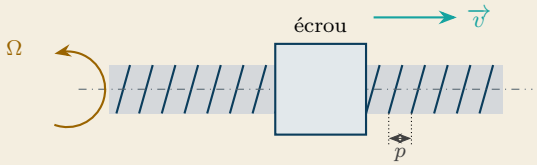
D'autres organes de transmission se rencontrent dans les entraînements industriels. Leurs relations ne sont pas à retenir : elles sont rappelées dans les énoncés.



Poulies et courroie, engrenages – hors programme La courroie (sans glissement) a la même vitesse linéaire sur les deux poulies : $\frac{d_1}{2}\,\Omega_1 = \frac{d_2}{2}\,\Omega_2$, d'où

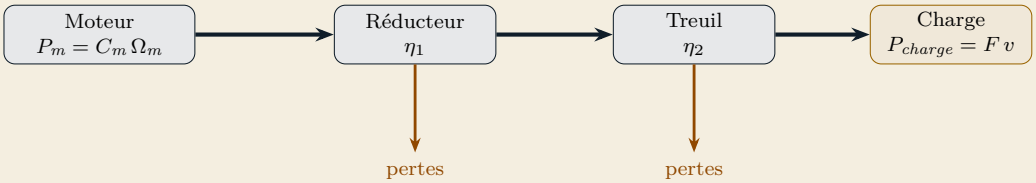
$$N_1\,d_1 = N_2\,d_2 \qquad k = \frac{N_1}{N_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

et pour des engrenages : $N_1\,Z_1 = N_2\,Z_2$ (Z : nombre de dents). **Exemple.** Moteur à $1\,450\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$, poulies $d_1 = 100\,\mathrm{mm}$ et $d_2 = 250\,\mathrm{mm}$: $N_2 = 1450 \times \frac{100}{250} = 580\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$; le couple est multiplié par 2,5 (au rendement près). Une transmission par poulies se traite donc comme un réducteur de rapport $k = d_2/d_1$.



Système vis-écrou – hors programme À chaque tour de la vis, l'écrou (empêché de tourner) avance d'un **pas** p : $v = p \times n = \frac{p\,\Omega}{2\pi}$ (n en $\mathrm{tr\cdot s^{-1}}$). Avec le rendement η de la vis : $F\,v = \eta\,C\,\Omega$, d'où le couple à appliquer pour pousser une charge F : $C = \frac{F\,p}{2\pi\,\eta}$. Une vis à billes a un bon rendement ($\eta \approx 0{,}9$) mais elle est **réversible** : la charge peut faire tourner la vis, il faut un frein. Une vis trapézoïdale à faible rendement est en général irréversible.
Exemple. Vis de pas 5 mm à $1\,500\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$ ($n = 25\,\mathrm{tr\cdot s^{-1}}$) : $v = 0{,}125\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; pour une poussée de 8 kN avec $\eta = 0{,}85$: $C = \frac{8000\times0{,}005}{2\pi\times0{,}85} \approx 7{,}5\,\mathrm{N\cdot m}$.

Rendement d'une chaîne de transmission



★ **À retenir** Quand le moteur entraîne la charge à travers une transmission de rendement η :

$$P_{charge} = \eta \times P_m \qquad P_m = \frac{P_{charge}}{\eta}$$

\+ **Rendements en cascade, charge motrice** – hors programme Les rendements d'éléments en cascade se multiplient : $\eta = \eta_1 \times \eta_2 \times \dots$
Quand c'est la charge qui entraîne le moteur (descente d'une charge, décélération), le rendement change de côté : $P_m = \eta\, P_{charge}$, le moteur reçoit moins que ce que cède la charge.

10.7 Grandeurs ramenées à l'arbre du moteur

Pour choisir un moteur, on ramène la chaîne cinématique à **un seul arbre**, celui du moteur, puis on applique le PFD en rotation à cet arbre.

Couple résistant ramené

Le couple C_{charge} exigé par la charge sur l'arbre lent est obtenu, côté moteur, grâce à la relation du réducteur $C_{charge} = k\,\eta\,C_m$. Le moteur doit donc fournir, en régime permanent :

$$C_m = \frac{C_{charge}}{k\,\eta}$$

Application : monte-charge

Ex **Exemple : monte-charge d'entrepôt** Un moteur ($N_m = 1\,440\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$) entraîne, par un réducteur ($k = 40$), un tambour ($R = 12{,}5\,\text{cm}$) qui lève une cabine chargée de $m = 500\,\text{kg}$. Rendement global $\eta = 0{,}90$.
Vitesses. $\Omega_m = \frac{\pi}{30} \times 1440 \approx 150{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $\Omega_t = 150{,}8/40 \approx 3{,}77\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ puis $v = R\,\Omega_t = 0{,}125 \times 3{,}77 \approx 0{,}471\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Régime permanent. $F = m\,g = 4\,905\,\text{N}$, $C_t = F\,R \approx 613\,\text{N}\cdot\text{m}$ et $P_{charge} = F\,v \approx 2{,}31\,\text{kW}$:

$$C_m = \frac{613}{40 \times 0{,}90} \approx 17{,}0\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad P_m = \frac{P_{charge}}{\eta} \approx 2{,}57\,\text{kW}$$

Moment d'inertie ramené à l'arbre moteur – hors programme L'énergie cinétique de toutes les pièces en mouvement doit être fournie par le moteur. Le moment d'inertie J_{eq} qui, tournant à Ω_m, aurait la même énergie cinétique vaut :

$$J_{eq} = J_m + \frac{J_{charge}}{k^2} + m\left(\frac{v}{\Omega_m}\right)^2$$

J_m : pièces liées à l'arbre moteur ; J_{charge} : pièces tournant à Ω_m/k ; m : masse en translation à la vitesse v. Une inertie située derrière un réducteur est divisée par k^2. Le couple moteur au démarrage s'obtient par le PFD : $C_m = \frac{C_{charge}}{k\,\eta} + J_{eq}\,\Gamma$.
Monte-charge, avec $J_m = 0{,}02\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ et $J_t = 0{,}8\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$: $J_{eq} \approx 0{,}02 + 0{,}000\,5 + 0{,}004\,9 \approx 0{,}025\,4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Démarrage en $0{,}5\,\text{s}$: $\Gamma \approx 302\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ et $C_m \approx 17{,}0 + 7{,}7 \approx 24{,}7\,\text{N}\cdot\text{m}$. L'inertie de la cabine et du tambour, ramenée au moteur, est près de quatre fois plus faible que celle du moteur lui-même.

Méthode : choisir un moteur.

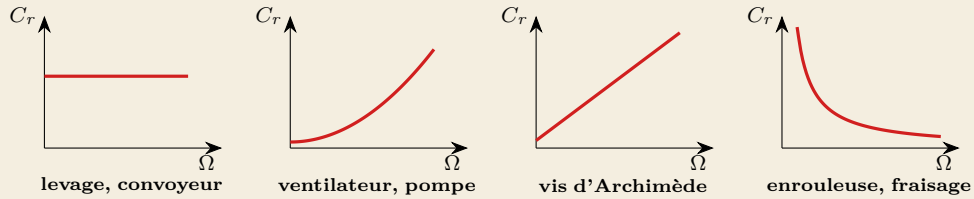
1. Calculer la puissance utile de la charge ($F\,v$ ou $C\,\Omega$) et la vitesse de l'arbre lent.
2. En déduire la puissance et le couple à l'arbre moteur avec le rendement ($P_m = P_{charge}/\eta$, $C_m = C_{charge}/(k\,\eta)$) ; choisir la puissance normalisée immédiatement supérieure.
3. Vérifier le démarrage avec le PFD en rotation : le moteur (ou son variateur) doit fournir le couple résistant plus le couple d'accélération.

10.8 Charges entraînées et point de fonctionnement

Jusqu'ici, la charge imposait un effort ou un couple constant. En réalité, le couple résistant dépend souvent de la vitesse : c'est la forme de cette dépendance qui fixe la vitesse à laquelle l'ensemble moteur-charge se stabilise, la puissance absorbée et l'intérêt d'un variateur de vitesse. On caractérise donc chaque charge par sa **caractéristique mécanique** $C_r(\Omega)$, que l'on superpose à celle du moteur. Elle permet aussi de prévoir si le moteur pourra démarrer la charge, et en combien de temps. Les quatre allures ci-dessous couvrent la grande majorité des entraînements industriels ; une charge réelle combine souvent plusieurs d'entre elles (frottements constants et couple de ventilation, par exemple).

Les types de charges

On rencontre quatre allures typiques :



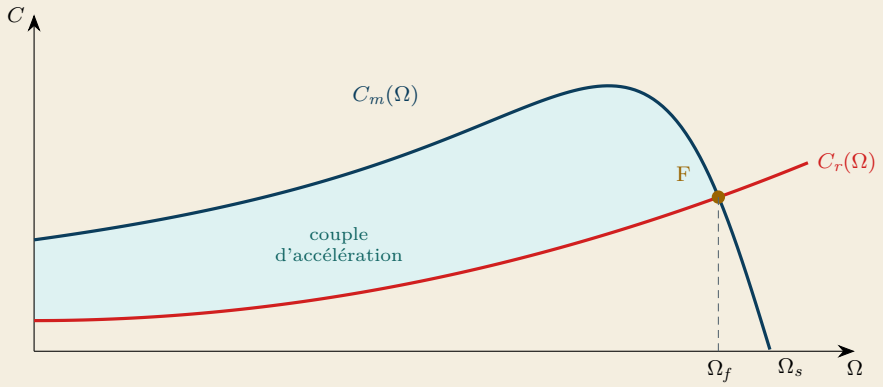
levage, convoyeur $C_r = \text{cste}$ — **ventilateur, pompe** $C_r = a\,\Omega^2$ — **vis d'Archimède** $C_r = a\,\Omega$ — **enrouleuse, fraisage** $C_r = a/\Omega$

Le coefficient a (à ne pas confondre avec le rapport de réduction k) caractérise la charge. Pour une charge en $a\,\Omega^2$, la puissance $P = a\,\Omega^3$ varie comme Ω^3 ; pour une charge en a/Ω, la puissance $C\,\Omega = a$ est constante.

Point de fonctionnement

En régime permanent, $C_m = C_r$: le point de fonctionnement est **l'intersection** de la caractéristique mécanique du moteur $C_m(\Omega)$ et de celle de la charge $C_r(\Omega)$.

Au démarrage, il faut $C_m > C_r$: l'écart entre les deux courbes est le couple d'accélération $J\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$. Dans sa partie utile, la caractéristique d'un moteur asynchrone est pratiquement une droite qui coupe l'axe des vitesses en Ω_s (vitesse de synchronisme) (voir § 6.3).



Ex

Exemple : point de fonctionnement d'un convoyeur Un moteur asynchrone à 4 pôles ($\Omega_s = 157{,}1\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$) a, dans sa zone utile, la caractéristique $C_m = b\,(\Omega_s - \Omega)$ avec $b = 10\,\mathrm{N\cdot m\cdot s\cdot rad^{-1}}$. Il entraîne un convoyeur qui oppose un couple constant $C_r = 30\,\mathrm{N\cdot m}$. Au point de fonctionnement, $b\,(\Omega_s - \Omega_f) = C_r$, d'où

$$\Omega_f = \Omega_s - \frac{C_r}{b} = 157{,}1 - 3 = 154{,}1\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

soit $N_f \approx 1\,471\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$, et la puissance utile vaut $C_r\,\Omega_f \approx 4{,}62\,\mathrm{kW}$. Si la charge double, la vitesse ne baisse que de $3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ de plus : le moteur asynchrone tourne à vitesse presque constante.

Méthode : déterminer un point de fonctionnement.

1. Écrire la caractéristique du moteur $C_m(\Omega)$ et celle de la charge $C_r(\Omega)$, avec Ω en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.
2. Écrire $C_m(\Omega_f) = C_r(\Omega_f)$ et résoudre (équation du premier ou du second degré : garder la racine positive, inférieure à Ω_s).
3. Contrôler sur le graphique que le point trouvé est bien l'intersection des deux courbes.
4. En déduire $N_f = \frac{30}{\pi}\,\Omega_f$, le couple $C_r(\Omega_f)$ et la puissance utile $C_r(\Omega_f)\,\Omega_f$, à comparer à la puissance nominale du moteur.

Applications aux entraînements électriques

Levage. Le couple résistant est **constant** ($C = m\,g\,R$) et ne dépend pas du sens de marche. À la montée, le moteur fournit de la puissance ; à la descente, c'est la charge qui entraîne le moteur : celui-ci fonctionne **en frein** (en génératrice) (voir § 6.1) et la puissance qu'il reçoit doit être dissipée dans une résistance de freinage ou renvoyée au réseau par un variateur régénératif. Un frein mécanique à manque de courant maintient la charge à l'arrêt.

Levage	Montée	Descente
Vitesse Ω_m	> 0	< 0
Couple moteur	> 0 (moteur)	> 0 (retient la charge)
Puissance $C_m\,\Omega_m$	> 0 : fournie à la charge	< 0 : reçue de la charge

Le monte-charge en descente – hors programme Le monte-charge étudié plus haut redescend à pleine charge à $0{,}471\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. La charge cède $P_{charge} \approx 2{,}31\,\text{kW}$; le rendement changeant de côté, le moteur ne reçoit que $\eta\,P_{charge} \approx 2{,}08\,\text{kW}$ et exerce un couple de retenue

$$\frac{\eta\,C_t}{k} = \frac{0{,}9 \times 613}{40} \approx 13{,}8\,\text{N}\cdot\text{m}$$

plus faible qu'à la montée ($17{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}$) : à la descente, les frottements aident à retenir la charge.

Convoyeur. Sur un convoyeur horizontal, le moteur ne compense que les frottements (rouleaux, bande) : C_r est pratiquement constant. Sur un convoyeur incliné, il faut ajouter la composante du poids des produits le long de la pente, $m\,g\sin(\alpha)$ (projection hors programme, voir le § 10.1). Si la composante du poids l'emporte sur les frottements, la bande chargée repart en arrière à l'arrêt du moteur : on installe un **dispositif anti-retour** ou un frein.

Exemple : convoyeur de colis incliné Une bande inclinée de $\alpha = 10°$ porte en permanence 800 kg de colis ; frottements : 1 200 N ; vitesse : $0{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Composante du poids : $800 \times 9{,}81 \times \sin(10°) \approx 1\,363\,\text{N}$.
Effort à fournir et puissance :

$$F = 1363 + 1200 \approx 2\,563\,\text{N} \qquad P = F\,v \approx 2{,}05\,\text{kW}$$

Comme $1\,363\,\text{N} > 1\,200\,\text{N}$, la bande chargée repartirait en arrière à l'arrêt : un anti-retour est indispensable.

Ventilateur, pompe centrifuge. Le couple croît comme Ω^2, la puissance comme Ω^3 : réduire la vitesse avec un variateur (voir § 8.10) (plutôt que fermer un registre) procure de fortes économies d'énergie.

Ex

Exemple : ventilateur d'extraction Un ventilateur absorbe 7,5 kW à 1 450 tr · min^{-1}, soit

$$C = \frac{7500}{151{,}8} \approx 49{,}4\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad a = \frac{C}{\Omega^2} \approx 2{,}14\times10^{-3}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-2}$$

À 80 % de la vitesse, le débit d'air vaut 80 % du débit nominal mais la puissance n'est plus que $7{,}5\times0{,}8^3 \approx 3{,}84$ kW : presque deux fois moins.

Ex

Exemple : pompe de relevage à vis d'Archimède Une station d'épuration relève ses eaux par une vis d'Archimède qui exige $C = 600\,\text{N}\cdot\text{m}$ à $30\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ ($\Omega = 3{,}14\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), soit $P = C\,\Omega \approx 1{,}88$ kW. Le couple est proportionnel à la vitesse :

$$a = \frac{C}{\Omega} \approx 191\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$$

À $24\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ (80 % de la vitesse) :

$$C = 480\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad P \approx 480\times2{,}51 \approx 1{,}21\,\text{kW}$$

La puissance varie ici comme Ω^2.

Ex

Exemple : enrouleuse de film plastique Une enrouleuse bobine un film à vitesse de défilement constante $v = 2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, sous une tension constante $T = 200$ N. Le rayon de la bobine passe de $R = 0{,}10$ m (mandrin vide) à $R = 0{,}40$ m (bobine pleine). Mandrin vide et bobine pleine :

$\Omega = \dfrac{v}{R} = 20\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $C = T\,R = 20\,\text{N}\cdot\text{m}$; $\qquad \Omega = 5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $C = 80\,\text{N}\cdot\text{m}$

Le produit $C\,\Omega = T\,v = 400$ W reste constant : c'est une charge en a/Ω, avec $a = 400$ W. Le moteur doit fournir son plus grand couple à basse vitesse, en fin de bobine.

✗

Piège classique Dimensionner un moteur sur le seul régime permanent. Pour une charge à forte inertie (ventilateur, centrifugeuse, volant), c'est souvent le **démarrage** qui est contraignant : le couple d'accélération $J\,\Gamma$ s'ajoute au couple résistant, et la durée de démarrage peut échauffer le moteur. On vérifie donc que le couple disponible reste supérieur au couple résistant pendant toute la montée en vitesse.

En ligne : carte mentale du chapitre, simulateur de démarrage d'un moteur sur différents types de charges et calculateur de réducteur.

L'essentiel

Chapitre 10

Forces, couples, mouvements, dynamique

Poids	$P = m \times g \qquad g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Loi de Hooke	$F = k \times \Delta l$
Poussée d'Archimède	$\Pi = \rho_{fluide} \times V_{im} \times g$
Moment d'une force	$M_{\Delta}(\overrightarrow{F}) = F \times d = F \times OA \times \sin(\alpha)$
Couple de deux forces	$C = F \times D$
Équilibre, mouvement rectiligne uniforme	$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$
Vitesse, accélération	$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$
Mouvement uniforme	$a = 0 \qquad d = v \times \Delta t$
Accélération constante	$v = a\,t + v_0 \qquad x = \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$
Vitesse angulaire	$\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\pi}{30} \times N$
Point à la distance R	$v = R \times \Omega$
Accélération angulaire	$\Gamma = \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \qquad \Omega = \Gamma\,t$
PFD en translation	$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m \times \overrightarrow{a}$
PFD en rotation	$J\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = C_m - C_r$
Rotation uniforme	$C_m = C_r$
Moment d'inertie	disque : $J = \dfrac{1}{2}\,m\,R^2 \qquad$ anneau : $J = m\,R^2$

Énergie, puissance, transmissions, charges

Énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \qquad E_c = \frac{1}{2}\, J\, \Omega^2$
Énergie potentielle, mécanique	$E_p = m\, g\, h \qquad E_m = E_c + E_p$
Sans frottements	$E_m = \text{cste}$
Travail d'une force	$W = F \times AB \times \cos(\alpha)$
Puissance d'une force	$P = F \times v \times \cos(\beta)$
Travail, puissance d'un couple	$W = C \times \theta \qquad P = C \times \Omega$
Réducteur	$k = \frac{\Omega_m}{\Omega_{charge}} = \frac{N_m}{N_{charge}} > 1$
Réducteur avec pertes	$P_{charge} = \eta\, P_m \qquad C_{charge} = k\, \eta\, C_m$
Treuil, tambour	$v = R \times \Omega_t \qquad C_t = F \times R$
Couple moteur nécessaire	$C_m = \frac{C_{charge}}{k\, \eta}$
Levage, convoyeur	$C_r = \text{cste}$
Ventilateur, pompe	$C_r = a\, \Omega^2$
Vis d'Archimède	$C_r = a\, \Omega$
Fraisage, enroulement	$C_r = \frac{a}{\Omega}$
Point de fonctionnement	$C_m(\Omega_f) = C_r(\Omega_f)$

Exercices

Chapitre 10

Forces, couples et mouvements

Exercice 10.1 – Serrage des connexions d'un tableau général ★☆☆

Lors de la maintenance annuelle du tableau général basse tension d'un hôpital, une caméra thermique a révélé un point chaud sur une connexion de jeu de barres : le boulon était mal serré. Le fabricant impose un couple de serrage $C = 70\,\mathrm{N\cdot m}$ pour ces boulons M12. Le technicien dispose d'une clé dynamométrique et d'une visseuse électrique ; on lui demande de vérifier qu'il peut appliquer ce couple dans de bonnes conditions.

Données

- Clé dynamométrique : distance entre l'axe du boulon et le milieu de la poignée $L = 35\,\mathrm{cm}$.
- Clé en croix (pour le desserrage) : les deux mains sont distantes de $D = 40\,\mathrm{cm}$.

1. Rappeler la définition du moment d'une force par rapport à un axe. Calculer la force F que le technicien doit exercer perpendiculairement au manche de la clé dynamométrique.
2. Coincé dans l'armoire, il ne peut pousser qu'avec une force faisant un angle de $70°$ avec le manche. Calculer la nouvelle force nécessaire.
3. Pour la clé en croix, les deux mains exercent des forces opposées : quelle action mécanique forment-elles ? Calculer la force exercée par chaque main pour obtenir $70\,\mathrm{N\cdot m}$.
4. Pour le pré-serrage, la visseuse fait tourner l'écrou à $120\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$ en exerçant un couple moyen de $40\,\mathrm{N\cdot m}$. Calculer sa puissance mécanique utile, puis le travail fourni pendant deux tours de l'écrou.

→ corrigé p. 369

Exercice 10.2 – Navette d'un entrepôt automatisé ★☆☆

Une plateforme logistique de pièces détachées automobiles stocke ses bacs dans un magasin automatisé. Une navette motorisée circule sur un rail horizontal de 45 m pour amener les bacs au poste de préparation. Le variateur qui pilote son moteur impose un profil de vitesse trapézoïdal. Avant d'augmenter les cadences, le responsable méthodes veut connaître la durée d'un trajet et les efforts demandés à la motorisation.

Données

- Masse de la navette chargée : $m = 1\,500\,\mathrm{kg}$.

- ▷ Accélération uniforme depuis l'arrêt jusqu'à $v_{max} = 2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en $t_1 = 2{,}5\,\text{s}$; palier à v_{max} ; décélération uniforme jusqu'à l'arrêt en 2,5 s.
- ▷ Distance totale parcourue : $d = 45\,\text{m}$; forces de frottement (roulement, guidage) : $F_f = 300\,\text{N}$, constantes.

1. Calculer l'accélération a de la navette pendant la première phase.
2. Calculer la distance parcourue pendant l'accélération, puis la durée du palier à vitesse constante et la durée totale du trajet. Tracer l'allure de $v(t)$.
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer la force de traction F que doit exercer la motorisation dans chacune des trois phases. Interpréter le signe obtenu pendant la décélération.
4. Calculer la puissance de traction maximale et la puissance pendant le palier.
5. Calculer l'énergie cinétique de la navette à v_{max}. Que devient cette énergie pendant la décélération ?

→ corrigé p. 369

Exercice 10.3 – Essoreuse d'une blanchisserie industrielle ★★☆

Une blanchisserie qui traite le linge de plusieurs hôtels remplace le moteur de sa laveuse-essoreuse. Pendant l'essorage, le tambour monte à $800\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Le constructeur garantit que la porte reste verrouillée tant que le tambour tourne et que l'arrêt complet, à la fin du cycle, dure moins de 15 s. Le technicien doit vérifier les temps de démarrage et d'arrêt du nouvel ensemble.

Données

- ▷ Virole du tambour (anneau mince) : $m_v = 110\,\text{kg}$, rayon $R = 40\,\text{cm}$.
- ▷ Deux flasques (disques pleins) de 12 kg chacun, de rayon $R = 40\,\text{cm}$.
- ▷ Linge essoré plaqué contre la paroi (anneau mince) : $m_l = 50\,\text{kg}$ à $r = 38\,\text{cm}$ de l'axe.
- ▷ Pendant le démarrage, la courroie exerce sur le tambour un couple constant $C_t = 160\,\text{N}\cdot\text{m}$; frottements : $C_f = 20\,\text{N}\cdot\text{m}$, constant.
- ▷ Transmission par poulies et courroie, de rendement $\eta = 0{,}96$: le moteur tourne 3 fois plus vite que le tambour et le couple sur le tambour vaut $C_t = 3\,\eta\,C_m$. Inertie du moteur négligée.
- ▷ On rappelle : démarrage à Γ constante depuis l'arrêt, $\theta = \frac{1}{2}\,\Gamma\,t^2$; théorème de l'énergie cinétique, $\Delta E_c = \sum W$ (somme des travaux des couples appliqués).

I- Démarrage

1. Calculer le moment d'inertie J de l'ensemble tournant (tambour et linge).
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au tambour et calculer son accélération angulaire Γ.
3. Calculer la vitesse angulaire d'essorage Ω, puis la durée du démarrage. Combien de tours le tambour a-t-il effectués ?

4. Calculer l'énergie cinétique du tambour en fin de démarrage et la puissance mécanique reçue par le tambour à cet instant.
5. Calculer la vitesse de rotation du moteur et le couple qu'il fournit pendant le démarrage.

II- Arrêt

À la fin du cycle, le moteur est découplé et un frein à tambour exerce un couple constant de $150\,\text{N}\cdot\text{m}$, qui s'ajoute aux frottements.

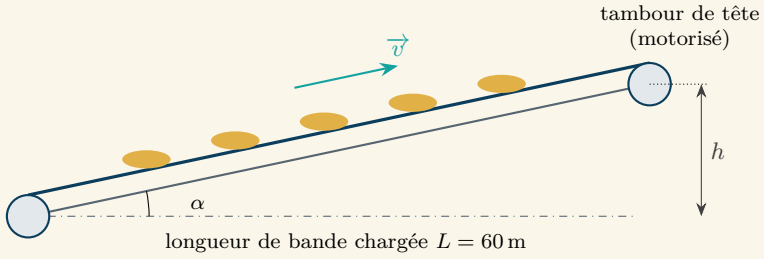
6. Calculer la durée de l'arrêt. L'exigence du constructeur est-elle respectée ?
7. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer le nombre de tours effectués pendant le freinage. Sous quelle forme l'énergie cinétique a-t-elle été dissipée ?

→ corrigé p. 370

Transmissions et entraînements

Exercice 10.4 – Convoyeur à bande d'une carrière ★★☆

Une carrière de granulats installe un convoyeur à bande pour monter les gravillons du concasseur jusqu'au sommet d'un stock. Le bureau d'études doit choisir le motoréducteur qui entraîne le tambour de tête et vérifier le comportement de la bande chargée en cas d'arrêt d'urgence.



Données

- Débit de gravillons : $120\,\text{t}\cdot\text{h}^{-1}$; vitesse de la bande $v = 1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; longueur chargée $L = 60\,\text{m}$, inclinaison $\alpha = 12°$.
- La composante du poids d'une masse m parallèle à une bande inclinée de α vaut $m\,g\sin(\alpha)$.
- Frottements (rouleaux, raclage de la bande), ramenés à la périphérie du tambour : $F_f = 1\,500\,\text{N}$, indépendants du sens de marche.
- Tambour de tête : diamètre $D = 50\,\text{cm}$. Moteur asynchrone : $N_m = 1\,460\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Réducteur : rendement $\eta = 0{,}94$.
- Puissances normalisées des moteurs : 4 ; 5,5 ; 7,5 ; 11 kW.

I- Effort et puissance

1. Montrer que la masse de gravillons présente sur la bande est voisine de 1 333 kg.

2. Calculer la composante du poids de ces gravillons parallèle à la bande, puis l'effort total F que doit fournir le tambour.

3. Calculer la puissance mécanique P_t fournie par le tambour. Vérifier que la part qui sert à élever les gravillons vaut $q_m\, g\, h$, avec q_m le débit massique en $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$ et h la hauteur de levée.

II- Motoréducteur

4. Calculer la vitesse angulaire et la vitesse de rotation du tambour, puis le couple C_t sur son arbre.

5. Calculer le rapport de réduction k nécessaire.

6. Calculer la puissance et le couple que doit fournir le moteur. Choisir sa puissance normalisée.

III- Arrêt d'urgence

7. Moteur arrêté et bande chargée, comparer la composante du poids des gravillons et les frottements. Que se passe-t-il sans dispositif particulier ?

8. Calculer le couple minimal que doit exercer le dispositif anti-retour monté sur l'arbre du tambour.

→ corrigé p. 371

Exercice 10.5 – Ventilateur d'extraction d'une cabine de peinture ★★☆

Dans un atelier de carrosserie industrielle, la cabine de peinture est ventilée par un extracteur entraîné directement par un moteur asynchrone. Le ventilateur tourne en permanence, même la nuit pour maintenir la cabine en dépression, alors qu'un débit réduit suffirait. Le responsable énergie envisage d'installer un variateur de vitesse et demande une étude.

Données

- Ventilateur : couple résistant $C_r = a\,\Omega^2$; il absorbe 5,0 kW à $1\,450\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$. Moment d'inertie de la turbine et du moteur : $J = 2{,}4\,\mathrm{kg \cdot m^2}$.
- Moteur : $P_n = 5{,}5\,\mathrm{kW}$ à $N_n = 1\,460\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$, vitesse de synchronisme $1\,500\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$, rendement 0,88 supposé constant. Dans sa zone utile, sa caractéristique $C_m(\Omega)$ est une droite passant par $(1\,500\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}\,;0\,\mathrm{N \cdot m})$ et par son point nominal.
- Fonctionnement de nuit : 10 heures par jour, 250 jours par an ; prix de l'énergie : 0,15 € le kW · h.

I- Point de fonctionnement sur le réseau

1. Calculer le couple absorbé par le ventilateur à $1\,450\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$ et en déduire a (unité $\mathrm{N \cdot m \cdot s^2 \cdot rad^{-2}}$).

2. Calculer le couple nominal du moteur, puis la pente b de sa caractéristique $C_m = b\,(\Omega_s - \Omega)$.

3. Tracer sur un même graphique $C_r(\Omega)$ et la partie utile de $C_m(\Omega)$ pour N entre 1400 et $1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

4. Déterminer par le calcul le point de fonctionnement (vitesse, couple, puissance utile).

II- Variateur de vitesse

5. La nuit, le variateur réduit la vitesse à $1\,100\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Calculer la puissance absorbée par le ventilateur.

6. Calculer l'économie d'énergie électrique annuelle et le gain financier correspondant.

7. Le variateur démarre le ventilateur avec une rampe de vitesse linéaire jusqu'au point de fonctionnement. Il limite le couple du moteur à 150 % du couple nominal. Montrer qu'une rampe de 15 s n'est pas possible et calculer la durée minimale de la rampe (on raisonnera à la fin de la rampe, où le couple demandé est le plus grand).

→ corrigé p. 372

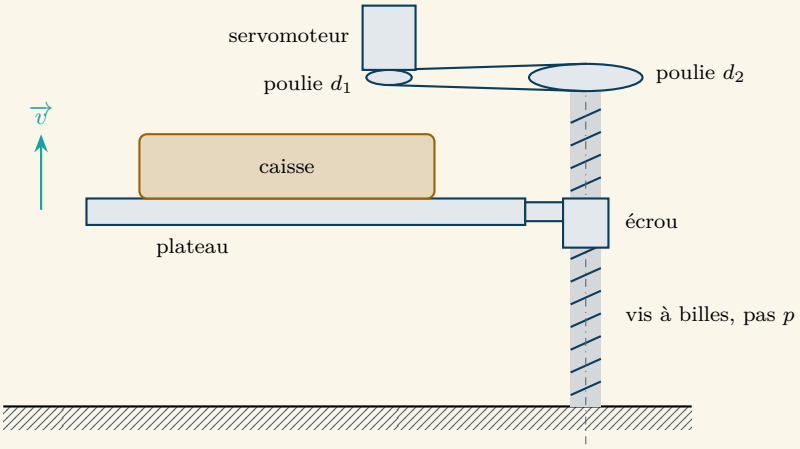
Exercice 10.6 – Table élévatrice d'une ligne d'assemblage ★★★

Sur une ligne d'assemblage de véhicules utilitaires, une table élévatrice remonte chaque caisse de 1,2 m pour la présenter aux opérateurs du poste suivant. La table est soulevée par une vis à billes verticale, entraînée par un servomoteur à travers une courroie crantée. L'entreprise veut augmenter la cadence et demande au technicien de vérifier la motorisation et le comportement de la table à la descente.

Données

- Masse soulevée (caisse et plateau) : $m = 1\,200\,\text{kg}$; frottements des guidages : $F_g = 400\,\text{N}$, opposés au mouvement.
- Vitesse de montée : $v = 50\,\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$; course $h = 1{,}2\,\text{m}$.
- Vis à billes : pas $p = 10\,\text{mm}$, rendement $\eta_v = 0{,}90$; moment d'inertie de la vis et de la poulie d_2 : $J_v = 6{,}0\times10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. L'écrou avance de p à chaque tour : $v = p \times n_v$ (n_v en $\text{tr}\cdot\text{s}^{-1}$) ; en montée, $F\,v = \eta_v\,C_v\,\Omega_v$.
- Courroie crantée : $d_1 = 60\,\text{mm}$ (moteur), $d_2 = 150\,\text{mm}$ (vis), rendement $\eta_c = 0{,}97$; $N_m\,d_1 = N_v\,d_2$ et, en montée, $C_v = \dfrac{d_2}{d_1}\,\eta_c\,C_m$.
- Inertie ramenée sur l'arbre du moteur : $J_{eq} = J_m + J_v\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 + m\left(\dfrac{v}{\Omega_m}\right)^2$.
- À la descente, la charge est motrice : la puissance traverse la vis puis la courroie en sens inverse, et chaque élément transmet vers le moteur η fois la puissance qu'il reçoit.

▷ Servomoteur : moment d'inertie $J_m = 2{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$, couple nominal $10\,\text{N} \cdot \text{m}$.



I- Cinématique

1. Calculer la vitesse de rotation de la vis (en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$) puis celle du moteur.

2. Calculer la durée de la montée à vitesse constante.

II- Montée à vitesse constante

3. Calculer l'effort axial F que doit exercer l'écrou sur le plateau et la puissance utile P_u reçue par la charge.

4. Calculer le couple sur la vis, puis le couple C_m et la puissance P_m du moteur. En déduire le rendement global de la transmission.

5. Comparer l'énergie fournie par le moteur pendant une montée à l'augmentation d'énergie potentielle de la charge.

III- Démarrage

6. Calculer le moment d'inertie J_{eq} ramené sur l'arbre du moteur (formule des données), en détaillant les trois contributions.

7. Le moteur atteint sa vitesse en 0,5 s, à accélération constante. Calculer le couple d'accélération, puis le couple moteur total pendant le démarrage. Conclure sur le rôle de l'inertie dans cette application.

IV- Descente

8. La vis à billes est réversible. Expliquer pourquoi la table chargée redescendrait seule si le moteur n'était pas freiné.

9. À la descente à $50\,\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$, calculer le couple que doit exercer le moteur pour retenir la charge, ainsi que la puissance qu'il reçoit. Comment le moteur fonctionne-t-il alors ?

10. Calculer l'énergie que le variateur doit dissiper dans sa résistance de freinage pendant une descente complète de 1,2 m. La comparer à l'énergie potentielle perdue par la charge et commenter.

→ corrigé p. 374

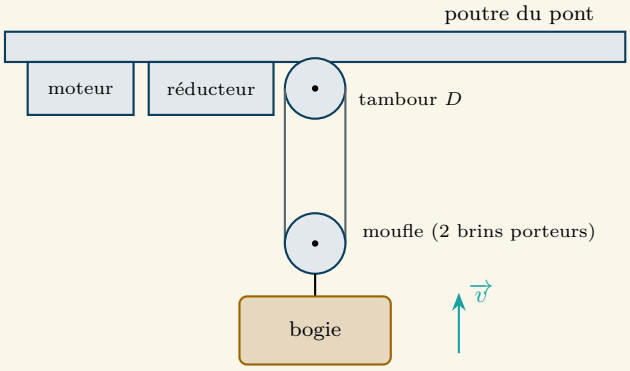
Sujets de type BTS

Chapitre 10

Sujet BTS 10.A – Pont roulant d'un atelier de maintenance ferroviaire

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Un technicentre ferroviaire remplace les mécanismes d'un pont roulant qui sert à lever les bogies des rames. Le pont comporte un **palan de levage** (moteur, frein, réducteur, tambour, moufle) et deux **motorisations de translation**. On vérifie le choix des moteurs et l'énergie à gérer à la descente.



Données

- Charge maximale : $m_c = 10\,\text{t}$; masse du moufle et du crochet : $m_{mo} = 300\,\text{kg}$. Hauteur de levée utile : 6 m.
- Moufle à deux brins : la charge est suspendue à deux brins de câble ; la vitesse du câble au tambour est le double de la vitesse v de la charge et la tension du câble vaut la moitié du poids suspendu.
- Tambour : $D = 40\,\text{cm}$, $J_t = 12\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Réducteur : $k = 180$. Rendement global du mécanisme de levage : $\eta = 0{,}92$. À la descente, la charge est motrice et le moteur reçoit η fois la puissance cédée par la charge.
- Inertie ramenée sur l'arbre du moteur : $J_{eq} = J_m + \dfrac{J_t}{k^2} + m\left(\dfrac{v}{\Omega_m}\right)^2$, avec m la masse suspendue et v sa vitesse.
- Moteur de levage : $N_m = 1\,440\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$; moment d'inertie (moteur et frein) $J_m = 0{,}06\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$; puissances normalisées : 7,5 ; 11 ; 15 kW.
- Translation : masse du pont et du chariot 18 t ; résistance au roulement

70 N par tonne déplacée ; vitesse $40\,\text{m}\cdot\text{min}^{-1}$ atteinte en 4 s ; deux moteurs identiques de 2,2 kW à $1\,420\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, rendement de chaque transmission 0,90, roues motrices de diamètre 315 mm. Le variateur autorise 150 % de la puissance nominale pendant les accélérations.

Partie A – Levage en régime permanent

A.1. Calculer la vitesse angulaire du moteur et celle du tambour. En déduire la vitesse du câble puis la vitesse de levage v, en $\text{m}\cdot\text{min}^{-1}$.

A.2. Calculer le poids suspendu à pleine charge, la tension du câble et le couple C_t sur l'arbre du tambour.

A.3. Calculer la puissance utile de levage, puis la puissance et le couple du moteur. Choisir le moteur.

Partie B – Démarrage en montée

B.1. Calculer le moment d'inertie J_{eq} ramené sur l'arbre du moteur. Quelle contribution est prépondérante ?

B.2. Le moteur atteint sa vitesse en 1 s. Calculer le couple moteur pendant le démarrage et le comparer au couple nominal du moteur choisi.

Partie C – Descente de la charge

C.1. À la descente, à la même vitesse, expliquer pourquoi le moteur fonctionne en génératrice.

C.2. Calculer la puissance mécanique reçue par le moteur et le couple qu'il doit exercer pour retenir la charge.

C.3. Calculer l'énergie que doit absorber la résistance de freinage du variateur pendant une descente de 6 m, en kJ puis en $\text{kW}\cdot\text{h}$.

Partie D – Translation du pont

D.1. Calculer la masse totale déplacée (pont, chariot et charge maximale), l'accélération et la force de résistance au roulement.

D.2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour calculer la force de traction totale pendant l'accélération, puis à vitesse constante.

D.3. Calculer la puissance que doit fournir chaque moteur en fin d'accélération et à vitesse constante. Les moteurs installés conviennent-ils ?

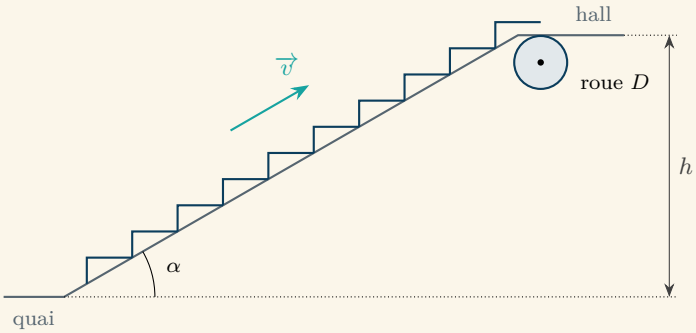
D.4. Calculer la vitesse de rotation des roues et le rapport de réduction des motoréducteurs de translation.

→ corrigé p. 376

Sujet BTS 10.B – Escalier mécanique d'une gare

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une gare régionale rénove un escalier mécanique qui relie le quai souterrain au hall. L'exploitant veut un entraînement par variateur permettant une vitesse réduite lorsque personne n'emprunte l'escalier, et la récupération de l'énergie lorsque l'escalier fonctionne en descente. Le bureau d'études doit vérifier le choix du moteur, chiffrer les économies attendues et dimensionner le frein de sécurité.



Données

- Dénivelé $h = 6\,\text{m}$; inclinaison $\alpha = 30°$; vitesse nominale des marches $v = 0{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- Charge maximale : 60 personnes de 75 kg présentes simultanément sur l'escalier.
- Frottements (chaînes, galets, mains courantes), ramenés aux marches : $F_f = 2\,500\,\text{N}$, constants, opposés au mouvement.
- Marches et chaînes : masse en mouvement $m_e = 3\,000\,\text{kg}$; leurs poids se compensent (autant de marches montent que descendent).
- Roue d'entraînement des chaînes : $D = 70\,\text{cm}$; réducteur $k = 107$, rendement 0,90 dans les deux sens (en descente, le moteur reçoit 0,90 fois la puissance cédée par la charge).
- La composante du poids d'une masse m parallèle à l'escalier vaut $m\,g\sin(\alpha)$.
- Moteur : $N_m = 1\,460\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$, moment d'inertie $J_m = 0{,}10\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$; puissances normalisées 11 ; 15 ; 18,5 kW.

Partie A – Cinématique

A.1. Calculer la longueur parcourue par une marche entre le quai et le hall et la durée du trajet.

A.2. Calculer la vitesse de rotation de la roue d'entraînement et vérifier la valeur du rapport de réduction k.

Partie B – Montée à pleine charge

B.1. Calculer la composante du poids des passagers parallèle à l'escalier, puis l'effort total à fournir par les chaînes.

B.2. Calculer la puissance et le couple sur l'arbre de la roue d'entraînement.

B.3. Calculer la puissance et le couple du moteur. Choisir sa puissance normalisée.

Partie C – Descente à pleine charge

C.1. L'escalier fonctionne maintenant en descente, toujours à pleine charge. Calculer l'effort exercé par les chaînes et montrer que le moteur fonctionne en génératrice.

C.2. Calculer la puissance renvoyée au réseau par le variateur régénératif (pertes du variateur et du moteur négligées) et l'énergie récupérée pendant la durée d'un trajet.

Partie D – Vitesse réduite

D.1. Sans passagers, calculer la puissance que doit fournir le moteur à $0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, puis à la vitesse réduite de $0{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

D.2. L'escalier reste vide 10 heures par jour. Calculer l'économie d'énergie mécanique réalisée chaque jour grâce à la vitesse réduite.

D.3. Le moteur a un rendement de 0,92. Calculer l'économie d'énergie électrique sur une année (365 jours) et le gain correspondant, au prix de 0,15 € le $\mathrm{kW\cdot h}$.

Partie E – Freinage d'urgence en descente

La norme limite la décélération des marches lors d'un arrêt d'urgence. On étudie un arrêt en descente, à pleine charge, avec une décélération de $0{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, assurée par un frein monté sur l'arbre du moteur.

E.1. Montrer que l'inertie du moteur équivaut, ramenée aux marches, à une masse en translation $m_{mot} = J_m\left(\dfrac{\Omega_m}{v}\right)^2$, et la calculer. Calculer la masse équivalente totale à arrêter.

E.2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour calculer la force de freinage nécessaire, ramenée aux marches.

E.3. En déduire le couple que doit exercer le frein sur l'arbre du moteur (on négligera ici les pertes du réducteur).

E.4. Calculer la durée de l'arrêt et la distance parcourue par les marches pendant le freinage, la décélération étant supposée constante.

→ corrigé p. 377

Corrigés

Chapitre 10

Forces, couples et mouvements

✓ Corrigé de l'exercice 10.1 – Serrage des connexions d'un tableau général

1. Le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de son intensité par son bras de levier (distance de l'axe à la droite d'action) : $M = F \times d$. Force perpendiculaire au manche : $d = L$.

$$F = \frac{C}{L} = \frac{70}{0{,}35} \quad \text{soit} \quad \boxed{F = 200\,\text{N}}$$

2. Le bras de levier devient $d = L\sin(70°)$:

$$F' = \frac{C}{L\sin(70°)} = \frac{70}{0{,}35 \times 0{,}940} \quad \text{soit} \quad \boxed{F' \approx 213\,\text{N}}$$

L'effort augmente d'environ 6 % : l'angle reste acceptable.

3. Deux forces opposées, de même intensité, de droites d'action parallèles et distinctes forment un **couple**, de moment $C = F \times D$:

$$F = \frac{C}{D} = \frac{70}{0{,}40} \quad \text{soit} \quad \boxed{F = 175\,\text{N}} \text{ par main}$$

4. $\Omega = \dfrac{\pi}{30} \times 120 \approx 12{,}57\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $P = C\,\Omega = 40 \times 12{,}57$ soit $\boxed{P \approx 503\,\text{W}}$

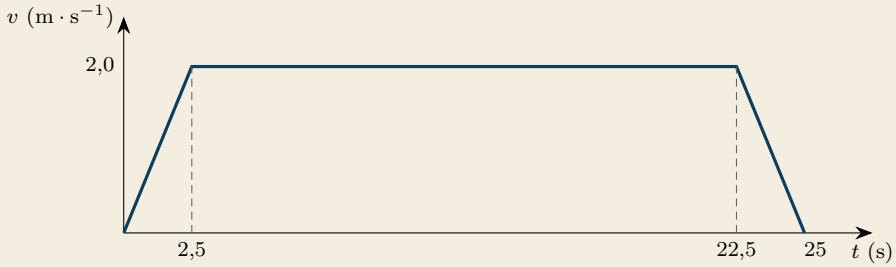
Deux tours : $\theta = 2 \times 2\pi = 4\pi\,\text{rad}$ et $W = C\,\theta = 40 \times 4\pi$ soit $\boxed{W \approx 503\,\text{J}}$ (deux tours à $2\,\text{tr}\cdot\text{s}^{-1}$ durent 1 s : on retrouve $W = P \times \Delta t$).

✓ Corrigé de l'exercice 10.2 – Navette d'un entrepôt automatisé

1. $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{2{,}0}{2{,}5}$ soit $\boxed{a = 0{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$

2. Accélération : $d_1 = \frac{1}{2}\,a\,t_1^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}8 \times 2{,}5^2 = 2{,}5\,\text{m}$; la décélération, symétrique, couvre aussi 2,5 m.

Palier : $d_2 = 45 - 2 \times 2{,}5 = 40\,\text{m}$, parcourus en $t_2 = \dfrac{40}{2{,}0} = 20\,\text{s}$. Durée totale : $2{,}5 + 20 + 2{,}5$ soit $\boxed{T = 25\,\text{s}}$



3. Selon l'axe du mouvement, PFD : $F - F_f = m\,a$, d'où $F = m\,a + F_f$.

Accélération : $F = 1500 \times 0{,}8 + 300$ soit $\boxed{F = 1\,500\,\text{N}}$

Palier ($a = 0$) : $F = F_f = 300\,\text{N}$; décélération ($a = -0{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) : $F = -1200 + 300 = -900\,\text{N}$.

$F < 0$: la motorisation **freine** la navette ; les frottements seuls ne suffiraient pas à obtenir la décélération voulue.

4. La puissance de traction $P = F\,v$ est maximale à la fin de l'accélération : $P_{max} = 1500 \times 2{,}0$ soit $\boxed{P_{max} = 3{,}0\,\text{kW}}$; palier : $P = 300 \times 2{,}0 = 600\,\text{W}$.

5. $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v_{max}^2 = \frac{1}{2} \times 1500 \times 2{,}0^2$ soit $\boxed{E_c = 3\,000\,\text{J}}$

Pendant la décélération, cette énergie est dissipée en partie par les frottements ($300 \times 2{,}5 = 750\,\text{J}$) et, pour le reste ($2\,250\,\text{J}$), reçue par le moteur qui fonctionne en génératrice : elle est dissipée dans la résistance de freinage du variateur ou renvoyée au réseau.

✓ Corrigé de l'exercice 10.3 – Essoreuse d'une blanchisserie industrielle

I- Démarrage

1. Les moments d'inertie autour du même axe s'additionnent :

$$J_v = m_v\,R^2 = 110 \times 0{,}40^2 = 17{,}6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \qquad J_{fl} = 2 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 0{,}40^2 = 1{,}92\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$J_l = m_l\,r^2 = 50 \times 0{,}38^2 = 7{,}22\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \boxed{J = 26{,}74\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

2. $J\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = C_t - C_f$, d'où

$$\Gamma = \frac{160 - 20}{26{,}74} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Gamma \approx 5{,}24\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}}$$

3. $\Omega = \dfrac{\pi}{30} \times 800 \approx 83{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Démarrage à Γ constante :

$$t_d = \frac{\Omega}{\Gamma} = \frac{83{,}8}{5{,}24} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_d \approx 16{,}0\,\text{s}}$$

$\theta = \frac{1}{2}\,\Gamma\,t_d^2 = \frac{1}{2} \times 5{,}24 \times 16^2 \approx 670\,\text{rad}$, soit $\dfrac{670}{2\pi} \approx 107$ tours.

4. $E_c = \frac{1}{2} J \Omega^2 = \frac{1}{2} \times 26{,}74 \times 83{,}78^2$ soit $\boxed{E_c \approx 93{,}8\,\text{kJ}}$

$P = C_t \Omega = 160 \times 83{,}78 \approx 13{,}4\,\text{kW}$: c'est la puissance maximale, atteinte en fin de démarrage.

5. Le moteur tourne 3 fois plus vite que le tambour : $N_m = 3 \times 800$ soit $\boxed{N_m = 2\,400\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}}$ (moteur alimenté par variateur).

D'après la relation donnée, $C_t = 3\,\eta\,C_m$:

$$C_m = \frac{C_t}{3\,\eta} = \frac{160}{3 \times 0{,}96} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_m \approx 55{,}6\,\text{N} \cdot \text{m}}$$

II- Arrêt

6. Moteur découplé : $J \dfrac{\text{d}\Omega}{\text{d}t} = -(C_{fr} + C_f) = -170\,\text{N} \cdot \text{m}$. Décélération constante :

$$t_a = \frac{J\,\Omega}{C_{fr} + C_f} = \frac{26{,}74 \times 83{,}78}{170} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_a \approx 13{,}2\,\text{s}} < 15\,\text{s}$$

L'exigence est respectée, avec une marge faible (1,8 s) : un linge plus lourd, donc une inertie plus grande, allongerait l'arrêt.

7. $0 - E_c = -(C_{fr} + C_f)\,\theta$:

$$\theta = \frac{E_c}{170} = \frac{93836}{170} \approx 552\,\text{rad} \quad \text{soit} \quad \boxed{\approx 88 \text{ tours}}$$

L'énergie cinétique est transformée en **chaleur** dans le frein (garnitures et tambour de frein) et, pour une petite part, dans les paliers.

Méthode Le PFD donne les **durées** (il fait intervenir $\text{d}\Omega/\text{d}t$) ; le théorème de l'énergie cinétique donne directement les **angles** ou les **distances** parcourus, sans passer par le temps.

Transmissions et entraînements

✓ Corrigé de l'exercice 10.4 – Convoyeur à bande d'une carrière

I- Effort et puissance

1. Débit massique : $q_m = \dfrac{120 \times 1000}{3600} \approx 33{,}3\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Un gravillon reste sur la bande pendant $\dfrac{L}{v} = \dfrac{60}{1{,}5} = 40\,\text{s}$:

$$m = q_m \times \frac{L}{v} = 33{,}33 \times 40 \quad \text{soit} \quad \boxed{m \approx 1\,333\,\text{kg}}$$

2. $F_p = m\,g\sin(\alpha) = 1333 \times 9{,}81 \times \sin(12°) \approx 2\,719\,\text{N}$. À vitesse constante, le tambour compense cette composante et les frottements :

$$F = F_p + F_f = 2719 + 1500 \quad \text{soit} \quad \boxed{F \approx 4\,219\,\text{N}}$$

3. $P_t = F\,v = 4219 \times 1{,}5 \quad$ soit $\quad \boxed{P_t \approx 6{,}33\,\text{kW}}$

Hauteur de levée : $h = L\sin(\alpha) = 60 \times \sin(12°) \approx 12{,}47\,\text{m}$; $q_m\,g\,h = 33{,}33 \times 9{,}81 \times 12{,}47 \approx 4\,079\,\text{W}$, égal à $F_p\,v = 2719 \times 1{,}5$ ✓. Le reste ($1500 \times 1{,}5 = 2\,250\,\text{W}$) est perdu en frottements.

II- Motoréducteur

4. $\Omega_t = \dfrac{v}{R} = \dfrac{1{,}5}{0{,}25} = 6{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $\quad N_t = \dfrac{30}{\pi} \times 6 \approx 57{,}3\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

$$C_t = F \times R = 4219 \times 0{,}25 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_t \approx 1\,055\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

5. $k = \dfrac{N_m}{N_t} = \dfrac{1460}{57{,}3} \quad$ soit $\quad \boxed{k \approx 25{,}5}$

6. $P_m = \dfrac{P_t}{\eta} = \dfrac{6329}{0{,}94} \approx 6{,}73\,\text{kW}$; $\quad \Omega_m = \dfrac{\pi}{30} \times 1460 \approx 152{,}9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$C_m = \frac{P_m}{\Omega_m} = \frac{C_t}{k\,\eta} \approx 44{,}0\,\text{N}\cdot\text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{moteur de } 7{,}5\,\text{kW}}$$

III- Arrêt d'urgence

7. $F_p \approx 2\,719\,\text{N} > F_f = 1\,500\,\text{N}$: moteur arrêté, la composante du poids l'emporte sur les frottements. La bande chargée **repart en arrière**, en accélérant : les gravillons se déversent au pied du convoyeur et le moteur est entraîné en sens inverse.

8. À la limite de l'équilibre, l'anti-retour doit compenser la différence $F_p - F_f$ à la périphérie du tambour :

$$C_{ar} = (F_p - F_f) \times R = (2719 - 1500) \times 0{,}25 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_{ar} \approx 305\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

On choisit un anti-retour avec un coefficient de sécurité, car les frottements diminuent quand la bande est arrêtée ou mouillée.

✓ Corrigé de l'exercice 10.5 – Ventilateur d'extraction d'une cabine de peinture

I- Point de fonctionnement sur le réseau

1. $\Omega = \dfrac{\pi}{30} \times 1450 \approx 151{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $\quad C_r = \dfrac{P}{\Omega} = \dfrac{5000}{151{,}8} \approx 32{,}9\,\text{N}\cdot\text{m}$.

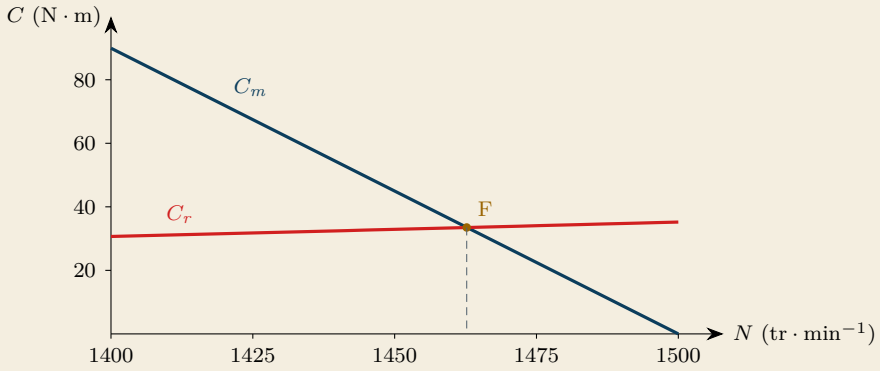
$$a = \frac{C_r}{\Omega^2} = \frac{32{,}93}{151{,}84^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{a \approx 1{,}428 \times 10^{-3}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-2}}$$

2. $C_n = \dfrac{P_n}{\Omega_n} = \dfrac{5500}{152{,}89} \approx 35{,}97\,\text{N}\cdot\text{m}$; $\quad \Omega_s - \Omega_n = 157{,}08 - 152{,}89 = 4{,}19\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$b = \frac{C_n}{\Omega_s - \Omega_n} = \frac{35{,}97}{4{,}19} \quad \text{soit} \quad \boxed{b \approx 8{,}59\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}}$$

3. Quelques points :

N (tr · min^{-1})	1400	1425	1450	1475	1500
C_r (N · m)	30,7	31,8	32,9	34,1	35,2
C_m (N · m)	89,9	67,5	45,0	22,5	0



4. Au point de fonctionnement, $C_m = C_r$: $a\,\Omega^2 = b\,(\Omega_s - \Omega)$, soit $a\,\Omega^2 + b\,\Omega - b\,\Omega_s = 0$. La racine positive vaut

$$\Omega_f = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4\,a\,b\,\Omega_s}}{2\,a} \approx 153{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad \boxed{N_f \approx 1\,463\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$$

$C_f = a\,\Omega_f^2 \approx 33{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}$ et $P_f = C_f\,\Omega_f \approx 5{,}13\,\text{kW}$: le moteur est légèrement sous-chargé ($< 5{,}5\,\text{kW}$).

II- Variateur de vitesse

5. La puissance varie comme Ω^3 : $P' = a\,\Omega'^3$ avec $\Omega' = \dfrac{\pi}{30} \times 1100 \approx 115{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$P' = 1{,}428 \times 10^{-3} \times 115{,}2^3 \quad \text{soit} \quad \boxed{P' \approx 2{,}18\,\text{kW}}$$

6. Puissances électriques absorbées : $\dfrac{5133}{0{,}88} \approx 5{,}83\,\text{kW}$ sans variateur, $\dfrac{2183}{0{,}88} \approx 2{,}48\,\text{kW}$ avec. Économie : $3{,}35\,\text{kW}$ pendant $10 \times 250 = 2\,500\,\text{h}$:

$$\Delta E \approx 3{,}35 \times 2500 \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta E \approx 8\,380\,\text{kW}\cdot\text{h}} \text{ par an}$$

Gain : $8380 \times 0{,}15 \approx 1260$ € par an, sans compter la réduction du bruit.

7. Rampe de 15 s jusqu'à Ω_f : $\Gamma = \dfrac{153{,}2}{15} \approx 10{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ et $J\,\Gamma = 2{,}4 \times 10{,}2 \approx 24{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}$.

En fin de rampe : $C_m = C_r + J\,\Gamma \approx 33{,}5 + 24{,}5 = 58{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}$, supérieur à $1{,}5 \times 35{,}97 \approx 54{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}$: **la rampe de 15 s est impossible**.

Couple d'accélération disponible : $54{,}0 - 33{,}5 = 20{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}$, d'où $\Gamma_{max} = \frac{20{,}5}{2{,}4} \approx 8{,}52\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ et

$$t_{min} = \frac{\Omega_f}{\Gamma_{max}} = \frac{153{,}2}{8{,}52} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{min} \approx 18\,\text{s}}$$

On règle par exemple une rampe de 20 s.

✓ Corrigé de l'exercice 10.6 – Table élévatrice d'une ligne d'assemblage

I- Cinématique

1. $n_v = \dfrac{v}{p} = \dfrac{0{,}050}{0{,}010} = 5\,\text{tr}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $\boxed{N_v = 300\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$

Courroie : $N_m\,d_1 = N_v\,d_2$, d'où $N_m = 300 \times \dfrac{150}{60}$ soit $\boxed{N_m = 750\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$ ($\Omega_m \approx 78{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).

2. $t = \dfrac{h}{v} = \dfrac{1{,}2}{0{,}050}$ soit $\boxed{t = 24\,\text{s}}$

II- Montée à vitesse constante

3. À vitesse constante, $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$: $F = m\,g + F_g = 1200 \times 9{,}81 + 400$ soit $\boxed{F = 12\,172\,\text{N}}$

$P_u = F\,v = 12172 \times 0{,}050$ soit $\boxed{P_u \approx 609\,\text{W}}$

4. Vis : $F\,v = \eta_v\,C_v\,\Omega_v$ avec $v = \dfrac{p\,\Omega_v}{2\pi}$, d'où

$$C_v = \frac{F\,p}{2\pi\,\eta_v} = \frac{12172 \times 0{,}010}{2\pi \times 0{,}90} \approx 21{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Courroie ($k = \dfrac{d_2}{d_1} = 2{,}5$) : $C_m = \dfrac{C_v}{k\,\eta_c} = \dfrac{21{,}5}{2{,}5 \times 0{,}97}$ soit $\boxed{C_m \approx 8{,}88\,\text{N}\cdot\text{m}}$

$P_m = C_m\,\Omega_m = 8{,}88 \times 78{,}54 \approx 697\,\text{W}$; $\eta = \dfrac{609}{697} \approx 0{,}873 = \eta_v \times \eta_c$ ✓.

Le couple reste inférieur au couple nominal (10 N·m) du servomoteur, avec une marge réduite.

5. $W_m = P_m \times t = 697 \times 24 \approx 16{,}7\,\text{kJ}$; $\Delta E_p = m\,g\,h = 1200 \times 9{,}81 \times 1{,}2 \approx 14{,}1\,\text{kJ}$.

La différence (2,6 kJ) correspond aux frottements des guidages ($400 \times 1{,}2 = 480\,\text{J}$) et aux pertes de la vis et de la courroie.

III- Démarrage

6. La vis tourne 2,5 fois moins vite que le moteur ; la charge avance à v quand le moteur tourne à Ω_m :

$$J_{eq} = J_m + \frac{J_v}{k^2} + m\left(\frac{v}{\Omega_m}\right)^2 = 2{,}0\times10^{-3} + \frac{6{,}0\times10^{-3}}{2{,}5^2} + 1200\times\left(\frac{0{,}050}{78{,}54}\right)^2$$

$$J_{eq} = 2{,}0\times10^{-3} + 0{,}96\times10^{-3} + 0{,}49\times10^{-3} \quad \text{soit} \quad \boxed{J_{eq} \approx 3{,}45\times10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

Malgré ses 1 200 kg, la charge ne représente que 14 % de l'inertie ramenée : la vis à pas fin la « démultiplie » énormément.

7. $\Gamma = \dfrac{78{,}54}{0{,}5} \approx 157\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$; $\quad C_{acc} = J_{eq}\,\Gamma \approx 3{,}45\times10^{-3}\times157 \approx 0{,}54\,\text{N}\cdot\text{m}$.

$$C_m = 8{,}88 + 0{,}54 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_m \approx 9{,}42\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

Le couple d'accélération ne représente que 6 % du couple : dans cette application lente, c'est le **poids** de la charge, et non l'inertie, qui dimensionne le moteur. Côté charge, l'effort d'accélération vaut $m\,a = 1200\times0{,}1 = 120\,\text{N}$, contre 12 172 N pour le poids et les frottements.

IV- Descente

8. Une vis réversible transforme un effort axial en couple : le poids de la charge fait tourner la vis, puis la courroie et le moteur. Sans frein ni couple de retenue, la table redescendrait en accélérant. C'est pourquoi le servomoteur est équipé d'un frein à manque de courant, qui bloque la table à l'arrêt et en cas de coupure d'alimentation ; en marche, c'est le couple du moteur, piloté par le variateur, qui retient la charge.

9. À la descente, la charge entraîne : l'effort moteur côté charge est $m\,g - F_g = 11772 - 400 = 11\,372\,\text{N}$ (les frottements s'opposent toujours au mouvement) et les rendements se placent dans l'autre sens :

$$C_m = \frac{(m\,g - F_g)\,p}{2\pi}\times\eta_v\times\frac{\eta_c}{k} = \frac{11372\times0{,}010}{2\pi}\times0{,}90\times\frac{0{,}97}{2{,}5} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_m \approx 6{,}32\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

Puissance reçue par le moteur : $P = C_m\,\Omega_m \approx 6{,}32\times78{,}54 \approx 496\,\text{W}$. Le moteur exerce un couple opposé à sa rotation : il fonctionne **en frein (génératrice)** ; le variateur dissipe cette puissance dans sa résistance de freinage.

10. La descente dure 24 s : $E = P\times t \approx 496\times24$ soit $\boxed{E \approx 11{,}9\,\text{kJ}}$ (pertes du moteur négligées).

La charge perd $m\,g\,h \approx 14{,}1\,\text{kJ}$: environ 2,2 kJ sont dissipés par les guidages (480 J) et dans la vis et la courroie. Le reste, perdu en chaleur dans la résistance, pourrait être renvoyé au réseau par un variateur régénératif.

Bilan d'un cycle montée-descente : le moteur fournit environ 16,7 kJ à la montée et en reçoit 11,9 kJ à la descente. Avec un variateur régénératif (ou un bus continu partagé avec les autres axes de la ligne), l'énergie nette consommée par cycle tomberait à $16{,}7 - 11{,}9 \approx 4{,}8\,\text{kJ}$, soit moins de 30 % de l'énergie fournie à la montée : sur une ligne qui réalise plusieurs centaines de cycles par jour, c'est la principale piste d'économie d'énergie.

Méthode Quand la charge est motrice (descente, décélération), les rendements « changent de côté » : la puissance reçue par le moteur est **plus faible** que la puissance cédée par la charge, $P_m = \eta\, P_{charge}$.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 10.A – Pont roulant d'un atelier de maintenance ferroviaire

Partie A – Levage en régime permanent

A.1. $\Omega_m = \dfrac{\pi}{30} \times 1440 \approx 150{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $\Omega_t = \dfrac{\Omega_m}{k} = \dfrac{150{,}8}{180} \approx 0{,}838\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ($8\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$).

Câble : $v_c = R\,\Omega_t = 0{,}20\times 0{,}838 \approx 0{,}168\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; charge : $v = \frac{v_c}{2} \approx 0{,}083\,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $\boxed{v \approx 5{,}0\,\text{m}\cdot\text{min}^{-1}}$

A.2. $P = (m_c + m_{mo})\,g = 10300 \times 9{,}81 \approx 101{,}0\,\text{kN}$; $T = \dfrac{P}{2} \approx 50{,}5\,\text{kN}$.

$$C_t = T \times R = 50521 \times 0{,}20 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_t \approx 10{,}1\,\text{kN}\cdot\text{m}}$$

A.3. $P_u = P\,v = 101043 \times 0{,}083\,8 \approx 8{,}46\,\text{kW}$ (on vérifie $C_t\,\Omega_t = 10104 \times 0{,}838 \approx 8{,}46\,\text{kW}$).

$$P_m = \frac{P_u}{\eta} = \frac{8465}{0{,}92} \approx 9{,}20\,\text{kW} \qquad C_m = \frac{P_m}{\Omega_m} = \frac{C_t}{k\,\eta} \approx 61{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}$$

$\boxed{\text{moteur de } 11\,\text{kW}}$ (couple nominal $\frac{11000}{150{,}8} \approx 72{,}9\,\text{N}\cdot\text{m}$).

Partie B – Démarrage en montée

B.1. La charge se déplace à v quand le moteur tourne à Ω_m :

$$J_{eq} = J_m + \frac{J_t}{k^2} + m\left(\frac{v}{\Omega_m}\right)^2 = 0{,}06 + \frac{12}{180^2} + 10300 \times \left(\frac{0{,}083\,8}{150{,}8}\right)^2$$

$$J_{eq} = 0{,}060 + 0{,}000\,4 + 0{,}003\,2 \quad \text{soit} \quad \boxed{J_{eq} \approx 0{,}063\,5\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

L'inertie du **moteur et de son frein** représente 94 % du total : le réducteur de rapport 180 rend négligeables le tambour et même la charge de 10 t.

B.2. $\Gamma = \dfrac{150{,}8}{1} = 150{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ et $J_{eq}\,\Gamma \approx 9{,}6\,\text{N}\cdot\text{m}$. PFD sur l'arbre du moteur, le couple résistant ramené valant $61{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}$ (A.3) :

$$C_m = \frac{C_t}{k\,\eta} + J_{eq}\,\Gamma = 61{,}0 + 9{,}6 \quad \text{soit} \quad \boxed{C_m \approx 70{,}6\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

C'est 97 % du couple nominal ($72{,}9\,\text{N}\cdot\text{m}$) : le démarrage en 1 s à pleine charge est possible sans surcharger le moteur.

Partie C – Descente de la charge

C.1. À la descente, le poids de la charge est moteur : il fournit de la puissance au mécanisme. Le moteur doit exercer un couple qui s'oppose à sa rotation pour retenir la charge : sa puissance mécanique $C_m\,\Omega_m$ est négative, il fonctionne en **génératrice**.

C.2. La charge cède $P\,v \approx 8{,}46\,\text{kW}$; les pertes sont prélevées au passage :

$$P_m = \eta\,P\,v = 0{,}92 \times 8465 \approx 7{,}79\,\text{kW}$$

$$C_m = \frac{\eta\,C_t}{k} = \frac{0{,}92 \times 10104}{180} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_m \approx 51{,}6\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

C.3. Énergie potentielle cédée : $P\,h = 101043 \times 6 \approx 606\,\text{kJ}$; énergie reçue par le moteur (pertes du moteur négligées) :

$$E = \eta\,P\,h = 0{,}92 \times 606 \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 558\,\text{kJ} \approx 0{,}155\,\text{kW}\cdot\text{h}}$$

dissipée en $72\,\text{s}$ $(6/0{,}083\,8)$ dans la résistance de freinage, qui doit supporter près de $8\,\text{kW}$.

Partie D – Translation du pont

D.1. $M = 18000 + 10300 = 28\,300\,\text{kg}$; $v = \frac{40}{60} \approx 0{,}667\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $a = \frac{0{,}667}{4} \approx 0{,}167\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $F_r = 70 \times 28{,}3 \approx 1\,981\,\text{N}$.

D.2. PFD selon le rail : $F - F_r = M\,a$.

$$F = 28300 \times 0{,}166\,7 + 1981 \approx 4717 + 1981 \quad \text{soit} \quad \boxed{F \approx 6{,}70\,\text{kN}}$$

À vitesse constante : $F = F_r \approx 1{,}98\,\text{kN}$.

D.3. Fin d'accélération : $F\,v \approx 6698 \times 0{,}667 \approx 4{,}47\,\text{kW}$, soit pour chaque moteur $\frac{4465}{2\times0{,}90} \approx 2{,}48\,\text{kW}$. À vitesse constante : $\frac{1981\times0{,}667}{2\times0{,}90} \approx 0{,}73\,\text{kW}$ par moteur.
En régime permanent, les moteurs sont peu chargés ; pendant l'accélération, $2{,}48\,\text{kW} < 1{,}5 \times 2{,}2 = 3{,}3\,\text{kW}$: **les moteurs de** $2{,}2\,\text{kW}$ **conviennent**.

D.4. $\Omega_r = \dfrac{v}{R} = \dfrac{0{,}667}{0{,}157\,5} \approx 4{,}23\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $N_r \approx 40{,}4\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$;

$$k' = \frac{1420}{40{,}4} \quad \text{soit} \quad \boxed{k' \approx 35}$$

✓ Corrigé du sujet BTS 10.B – Escalier mécanique d'une gare

Partie A – Cinématique

A.1. $L = \dfrac{h}{\sin(\alpha)} = \dfrac{6}{0{,}5} = 12\,\text{m}$; $t = \dfrac{L}{v} = \dfrac{12}{0{,}5}$ soit $\boxed{t = 24\,\text{s}}$

A.2. $\Omega_r = \dfrac{v}{R} = \dfrac{0{,}5}{0{,}35} \approx 1{,}429\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ $(13{,}64\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1})$; $k = \dfrac{1460}{13{,}64} \approx 107$ ✓

Partie B – Montée à pleine charge

B.1. $m_p = 60 \times 75 = 4\,500\,\text{kg}$; $F_p = m_p\, g \sin(\alpha) = 4500 \times 9{,}81 \times 0{,}5 \approx 22{,}07\,\text{kN}$.
À vitesse constante, les poids des marches se compensent : $F = F_p + F_f = 22073 + 2500$ soit $\boxed{F \approx 24{,}6\,\text{kN}}$

B.2. $P_r = F\,v = 24573 \times 0{,}5 \approx 12{,}3\,\text{kW}$; $C_r = F\,R = 24573 \times 0{,}35$ soit $\boxed{C_r \approx 8{,}60\,\text{kN}\cdot\text{m}}$

B.3. $P_m = \dfrac{P_r}{\eta} = \dfrac{12286}{0{,}90} \approx 13{,}65\,\text{kW}$; $C_m = \dfrac{P_m}{\Omega_m} = \dfrac{13651}{152{,}9} \approx 89{,}3\,\text{N}\cdot\text{m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{moteur de } 15\,\text{kW}}$

Partie C – Descente à pleine charge

C.1. Dans le sens de la descente, la composante du poids est motrice et les frottements résistants. À vitesse constante, l'effort des chaînes (compté positivement dans le sens du mouvement) vaut :

$$F' = F_f - F_p = 2500 - 22073 \quad \text{soit} \quad \boxed{F' \approx -19{,}6\,\text{kN}}$$

$F' < 0$: les chaînes **retiennent** les passagers ; la puissance $F'\,v$ est négative, le moteur reçoit de la puissance : il fonctionne en génératrice.

C.2. Puissance cédée par la charge : $|F'|\,v \approx 9{,}79\,\text{kW}$; reçue par le moteur et renvoyée au réseau : $0{,}90 \times 9786 \approx 8{,}81\,\text{kW}$.

$$E = 8{,}81\,\text{kW} \times 24\,\text{s} \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 211\,\text{kJ} \approx 0{,}059\,\text{kW}\cdot\text{h}} \text{ par trajet}$$

Partie D – Vitesse réduite

D.1. Sans passagers, seul F_f est à vaincre : $P_m = \dfrac{F_f v}{\eta}$.
À $0{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: $\dfrac{2500 \times 0{,}5}{0{,}90} \approx 1\,389\,\text{W}$; à $0{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: $\dfrac{2500 \times 0{,}2}{0{,}90} \approx 556\,\text{W}$.

D.2. $\Delta E = (1389 - 556) \times 10$ soit $\boxed{\Delta E \approx 8{,}3\,\text{kW}\cdot\text{h}}$ par jour.

D.3. Énergie électrique économisée : $\frac{8{,}33}{0{,}92} \approx 9{,}06\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par jour, soit

$$9{,}06 \times 365 \quad \text{soit} \quad \boxed{\approx 3\,310\,\text{kW}\cdot\text{h}} \text{ par an,}$$

et un gain d'environ $3306 \times 0{,}15 \approx 500$ € par an.

Partie E – Freinage d'urgence en descente

E.1. L'énergie cinétique du rotor doit être égale à celle d'une masse m_{mot} se déplaçant à v : $\frac{1}{2} J_m \Omega_m^2 = \frac{1}{2} m_{mot} v^2$, d'où la relation proposée.

$$m_{mot} = 0{,}10 \times \left(\frac{152{,}9}{0{,}5}\right)^2 \approx 9\,350\,\text{kg}$$

$$m_{eq} = 4500 + 3000 + 9350 \quad \text{soit} \quad \boxed{m_{eq} \approx 16\,850\,\text{kg}}$$

Le petit rotor « pèse » plus que tous les passagers : son inertie est multipliée par le carré du rapport $\Omega_m / v \approx 306$.

E.2. Sens positif : sens du mouvement (descente). La décélération vaut $a = -0{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; le frein exerce $-F_{fr}$:

$$F_p - F_f - F_{fr} = m_{eq}\, a$$

$$F_{fr} = 22073 - 2500 + 16850 \times 0{,}6 \quad \text{soit} \quad \boxed{F_{fr} \approx 29{,}7\,\text{kN}}$$

E.3. Puissance conservée (pertes négligées) : $C_{fr}\,\Omega_m = F_{fr}\,v$, d'où

$$C_{fr} = \frac{F_{fr}\,v}{\Omega_m} = \frac{29683 \times 0{,}5}{152{,}9} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_{fr} \approx 97\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

Ce couple est voisin du couple nominal du moteur de 15 kW ($\frac{15000}{152{,}9} \approx 98\,\text{N}\cdot\text{m}$) : le frein doit être dimensionné en conséquence.

E.4. Mouvement uniformément décéléré : $t = \dfrac{v}{|a|} = \dfrac{0{,}5}{0{,}6} \approx 0{,}83\,\text{s}$; distance :

$$d = \frac{1}{2}\,|a|\,t^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}6 \times 0{,}833^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{d \approx 0{,}21\,\text{m}}$$

Un peu moins d'une demi-marche : l'arrêt est rapide sans être brutal pour les passagers.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ calculer un moment, un couple ; appliquer le PFD ; — ex. 10.1 à 10.3
- ☐ calculer énergies, travaux et puissances ; — ex. 10.2, 10.3
- ☐ utiliser réducteur, poulies, treuil et vis ; — ex. 10.4, 10.6
- ☐ ramener couples et inerties au moteur. — sujets A, B

Notes

CHAPITRE

11

Un peu de chimie et de thermodynamique

Piles, combustion, énergie thermique et pompe à chaleur

Dans ce chapitre

- Oxydoréduction, piles, accumulateurs, pile à combustible
- Modèle $U = E - rI$, capacité et énergie stockée
- Cyclabilité et technologies d'accumulateurs
- Combustion, pouvoir calorifique PCI et PCS
- Température, chaleur, capacité thermique massique
- Changements d'état, pompe à chaleur, machine frigorifique

Objectifs

- ✓ Décrire le fonctionnement d'une pile et repérer ses bornes
- ✓ Dimensionner une batterie (capacité, énergie, autonomie)
- ✓ Calculer la masse de combustible nécessaire à un besoin d'énergie
- ✓ Faire un bilan thermique et évaluer le COP d'une pompe à chaleur

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 11

Cours — Chapitre 11

Le technicien électrotechnicien rencontre la chimie et la thermodynamique partout : batteries d'une alimentation sans interruption ou d'un chariot élévateur, groupe électrogène qui brûle du gazole, chaudière d'un réseau de chaleur, ballon d'eau chaude, refroidissement d'un four ou d'un transformateur. Ce chapitre donne les outils pour faire, dans chacun de ces cas, un **bilan d'énergie** chiffré.

11.1 Oxydoréduction et piles électrochimiques

Oxydant, réducteur, oxydoréduction

D

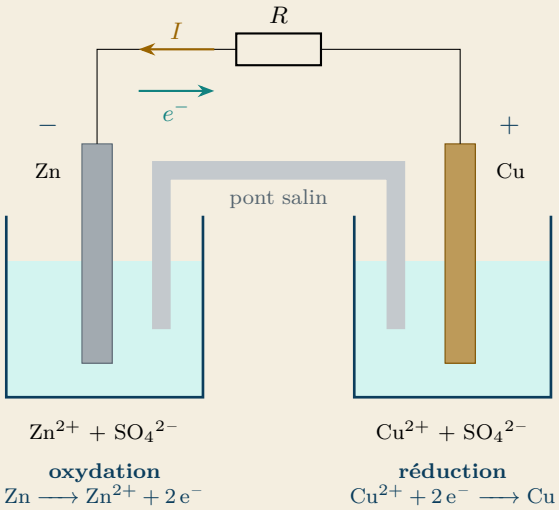
Définition Un **réducteur** est une espèce chimique capable de **céder** un ou plusieurs électrons ; un **oxydant** est une espèce capable d'en **capter**. Les deux formes d'un même élément forment un **couple oxydant/réducteur**, noté Ox/Red, associé à une demi-équation :

$$\mathrm{Ox} + n\,e^- \rightleftarrows \mathrm{Red} \qquad \text{exemples : } \mathrm{Zn^{2+}/Zn},\quad \mathrm{Cu^{2+}/Cu},\quad \mathrm{O_2/H_2O},\quad \mathrm{H^+/H_2}$$

Oxydation : perte d'électrons par le réducteur. **Réduction** : gain d'électrons par l'oxydant. Une **réaction d'oxydoréduction** est un transfert d'électrons du réducteur d'un couple vers l'oxydant d'un autre couple.

Plongée dans une solution de sulfate de cuivre, une lame de zinc se recouvre de cuivre : le zinc cède directement ses électrons aux ions cuivre, et l'énergie libérée est perdue en chaleur. Une **pile** sépare les deux couples dans deux compartiments : les électrons sont **obligés de passer par le circuit extérieur**, où ils fournissent un travail électrique.

Principe d'une pile : la pile Daniell



À retenir · Fonctionnement d'une pile

- **Borne** − : siège de l'**oxydation** ; le réducteur cède des électrons, qui partent dans le circuit extérieur.
- **Borne** + : siège de la **réduction** ; l'oxydant capte les électrons qui arrivent du circuit extérieur.
- Hors de la pile, le courant I va de la borne + vers la borne − ; les électrons circulent en sens inverse, de − vers +.

Bilan de la pile Daniell : $\mathrm{Zn} + \mathrm{Cu}^{2+} \longrightarrow \mathrm{Zn}^{2+} + \mathrm{Cu}$.

Le **pont salin** (gel contenant des ions) ferme le circuit à l'intérieur de la pile et maintient l'électroneutralité des deux solutions. La pile s'arrête quand l'un des réactifs (ici le zinc ou les ions cuivre) est épuisé.

Pile, accumulateur, batterie

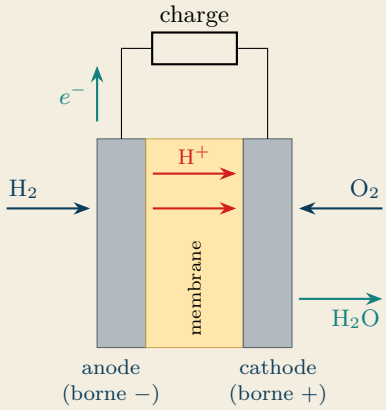
Définition Une **pile** convertit de l'énergie chimique en énergie électrique ; elle n'est plus utilisable quand ses réactifs sont épuisés. Un **accumulateur** est une pile **rechargeable** : sa réaction chimique est réversible. Une **batterie** est une association de plusieurs accumulateurs (éléments ou cellules) en série et/ou en parallèle ; dans le langage courant, on dit souvent « batterie » pour un simple accumulateur.

Charge et décharge. En **décharge**, la réaction est spontanée : l'accumulateur fonctionne en générateur. En **charge**, un générateur extérieur (le chargeur) impose un courant de sens contraire : les électrons sont forcés de circuler dans l'autre sens, les réactions aux électrodes sont inversées et les réactifs sont reconstitués. L'accumulateur est alors un récepteur.

Piège classique Au cours de la charge, les rôles s'inversent : l'électrode où se produisait l'oxydation devient le siège d'une réduction. On repère donc toujours les bornes + et − par le **fonctionnement en décharge** (c'est ce qu'indique le marquage), et non par le sens du courant à un instant donné.

La pile à combustible

Une **pile à combustible** produit de l'électricité à partir de dihydrogène $\mathrm{H_2}$ et du dioxygène $\mathrm{O_2}$ de l'air. Contrairement à une pile classique, elle ne s'use pas : elle fonctionne tant qu'on l'alimente en combustible, comme un moteur alimenté par un réservoir. Elle ne rejette que de l'eau et de la chaleur (pas de $\mathrm{CO_2}$ à l'utilisation), elle est silencieuse et sans pièce mobile, et le plein de dihydrogène se fait en quelques minutes. En revanche, le dihydrogène est aujourd'hui surtout produit à partir d'énergies fossiles, son stockage sous haute pression est délicat et le catalyseur (platine) coûte cher. On la trouve dans des bus, des trains, des chariots élévateurs et des groupes de secours.



Anode (oxydation) :
$H_2 \longrightarrow 2\,H^+ + 2\,e^-$

Cathode (réduction) :
$O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- \longrightarrow 2\,H_2O$

Bilan : $2\,H_2 + O_2 \longrightarrow 2\,H_2O$

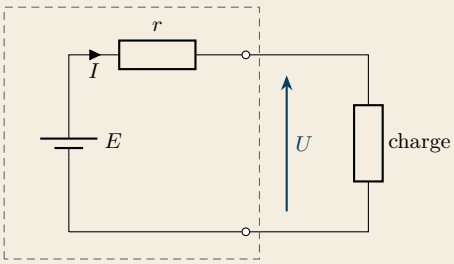
Les ions H^+ traversent la membrane ; les électrons passent par la charge.

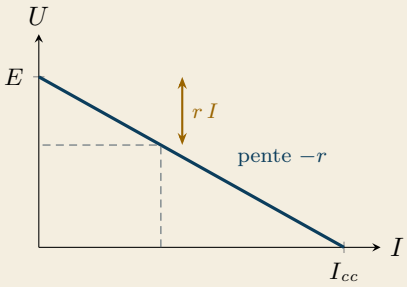
11.2 Modèle électrique d'un générateur électrochimique

Force électromotrice et résistance interne

D

Définition La **force électromotrice** (f.é.m.) E d'une pile ou d'un accumulateur est la tension à ses bornes **à vide**, lorsqu'il ne débite aucun courant. Elle dépend des couples mis en jeu : environ 1,5 V pour une pile alcaline, 2 V pour un élément au plomb, 3,7 V pour un élément lithium-ion. Lorsque le générateur débite, sa tension diminue à cause de sa **résistance interne** r (électrolyte, électrodes, connexions).





★

À retenir · Modèle d'un générateur électrochimique

$$U = E - r \times I$$

E : f.é.m. (V) ; r : résistance interne (Ω) ; I : courant débité (A). Puissance fournie à la charge : $P = U\,I$; pertes par effet Joule internes : $r\,I^2$.

C'est le modèle de Thévenin du chapitre 1 (voir § 1.4) : E joue le rôle de E_{th} et r celui de R_{th}. On détermine E par une mesure à vide, puis r par une mesure en débit : $r = \frac{E-U}{I}$.

Ex

Exemple : batterie de perceuse sans fil Un bloc lithium-ion de f.é.m. $E = 18\,\text{V}$

Ex

et de résistance interne $r = 0{,}15\,\Omega$ débite $I = 12\,\text{A}$ lors d'un perçage :

$$U = 18 - 0{,}15 \times 12 = 16{,}2\,\text{V} \qquad P = U\,I = 16{,}2 \times 12 \approx 194\,\text{W}$$

$$r\,I^2 = 0{,}15 \times 12^2 \approx 21{,}6\,\text{W}$$

Les 21,6 W perdus chauffent la batterie : c'est pourquoi un bloc chauffe quand on le sollicite fortement.

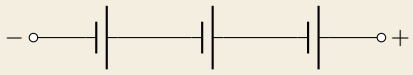
✗

Piège classique La f.é.m. n'est pas la tension « en service » : un voltmètre branché sur une batterie à vide affiche E, mais la tension disponible en débit est plus faible. En court-circuit ($U = 0$), la relation $U = E - r\,I$ donne $I = E/r$: ce courant est énorme (ici 120 A) et présente un risque d'incendie, d'où le fusible placé au plus près de la borne +.

Associer des éléments

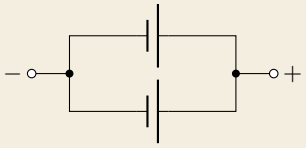
Un élément ne fournit que quelques volts et quelques ampères-heures : une batterie associe n_s éléments **en série** pour obtenir la tension voulue, et n_p branches **en parallèle** pour augmenter la capacité. On note l'association « $n_s\text{S}\,n_p\text{P}$ ».

3 éléments en série (3S)



tension ×3, capacité inchangée

2 branches en parallèle (2P)



tension inchangée, capacité ×2

\+

Batterie $n_s\text{S}\,n_p\text{P}$ d'éléments identiques $(E_1\,;r_1\,;Q_1)$ – hors programme

$$E = n_s\,E_1 \qquad r = \frac{n_s\,r_1}{n_p} \qquad Q_{max} = n_p\,Q_1 \qquad \text{nombre d'éléments : } n_s \times n_p$$

Ex

Exemple : batterie de trottinette électrique Pack 10S3P d'éléments lithium-ion 3,6 V – 3,0 A · h, de résistance interne 30 mΩ chacun : $E = 10 \times 3{,}6 = 36\,\text{V}$; $Q_{max} = 3 \times 3 = 9\,\text{A}\cdot\text{h}$; $r = \frac{10 \times 0{,}030}{3} = 0{,}10\,\Omega$; 30 éléments au total.

✗

Piège classique On n'associe que des éléments **identiques et au même état de charge**. En parallèle, deux éléments de f.é.m. différentes échangent un courant entre eux, même à vide ; en série, l'élément le plus faible se décharge le premier et peut être détérioré. C'est pourquoi les batteries lithium-ion sont pilotées par un **BMS** (*Battery Management System*), qui surveille et équilibre la tension de chaque élément.

11.3 Capacité et énergie stockée

Capacité

D

Définition La **capacité** Q_{max} d'une pile ou d'un accumulateur est la quantité d'électricité maximale qu'il peut débiter. S'il débite un courant constant I pendant la durée Δt_{max} jusqu'à décharge complète :

$$Q_{max} = I \times \Delta t_{max}$$

Elle s'exprime en **ampères-heures** (A · h) si Δt_{max} est en heures ; 1 A · h = 3 600 C (coulombs).

Une batterie de 60 A·h peut débiter 3 A pendant 20 h, ou 6 A pendant 10 h. Le constructeur précise le régime de décharge : la capacité réellement disponible diminue quand le courant de décharge augmente et quand la température baisse.

Énergie stockée et énergie spécifique

★

À retenir

$$E_e = Q_{max} \times E \qquad \mathcal{E}_m = \frac{Q_{max} \times E}{m}$$

E_e : énergie stockée (W · h) ; Q_{max} : capacité (A · h) ; E : f.é.m. (V) ; $\mathcal{E}_m$: énergie spécifique (W · h · kg^{-1}) ; m : masse de l'accumulateur (kg).

Ex

Exemple : bloc autonome d'éclairage de sécurité Un accumulateur au plomb 12 V de masse $m = 2{,}3$ kg peut débiter 0,35 A pendant 20 h :

$$Q_{max} = 0{,}35 \times 20 = 7 \text{ A} \cdot \text{h}$$

$$E_e = 7 \times 12 = 84 \text{ W} \cdot \text{h}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{84}{2{,}3} \approx 37 \text{ W} \cdot \text{h} \cdot \text{kg}^{-1}$$

L'énergie spécifique (ou énergie massique) indique la « densité » de stockage : plus elle est grande, plus la batterie est légère pour une même énergie stockée.

✗

Piège classique Une capacité en A · h n'est pas une énergie : deux batteries de 100 A · h, l'une en 12 V et l'autre en 48 V, stockent 1,2 kW · h et 4,8 kW · h. Pour comparer des batteries, on compare des W · h.

Capacité utile et autonomie

Décharger complètement un accumulateur l'abîme. On limite la **profondeur de décharge** (*DoD*, *Depth of Discharge*) : seule une fraction k de la capacité nominale Q_n est utilisée (environ 50 % pour le plomb, 70 % à 90 % pour le lithium).

Dimensionner une batterie – hors programme

$$Q_u = k \times Q_n \qquad E_u = U \times Q_u \qquad \Delta t = \frac{E_u}{P_{bat}}$$

Q_u : capacité utile ; E_u : énergie utile ; P_{bat} : puissance fournie par la batterie ; Δt : autonomie.

Méthode : dimensionner la batterie d'une ASI.

1. Calculer la puissance que doit fournir la batterie (η : rendement de l'onduleur) :
$$P_{bat} = \frac{P_{charge}}{\eta}$$
2. Calculer l'énergie utile pour l'autonomie demandée :
$$E_u = P_{bat} \times \Delta t$$
3. En déduire la capacité utile, puis la capacité nominale :
$$Q_u = \frac{E_u}{U} \qquad Q_n = \frac{Q_u}{k}$$
et choisir la valeur normalisée immédiatement supérieure.

Exemple : alimentation sans interruption (ASI) d'un serveur Charge $P_{charge} = 3\,\text{kW}$, rendement de l'onduleur (voir § 8.7) $\eta = 0{,}94$, batterie de 240 V, autonomie 15 min, 80 % de la capacité utilisable :

$$P_{bat} = \frac{3000}{0{,}94} \approx 3\,190\,\text{W} \qquad E_u = 3190 \times 0{,}25 \approx 798\,\text{W}\cdot\text{h}$$

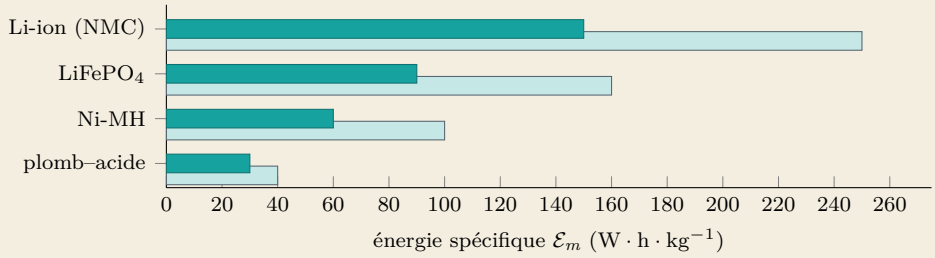
$$Q_u = \frac{798}{240} \approx 3{,}32\,\text{A}\cdot\text{h} \qquad Q_n = \frac{3{,}32}{0{,}8} \approx 4{,}2\,\text{A}\cdot\text{h}$$

Parmi les blocs de 5, 7 et 9 A · h, on choisit 5 A · h.

Cyclabilité et technologies

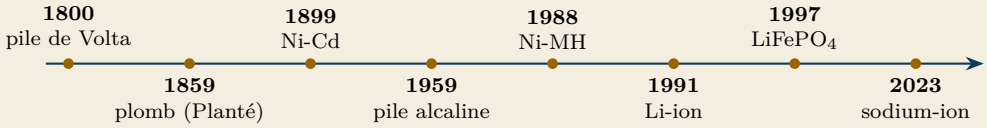
Définition La **cyclabilité** d'un accumulateur est le nombre de cycles charge/décharge qu'il supporte avant de perdre environ 20 % de sa capacité initiale.

Technologie	Tension d'un élément	$\mathcal{E}_m$ (W · h · kg^{-1})	Cyclabilité
plomb–acide	2 V	30 à 40	300 à 800
Ni-MH	1,2 V	60 à 100	500 à 1 000
Li-ion (NMC)	3,7 V	150 à 250	1 000 à 2 000
$LiFePO_4$	3,2 V	90 à 160	2 000 à 5 000



barre foncée : valeur basse ; barre claire : valeur haute de l'énergie spécifique

Le **plomb** (Planté, 1859) reste bon marché et robuste : batteries de démarrage, éclairages de sécurité, alarmes, ASI. Le **lithium-ion** (commercialisé en 1991) s'est imposé dans les appareils portables et les véhicules électriques grâce à son énergie spécifique ; la variante **LiFePO$_4$**, plus sûre et plus durable, équipe le stockage stationnaire et de nombreux chariots. Les batteries sodium-ion (sans lithium ni cobalt) et « tout-solide » sont en développement.

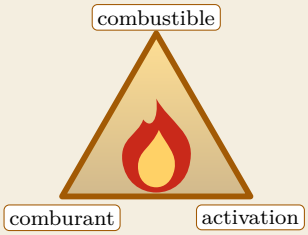


11.4 Combustion

Principe : le triangle du feu

D

Définition Une **combustion** est une réaction d'oxydoréduction entre un **combustible** (réducteur : bois, charbon, gazole, gaz naturel, propane, dihydrogène, poussières métalliques…) et un **comburant** (oxydant : le plus souvent le dioxygène de l'air). Elle est déclenchée par une **énergie d'activation** : flamme, étincelle, point chaud.



Triangle du feu : une combustion n'a lieu qu'en présence **simultanée** des trois éléments. Supprimer un côté éteint le feu : couper l'arrivée de gaz (combustible), étouffer avec du CO_2 ou une couverture (comburant), refroidir à l'eau (énergie).

\+

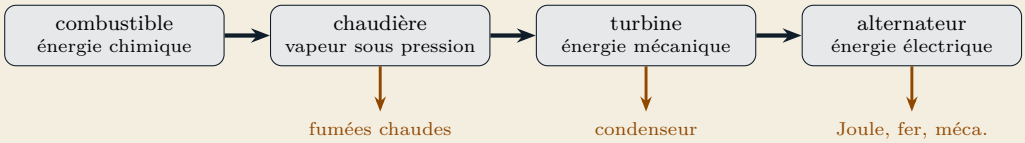
Équation d'une combustion – hors programme Combustion complète du méthane (gaz naturel) : $CH_4 + 2\,O_2 \longrightarrow CO_2 + 2\,H_2O$.

Une combustion complète d'hydrocarbure produit du dioxyde de carbone, gaz à effet de serre, et de l'eau. Si le dioxygène manque, la combustion est **incomplète** : elle produit du **monoxyde de carbone** CO, gaz toxique et inodore, et des suies.

Réactions exothermiques et endothermiques. Une réaction **exothermique** libère de l'énergie thermique vers le milieu extérieur : c'est le cas de toute combustion. Une réaction **endothermique** absorbe de l'énergie prise au milieu extérieur (décomposition du calcaire dans un four à chaux, cuisson d'un aliment).

Utilisations, dangers et protections

Les combustions servent au **chauffage** (chaudières, fours industriels), aux **transports** (moteurs à essence et diesel) et à la **production d'électricité** (centrales thermiques, cogénération, groupes électrogènes). Dans une centrale thermique, l'énergie chimique du combustible devient énergie électrique en plusieurs étapes, chacune avec ses pertes :



✗ **Dangers d'une combustion non maîtrisée** Incendie, explosion (gaz, vapeurs, poussières), brûlures, intoxication au CO. Protections : ventilation des locaux et entretien des appareils, détecteurs de fumée, de gaz et de CO, extincteurs adaptés, stockage des combustibles à l'écart des sources de chaleur. Une salle de batteries au plomb doit aussi être ventilée : en fin de charge, elles dégagent du dihydrogène, gaz explosif.

11.5 Pouvoir calorifique d'un combustible

D **Définition** Le **pouvoir calorifique inférieur** (PCI) d'un combustible est l'énergie thermique libérée par la combustion complète d'1 kg de ce combustible, l'eau des fumées restant à l'état de vapeur. Le **pouvoir calorifique supérieur** (PCS) y ajoute l'énergie récupérée en condensant cette vapeur d'eau : $PCS > PCI$. Une chaudière « à condensation » récupère une partie de cette énergie.

★ **À retenir**

$$Q = m \times PCI \qquad m = \frac{W}{PCI} \qquad 1\,\text{kW}\cdot\text{h} = 3\,600\,\text{kJ} = 3{,}6\,\text{MJ}$$

Q : énergie thermique dégagée (J) ; m : masse de combustible (kg) ; PCI en $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$; W : énergie thermique à produire. Pour un combustible liquide ou gazeux, le pouvoir calorifique est souvent donné par litre ou par mètre cube.

Combustible	bois sec	granulés	éthanol	gazole	méthane	propane
PCI ($\text{MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$)	15	17,6	29	45	50	46
PCI ($\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$)	4,2	4,9	8,1	12,5	13,9	12,8

Repères utiles : 1 L de fioul et 1 m^3 de gaz naturel libèrent chacun environ 10 $\text{kW}\cdot\text{h}$ (PCI).

Rendement et consommation

Un appareil de combustion ne transmet pas toute l'énergie du combustible : une chaudière perd de la chaleur dans ses fumées, un moteur en perd beaucoup plus. On en tient compte avec le rendement η de l'appareil.

Tenir compte du rendement – hors programme

$$W_{utile} = \eta \times m \times PCI \qquad \text{et, par unité de temps :} \quad \dot{m} = \frac{P_{utile}}{\eta \times PCI}$$

Exemple : chaufferie d'un gymnase Le gymnase a besoin de $W = 120\,000\,\text{kW}\cdot\text{h}$ de chaleur par an. Chaudière gaz de rendement $\eta = 0{,}92$, gaz naturel à $10\,\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{m}^{-3}$:

$$V = \frac{W}{\eta \times PCI} = \frac{120\,000}{0{,}92 \times 10} \approx 13\,000\,\text{m}^3 \text{ de gaz par an.}$$

Exemple : groupe électrogène de chantier Un groupe fournit $P_e = 200\,\text{kW}$ électriques avec un rendement global de 0,35 (moteur et alternateur). Gazole : $PCI = 12{,}5\,\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$, $\rho = 0{,}84\,\text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$.

$$\dot{m} = \frac{200}{0{,}35 \times 12{,}5} \approx 45{,}7\,\text{kg}\cdot\text{h}^{-1} \qquad \text{soit} \qquad \frac{45{,}7}{0{,}84} \approx 54\,\text{L}\cdot\text{h}^{-1}$$

Près des deux tiers de l'énergie du gazole partent en chaleur (fumées et circuit de refroidissement) : la cogénération la récupère pour chauffer des locaux.

En ligne : comparatif interactif des technologies de batteries, triangle du feu, calculateur de capacité et d'énergie spécifique, et quantité de combustible nécessaire pour $10\,000\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

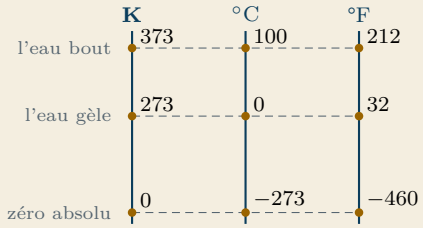
11.6 Température et chaleur

Définition La **température** traduit l'agitation des particules (atomes, molécules) qui composent un corps : plus elles s'agitent, plus la température est élevée. À 0 K (zéro absolu), l'agitation est nulle. La **chaleur** Q est l'énergie transférée spontanément d'un corps chaud vers un corps froid ; elle s'exprime en joules (J).

À retenir

$$T = \theta + 273{,}15 \qquad \theta_{^\circ\text{F}} = 1{,}8 \times \theta_{^\circ\text{C}} + 32$$

T en K, θ en °C ; un écart de 1 K vaut un écart de 1 °C.



Trois échelles de température : seules l'origine et l'unité changent. Le kelvin a le même « pas » que le degré Celsius, mais son zéro est le zéro absolu.

✗ **Piège : température et chaleur** Ce n'est pas la même chose ! Pieds nus, un carrelage paraît plus froid qu'un parquet, alors que les deux sont à la température de la pièce : le carrelage conduit mieux la chaleur et en prélève davantage à nos pieds. Notre ressenti dépend du **transfert de chaleur** (voir § 12.1), pas seulement de la température.

11.7 Énergie interne et capacité thermique

Énergie interne et premier principe

D **Définition** L'**énergie interne** U d'un corps est la somme des énergies microscopiques de ses particules (énergie cinétique d'agitation et énergie potentielle d'interaction). Pour un solide ou un liquide (phase condensée), elle varie quand le corps échange de la chaleur Q avec l'extérieur : $\Delta U = Q$.

\+ **Premier principe de la thermodynamique** – hors programme En général, un système échange de l'énergie par **travail** W (mécanique ou électrique) et par **chaleur** Q : $\Delta U = W + Q$. Pour une phase condensée qui n'échange pas de travail, on retrouve $\Delta U = Q$.

Convention de signe : une énergie **reçue** par le système est comptée positivement ($Q > 0$), une énergie **cédée** négativement ($Q < 0$). Attention : la lettre U désigne ici l'énergie interne, et non une tension.

Capacité thermique massique

D **Définition** La **capacité thermique massique** c d'une substance est l'énergie à lui apporter pour élever de 1 K la température d'1 kg de cette substance ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$).

★ **À retenir · Échauffement ou refroidissement sans changement d'état**

$$\Delta U = Q = m \times c \times (T_f - T_i)$$

m : masse (kg) ; c : capacité thermique massique ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$) ; T_i, T_f : températures initiale et finale (en K ou en °C, seul l'écart compte). Si $T_f > T_i$, $Q > 0$: le corps reçoit de la chaleur.

Substance	eau liquide	glace	huile	aluminium	fer	cuivre
c ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$)	4 180	2 060	2 000	897	444	385

Ex **Exemple : ballon d'eau chaude d'un vestiaire** On chauffe 200 L d'eau de 15 °C à 60 °C avec une résistance de 2,4 kW :

$$Q = 200 \times 4180 \times (60 - 15) \approx 37{,}6\,\mathrm{MJ}$$

$$Q = \frac{37{,}6 \times 10^6}{3{,}6 \times 10^6} \approx 10{,}5\,\mathrm{kW \cdot h}$$

$$\Delta t = \frac{Q}{P} = \frac{10{,}45}{2{,}4} \approx 4{,}4\,\mathrm{h}$$

(pertes du ballon négligées).
Le chauffage tient donc dans la plage des heures creuses (8 h), où l'électricité est moins chère : c'est le principe du ballon à accumulation.

L'eau a une capacité thermique massique très élevée : elle stocke beaucoup d'énergie pour un faible échauffement, d'où son emploi comme fluide caloporteur (chauffage central, refroidissement des moteurs, des fours, des transformateurs). Pour l'eau, 1 L a une masse d'1 kg.

Puissance thermique transportée par un fluide

Quand un fluide circule (eau d'un circuit de refroidissement, air d'une ventilation), on raisonne sur la masse qui passe chaque seconde, c'est-à-dire sur le **débit massique** $q_m = \rho\, q_V$ (voir § 9.3).

C'est la relation qui sert à dimensionner un circuit de refroidissement, une ventilation ou un réseau de chauffage.

\+ **Puissance thermique d'un fluide en écoulement** – hors programme

$$P_{th} = q_m \times c \times \Delta\theta = \rho \times q_V \times c \times \Delta\theta$$

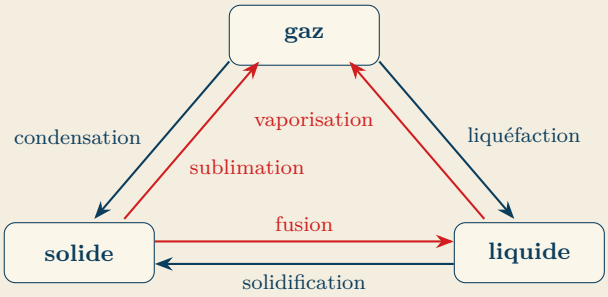
P_{th} : puissance thermique (W) ; q_m : débit massique ($\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$) ; q_V : débit volumique ($\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$) ; ρ : masse volumique ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) ; $\Delta\theta$: échauffement du fluide.

Ex **Exemple : refroidissement d'un moteur de groupe électrogène** L'eau de refroidissement circule à $q_V = 2\,\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$ et s'échauffe de 8 °C :

$$q_m = \frac{2 \times 1000}{3600} \approx 0{,}556\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}} \qquad P_{th} = 0{,}556 \times 4180 \times 8 \approx 18{,}6\,\mathrm{kW}$$

C'est la puissance que le radiateur doit évacuer vers l'air. À puissance évacuée égale, débit et échauffement varient en sens inverse : si l'on voulait limiter l'échauffement de l'eau à 4 °C, il faudrait doubler le débit de la pompe.

11.8 Changements d'état



$Q > 0$: le corps reçoit de l'énergie

$Q < 0$: le corps cède de l'énergie

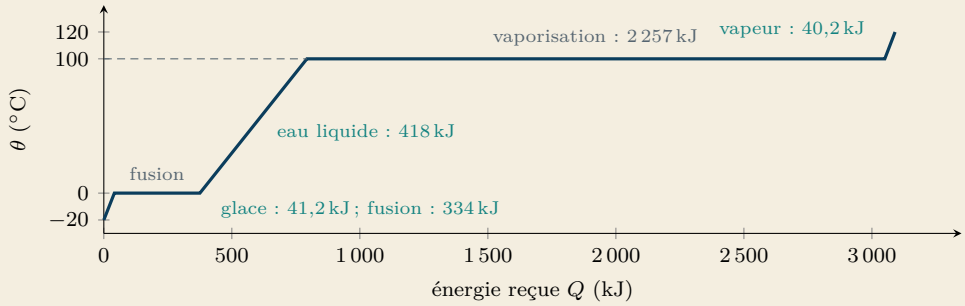
★

À retenir · Changement d'état

$$Q_p = \Delta H = m \times L \qquad (\Delta U = mL - p\,\Delta V)$$

L : énergie massique (ou chaleur latente) de changement d'état ($\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$). Le changement d'état d'un corps pur se fait à pression et **température constantes** : c'est un **palier**. Fusion et vaporisation : $Q = +m\,L$; solidification et liquéfaction : $Q = -m\,L$.
Eau : $L_{fusion} = 334\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$; $L_{vap} = 2\,257\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Sur un palier, la température reste constante : toute l'énergie reçue sert à rompre les liaisons entre les molécules. On le voit sur la courbe de chauffage d'1 kg de glace prise à $-20\,^\circ\mathrm{C}$ et portée à l'état de vapeur à $120\,^\circ\mathrm{C}$, sous la pression atmosphérique :



Ex

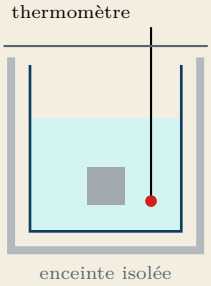
Exemple : bilan de la courbe de chauffage $Q_1 = 1 \times 2060 \times 20 = 41{,}2\,\mathrm{kJ}$ (glace) ; $Q_2 = 1 \times 334 = 334\,\mathrm{kJ}$ (fusion) ; $Q_3 = 1 \times 4180 \times 100 = 418\,\mathrm{kJ}$ (liquide) ; $Q_4 = 1 \times 2257 = 2\,257\,\mathrm{kJ}$ (vaporisation) ; $Q_5 = 1 \times 2010 \times 20 = 40{,}2\,\mathrm{kJ}$ (vapeur, $c_{vapeur} = 2\,010\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$). Total : $Q \approx 3{,}09\,\mathrm{MJ}$, dont 73 % pour la seule vaporisation.

✗

Piège classique Oublier un palier dans un calcul « de la glace à l'eau tiède » : on doit découper le trajet en étapes (échauffement de la glace, fusion, échauffement de l'eau liquide) et ajouter les énergies. Autre erreur classique : utiliser la capacité thermique massique de l'eau liquide pour la glace ou la vapeur.

11.9 Bilans thermiques (calorimétrie)

Dans un récipient isolé (calorimètre, ballon bien calorifugé), on met en contact des corps à des températures différentes : les plus chauds cèdent de la chaleur aux plus froids jusqu'à l'**équilibre thermique**, où tous sont à la même température θ_f.



Les échanges se font à l'intérieur de l'enceinte : l'énergie cédée par les corps chauds est reçue par les corps froids, rien n'est perdu vers l'extérieur. Chaque échange se calcule avec les relations $Q = m\,c\,(\theta_f - \theta_i)$ et $Q = \pm m\,L$ vues plus haut.

Bilan d'un système isolé – hors programme La somme des chaleurs échangées par les différentes parties est nulle :

$$\sum Q_i = 0 \qquad \text{soit} \qquad Q_{recue} = -Q_{cedee}$$

Un récipient de **capacité thermique** C ($\mathrm{J\cdot K^{-1}}$) échange $C\,(\theta_f - \theta_i)$; pour un objet de masse m, $C = m \times c$.

Méthode : bilan thermique.

1. Lister les corps (sans oublier le récipient, de capacité thermique C) et, pour chacun, sa température initiale et ses éventuels changements d'état.
2. Écrire la chaleur échangée par chacun : $m\,c\,(\theta_f - \theta_i)$, $C\,(\theta_f - \theta_i)$ ou $\pm m\,L$, avec son signe.
3. Écrire $\sum Q_i = 0$ et résoudre pour l'inconnue (θ_f, une masse, une capacité thermique massique…). Vérifier que θ_f est comprise entre les températures initiales.

Exemple : réglage d'un mélangeur d'eau chaude On veut obtenir de l'eau à 40 °C en mélangeant 40 L d'eau d'un ballon à 70 °C avec une masse m d'eau froide à 12 °C :

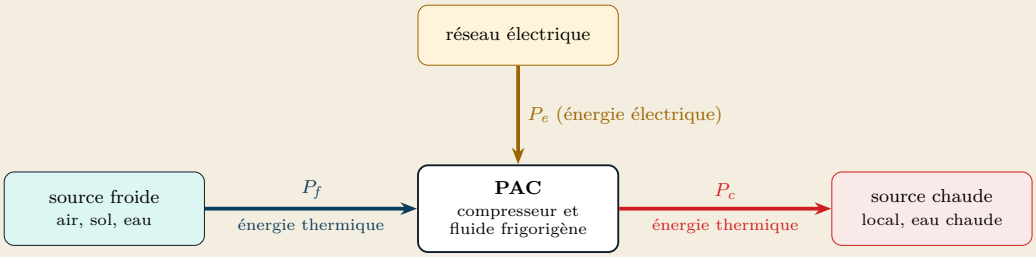
$$40 \times 4180 \times (40 - 70) + m \times 4180 \times (40 - 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{40 \times 30}{28} \approx 42{,}9\,\mathrm{kg}$$

Un ballon de 40 L à 70 °C fournit ainsi près de 83 L d'eau à 40 °C : stocker l'eau plus chaude augmente la quantité d'eau tiède disponible (et limite le développement des légionelles). Dans la réalité, le ballon et les tuyauteries cèdent un peu de chaleur à l'air ambiant : la température obtenue est légèrement inférieure à la valeur calculée, et l'on règle le mélangeur en conséquence.

11.10 Pompe à chaleur et machine frigorifique

Spontanément, la chaleur passe toujours du corps chaud vers le corps froid. Une **pompe à chaleur** (PAC) fait l'inverse : grâce à l'énergie électrique absorbée par son compresseur, elle prélève de la chaleur à une source froide (air extérieur, sol, eau d'une nappe) et la restitue à une source chaude (le local à chauffer, l'eau d'un ballon). Le même principe est utilisé dans le **chauffe-eau thermodynamique**, qui chauffe l'eau sanitaire avec la chaleur de l'air, et dans la **machine frigorifique** (réfrigérateur, chambre froide, climatiseur), dont l'effet utile est au contraire la chaleur prélevée à la source froide.

Chaîne énergétique

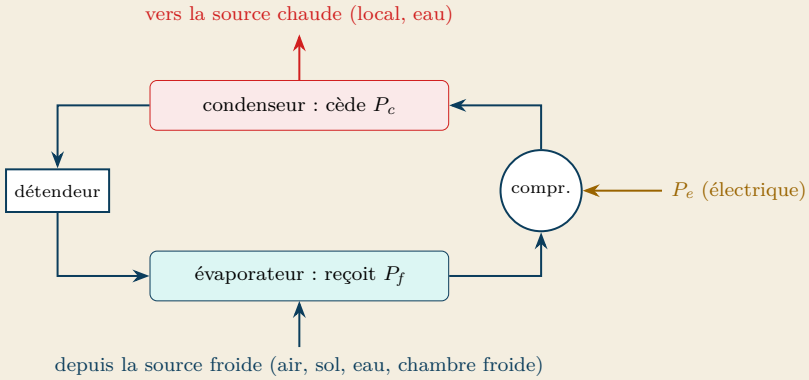


★ **À retenir · Bilan et coefficients de performance** Conservation de l'énergie (en puissances) : $P_c = P_f + P_e$

Pompe à chaleur : $\text{COP} = \dfrac{P_{th}}{P_e} = \dfrac{P_c}{P_e}$ Machine frigorifique : $\text{COP}_f = \dfrac{P_f}{P_e}$

P_e : puissance électrique absorbée ; P_f : puissance thermique prélevée à la source froide ; $P_c = P_{th}$: puissance thermique cédée à la source chaude (en W). Les mêmes relations s'écrivent avec des énergies (en kW · h).

Le fluide frigorigène parcourt un circuit fermé : il s'évapore dans l'**évaporateur** en prenant de la chaleur à la source froide, il est comprimé, puis il se condense dans le **condenseur** en cédant sa chaleur à la source chaude, et il est détendu avant de recommencer. Les changements d'état du fluide (paragraphe 11.8) permettent de transporter beaucoup d'énergie avec peu de fluide.



Ex **Exemple : pompe à chaleur air/eau d'une maison** Pour fournir $P_{th} = 8\,\text{kW}$ au plancher chauffant avec un COP de 4, la PAC absorbe et prélève gratuitement à l'air extérieur :

$$P_e = 8/4 = 2\,\text{kW (électriques)} \qquad P_f = 8 - 2 = 6\,\text{kW}$$

Ex **Exemple : chauffe-eau thermodynamique** Un ballon de 200 L est chauffé de 15 °C à 55 °C :

$$Q = 200 \times 4180 \times 40 \approx 33{,}4\,\text{MJ} \approx 9{,}3\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

Avec une résistance électrique, il faut $9{,}3\,\text{kW}\cdot\text{h}$ électriques ; avec un chauffe-eau thermodynamique de COP 3, seulement

$$\frac{9{,}3}{3} = 3{,}1\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

Ex **Exemple : chambre froide d'un entrepôt frigorifique** Pour extraire $P_f = 12\,\text{kW}$ de la chambre avec $\text{COP}_f = 3{,}4$, il faut

$$P_e = \frac{12}{3{,}4} \approx 3{,}5\,\text{kW}$$

Le condenseur rejette dans l'air extérieur

$$P_c = 12 + 3{,}5 = 15{,}5\,\text{kW}$$

Cette chaleur pourrait être récupérée.

✗ **Piège classique** Un COP de 4 n'est pas un « rendement de 400 % » : la PAC ne crée pas d'énergie, elle déplace de la chaleur prise à la source froide, et le bilan

$$P_c = P_f + P_e$$

est respecté. Le COP diminue quand l'écart de température entre les sources augmente : il est plus faible par grand froid ou avec des radiateurs à haute température.

Applications.

- ▷ Dans le **bâtiment** : PAC air/eau ou géothermiques pour le chauffage, chauffe-eau thermodynamiques, climatisation réversible.
- ▷ Dans l'**industrie** : froid alimentaire (chambres froides, tunnels de congélation, bancs de glace), climatisation des salles informatiques, PAC qui valorisent la chaleur rejetée par les procédés.

L'essentiel

Chapitre 11

Énergie chimique : piles, accumulateurs, combustion

Pile, accumulateur, batterie	accumulateur : pile rechargeable
Borne − d'une pile	oxydation : le réducteur cède des électrons
Borne + d'une pile	réduction : l'oxydant capte des électrons
Sens de I et des électrons	I : $+ \rightarrow -$ $\quad e^-$: $- \rightarrow +$
Pile à combustible	$2\,H_2 + O_2 \longrightarrow 2\,H_2O$
Tension en débit	$U = E - r \times I$
Puissance fournie, pertes	$P = U \times I \qquad P_j = r \times I^2$
Capacité	$Q_{max} = I \times \Delta t_{max} \quad (\mathrm{A \cdot h})$
Énergie stockée	$E_e = Q_{max} \times E \quad (\mathrm{W \cdot h})$
Énergie spécifique	$\mathcal{E}_m = \dfrac{Q_{max} \times E}{m} \quad (\mathrm{W \cdot h \cdot kg^{-1}})$
Cyclabilité	cycles avant $\approx 20\,\%$ de capacité perdue
Triangle du feu	combustible + comburant + activation
Exothermique / endothermique	libère / absorbe de la chaleur
Énergie d'un combustible	$Q = m \times PCI \qquad PCS > PCI$
Masse de combustible	$m = \dfrac{W}{PCI}$
Conversion	$1\,\mathrm{kW \cdot h} = 3\,600\,\mathrm{kJ} = 3{,}6\,\mathrm{MJ}$

Énergie thermique

Température absolue	$T = \theta + 273{,}15 \qquad (\mathrm{K})$
Degrés Fahrenheit	$\theta_{\circ\mathrm{F}} = 1{,}8 \times \theta_{\circ\mathrm{C}} + 32$
Écart de température	$\Delta T\ (\mathrm{K}) = \Delta\theta\ (^\circ\mathrm{C})$
Chaleur	énergie transférée du chaud au froid (J)
Zéro absolu	$0\,\mathrm{K}$: agitation thermique nulle
Sans changement d'état	$\Delta U = Q = m \times c \times (T_f - T_i)$
Convention de signe	$Q > 0$: reçue $\qquad Q < 0$: cédée
Eau liquide	$c = 4\,180\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Glace, vapeur ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$)	$c_{glace} = 2\,060 \qquad c_{vapeur} = 2\,010$
Changement d'état	$Q_p = \Delta H = m \times L$ (à p constante)
Signe (changement d'état)	fusion, vap. : $Q > 0$ solidif., liquéf. : $Q < 0$
Eau	$L_{fusion} = 334\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}} \qquad L_{vap} = 2\,257\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$
Palier	θ constante pendant le changement d'état
PAC, machine frigorifique : bilan	$P_c = P_f + P_e$
COP d'une pompe à chaleur	$\mathrm{COP} = \dfrac{P_{th}}{P_e}$
COP d'une machine frigorifique	$\mathrm{COP}_f = \dfrac{P_f}{P_e}$

Exercices

Chapitre 11

Énergie chimique : piles, accumulateurs, combustibles

Exercice 11.1 – Terminal de lecture d'un entrepôt ★☆☆

Une plateforme logistique équipe ses préparateurs de commandes de terminaux portables qui lisent les codes-barres des colis. Chaque terminal est alimenté par un accumulateur lithium-ion amovible. Les équipes travaillent par postes de 7 h, et le responsable de site veut savoir si un accumulateur tient tout un poste, ou s'il faut prévoir un échange à la pause.

Données

- Accumulateur : f.é.m. $E = 3{,}7\,\text{V}$, résistance interne $r = 0{,}12\,\Omega$, capacité $Q_{max} = 3{,}2\,\text{A}\cdot\text{h}$, masse $m = 48\,\text{g}$.
- Courant moyen absorbé par le terminal en service : $I = 0{,}8\,\text{A}$.
- Cyclabilité annoncée : 1 000 cycles ; le site fonctionne 250 jours par an, avec une recharge complète par jour.

1. Calculer la tension U aux bornes de l'accumulateur lorsqu'il débite le courant moyen, puis la puissance perdue par effet Joule dans sa résistance interne.
2. Calculer l'énergie E_e stockée dans l'accumulateur, en $\text{W}\cdot\text{h}$.
3. Calculer son énergie spécifique $\mathcal{E}_m$. Est-elle cohérente avec la technologie annoncée ?
4. Calculer l'autonomie du terminal. Un accumulateur suffit-il pour un poste ? Que proposer ?
5. Au bout de combien d'années faudra-t-il prévoir le remplacement des accumulateurs ?

→ corrigé p. 408

Exercice 11.2 – Batterie d'un véhicule autoguidé ★★☆

Un fabricant de pièces automobiles remplace ses chariots tracteurs à conducteur par des véhicules autoguidés (AGV) qui transportent les bacs entre le magasin et les lignes d'assemblage. L'intégrateur doit concevoir la batterie 48 V de chaque AGV à partir d'éléments LiFePO_4. Le cahier des charges impose qu'un AGV travaille un poste complet de 8 h sans recharge. On vous demande de dimensionner le pack et de le comparer à une solution au plomb.

Données

- Élément LiFePO_4 : $E_1 = 3{,}2\,\text{V}$; $Q_1 = 50\,\text{A}\cdot\text{h}$; $r_1 = 1{,}5\,\text{m}\Omega$; masse 1,1 kg ; cyclabilité 3 500 cycles.

- ▷ Puissance moyenne absorbée par l'AGV : 450 W ; courant de pointe lors des accélérations : 60 A.
- ▷ On n'utilise que 80 % de la capacité nominale (profondeur de décharge).
- ▷ Pack de n_s éléments en série et n_p branches en parallèle : $E = n_s E_1$, $r = \frac{n_s\, r_1}{n_p}$, $Q_{max} = n_p Q_1$.
- ▷ Solution plomb : énergie spécifique $35\,\mathrm{W \cdot h \cdot kg^{-1}}$, profondeur de décharge limitée à 50 %.
- ▷ Une recharge par jour, 300 jours de production par an.

I- Dimensionnement du pack

1. Combien d'éléments faut-il placer en série pour obtenir 48 V ?

2. Calculer l'énergie utile nécessaire pour un poste, puis l'énergie nominale que doit stocker la batterie.

3. En déduire la capacité nominale minimale, puis le nombre de branches en parallèle et le nombre total d'éléments.

4. Calculer l'autonomie réelle de l'AGV avec le pack choisi.

II- Comportement électrique et comparaison

5. Calculer la résistance interne du pack, puis la tension à ses bornes et les pertes internes lors d'une pointe de 60 A.

6. Calculer la masse du pack et son énergie spécifique. Quelle masse aurait une batterie au plomb assurant le même service ? Conclure.

7. Estimer la durée de vie du pack, en années.

→ corrigé p. 409

Exercice 11.3 – Secours d'un relais de télécommunication ★★☆

Un opérateur exploite un relais de téléphonie mobile isolé en montagne. En cas de coupure du réseau, le relais doit rester alimenté pendant 72 h. L'opérateur hésite entre un groupe électrogène diesel et une pile à combustible à hydrogène. Le technicien doit comparer les deux solutions.

Données

- ▷ Puissance électrique absorbée par le relais : 1,5 kW.
- ▷ Pile à combustible : rendement 0,50 ; chaque cellule fournit 0,7 V en charge ; dihydrogène livré en bouteilles de 0,9 kg ; $PCI_{\mathrm{H_2}} = 33{,}3\,\mathrm{kW \cdot h \cdot kg^{-1}}$.
- ▷ Pour un appareil de rendement η, l'énergie utile fournie vaut $W = \eta \times m \times PCI$.
- ▷ Groupe électrogène : rendement global 0,25 ; gazole : $PCI = 12{,}5\,\mathrm{kW \cdot h \cdot kg^{-1}}$, $\rho = 0{,}84\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$; la combustion d'1 kg de gazole rejette 3,16 kg de CO_2.

I- La pile à combustible

1. À l'anode, le dihydrogène est oxydé selon $H_2 \longrightarrow 2\,H^+ + 2\,e^-$. Cette électrode est-elle la borne + ou la borne − ? Dans quel sens circulent les électrons dans le circuit extérieur ?
2. À la cathode, le dioxygène est réduit en eau. Écrire la demi-équation, puis l'équation bilan de la pile.
3. La pile délivre une tension de 48 V. Combien de cellules faut-il associer, et comment ?

II- Comparaison énergétique

4. Calculer l'énergie électrique à fournir pendant les 72 h de secours.
5. Calculer la masse de dihydrogène nécessaire, puis le nombre de bouteilles à stocker.
6. Calculer la masse puis le volume de gazole nécessaires avec le groupe électrogène, et la masse de CO_2 rejetée.
7. Rédiger une conclusion argumentée pour l'opérateur.

→ corrigé p. 410

Énergie thermique

Exercice 11.4 – Bac de dégraissage d'un atelier ★☆☆

Dans un atelier de maintenance ferroviaire, les pièces mécaniques sont dégraissées dans un bac contenant 400 L de solution lessivielle, qu'il faut porter de 12 °C à 55 °C chaque matin avant l'arrivée des équipes. Le bac est chauffé par un thermoplongeur électrique. Le chef d'atelier veut savoir à quelle heure lancer le chauffage et ce que cela coûte.

Données

- La solution se comporte comme de l'eau : $c = 4\,180\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, 1 L a une masse d'1 kg.
- Thermoplongeur : $P = 9\,\text{kW}$; 90 % de l'énergie électrique consommée est effectivement transmise à la solution.
- Prix de l'énergie électrique : 0,20 € le kW · h.

1. Exprimer les températures initiale et finale en kelvins, puis l'élévation de température en K et en °C.
2. Calculer l'énergie thermique Q que doit recevoir la solution, en MJ puis en kW · h.
3. Calculer la durée de chauffage. Le travail commence à 7 h 30 : à quelle heure, au plus tard, lancer le chauffage ?

4. Calculer l'énergie électrique consommée et le coût d'une mise en température.

→ corrigé p. 411

Exercice 11.5 – Four à induction d'une fonderie ★★☆

Une fonderie d'aluminium coule des carters de moteurs. Le métal est fondu dans un four à induction par lots de 250 kg de lingots pris à 20 °C et portés à 720 °C (température de coulée). Le responsable énergie veut connaître la durée d'une fusion, la consommation électrique par tonne de métal et le débit d'eau nécessaire au refroidissement de l'inducteur.

Données

- Aluminium : température de fusion 660 °C ; $c_{solide} = 897\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$; $c_{liquide} = 1\,180\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$; $L_{fusion} = 397\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.
- Four : puissance électrique absorbée $P_e = 250\,\mathrm{kW}$; rendement 0,65. Les pertes sont évacuées par l'eau de refroidissement de l'inducteur, qui s'échauffe de 12 °C ; $c_{eau} = 4\,180\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. Un fluide de débit massique q_m qui s'échauffe de $\Delta\theta$ évacue la puissance $P = q_m\, c\, \Delta\theta$.

I- Énergie nécessaire à la fusion d'un lot

1. Décrire les trois étapes subies par le métal entre 20 °C et 720 °C.

2. Calculer l'énergie Q_1 nécessaire pour échauffer le métal solide jusqu'à sa température de fusion.

3. Calculer l'énergie Q_2 nécessaire à la fusion, puis l'énergie Q_3 nécessaire pour porter le métal liquide à 720 °C.

4. En déduire l'énergie totale Q, en MJ et en $\mathrm{kW\cdot h}$. Représenter l'allure de la température du métal en fonction de l'énergie reçue.

II- Le four

5. Calculer la puissance utile du four, puis la durée d'une fusion.

6. Calculer l'énergie électrique consommée par lot, puis par tonne d'aluminium.

7. Calculer la puissance des pertes, puis le débit massique et le débit volumique (en $\mathrm{m^3\cdot h^{-1}}$) de l'eau de refroidissement.

→ corrigé p. 411

Exercice 11.6 – Pompe à chaleur d'un entrepôt ★★☆

Une entreprise de logistique remplace la chaudière fioul de son entrepôt de pièces détachées par une pompe à chaleur air/eau, qui alimente des aérothermes. Le constructeur annonce un coefficient de performance de 3,2 par grand froid. Le responsable technique veut connaître la puissance électrique à souscrire, comprendre d'où vient la chaleur fournie et chiffrer l'économie annuelle par rapport à une chaudière gaz.

Données

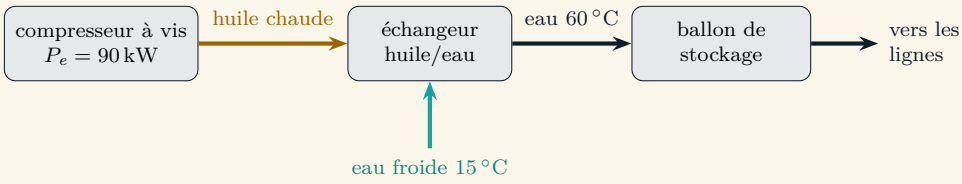
- ▷ Besoin de chauffage par la température extérieure de base $-5\,°C$: $P_{th} = 120\,kW$; eau envoyée aux aérothermes à $45\,°C$; COP à ce régime : 3,2.
- ▷ Besoin annuel de chaleur : $180\,000\,kW \cdot h$; COP moyen sur la saison : 3,4 ; électricité à 0,18 € le $kW \cdot h$.
- ▷ Solution de référence : chaudière gaz de rendement 0,92, gaz à 0,09 € le $kW \cdot h$ PCI ; une chaudière de rendement η consomme W/η pour fournir W.
- ▷ Avec des aérothermes basse température alimentés à $35\,°C$, le COP par $-5\,°C$ passerait à 3,85.

1. Représenter la chaîne énergétique de la PAC : préciser la source froide, la source chaude et la forme de chaque énergie échangée.
2. Calculer la puissance électrique absorbée par la PAC par $-5\,°C$.
3. Écrire le bilan de puissance de la PAC et en déduire la puissance prélevée à l'air extérieur.
4. Calculer le coût annuel du chauffage avec la PAC, puis avec la chaudière gaz. Quelle est l'économie réalisée ?
5. Calculer la puissance électrique par $-5\,°C$ avec les aérothermes basse température. Conclure.

→ corrigé p. 413

Exercice 11.7 – Récupérer la chaleur d'un compresseur ★★★

Une usine de plats cuisinés produit son air comprimé avec un compresseur à vis de 90 kW. Presque toute l'énergie électrique absorbée finit en chaleur, aujourd'hui rejetée à l'extérieur. Le service maintenance étudie l'installation d'un échangeur sur le circuit d'huile du compresseur pour produire l'eau chaude de lavage des lignes et chauffer les locaux, deux besoins aujourd'hui assurés par une chaudière gaz. L'huile, qui sort du compresseur vers $80\,°C$, céderait sa chaleur à l'eau froide du réseau, stockée ensuite dans un ballon calorifugé. On vous demande d'évaluer l'intérêt du projet.



Données

- ▷ 94 % de la puissance électrique du compresseur est transformée en chaleur dans l'huile ; l'échangeur en transmet 75 % à l'eau.
- ▷ L'eau est chauffée de $15\,°C$ à $60\,°C$; $c = 4\,180\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$; 1 L d'eau a une

masse d'1 kg.

- ▷ Le compresseur fonctionne 4 000 h par an à pleine charge ; toute la chaleur récupérée remplace de la chaleur produite par la chaudière.
- ▷ Chaudière actuelle : rendement 0,90 ; gaz naturel à $10\,\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{m}^{-3}$ (PCI), facturé 0,09 € par kW · h PCI ; la combustion du gaz rejette 0,20 kg de CO_2 par kW · h PCI.
- ▷ Le lavage quotidien utilise $12\,\text{m}^3$ d'eau à 45 °C, obtenue en mélangeant l'eau du ballon (60 °C) avec de l'eau froide (15 °C).
- ▷ Relations utiles : un fluide de débit massique q_m chauffé de $\Delta\theta$ reçoit $P = q_m\, c\, \Delta\theta$; une chaudière de rendement η consomme W/η pour fournir W ; dans un mélange sans pertes, la somme des chaleurs échangées est nulle.

A- Puissance récupérable

1. Calculer la puissance thermique P_r transmise à l'eau.

2. En déduire le débit massique d'eau chaude produite, puis le volume d'eau à 60 °C produit en une heure.

B- Bilan annuel

3. Calculer l'énergie thermique récupérée en un an, en kW · h.

4. Calculer le volume de gaz économisé, le gain financier annuel et la masse de CO_2 évitée.

C- Besoins du lavage

5. Par un bilan thermique, calculer les volumes d'eau à 60 °C et d'eau froide à mélanger pour obtenir les $12\,\text{m}^3$ à 45 °C.

6. Pendant combien d'heures par jour le compresseur doit-il fonctionner pour couvrir ce besoin ?

7. Le lavage a lieu en une seule fois, en fin de journée. Quel volume minimal doit avoir le ballon de stockage ? Choisir un ballon parmi les volumes normalisés 5, 10 et $15\,\text{m}^3$, puis conclure sur l'intérêt du projet.

→ corrigé p. 413

Sujets de type BTS

Chapitre 11

Sujet BTS 11.A – Continuité de service d'un centre de données

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Un centre de données régional héberge les serveurs de plusieurs hôpitaux. En cas de coupure du réseau, une alimentation sans interruption (ASI) alimente les serveurs

sur batterie pendant le démarrage et la montée en charge d'un groupe électrogène, qui prend ensuite le relais. Le bureau d'études doit valider la batterie de l'ASI, la ventilation de sa salle et l'autonomie du groupe.

Données

- Puissance absorbée par les serveurs : $P = 110\,\text{kW}$. Rendement de l'onduleur en fonctionnement sur batterie : 0,95 ; en fonctionnement normal (double conversion) : 0,96.
- Autonomie exigée sur batterie : 10 min.
- Batterie : une chaîne de blocs au plomb étanches 12 V en série, tension nominale 480 V. Blocs disponibles : 50, 75, 100 et 150 $\text{A}\cdot\text{h}$. Un bloc de $100\,\text{A}\cdot\text{h}$ a une masse de 31 kg, une f.é.m. de 12,8 V et une résistance interne de $4\,\text{m}\Omega$.
- En décharge rapide (10 min), un bloc au plomb ne restitue que 55 % de sa capacité nominale. Pour tenir compte du vieillissement, on multiplie la capacité calculée par 1,25.
- Solution lithium-ion envisagée : énergie spécifique $140\,\text{W}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$ (armoire complète) ; 90 % de l'énergie nominale est restituée en 10 min ; coefficient de vieillissement 1,1.
- Air (à 20 °C) : $\rho = 1{,}20\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $c = 1\,005\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Un débit d'air q_V qui s'échauffe de $\Delta\theta$ évacue la puissance $P = \rho\, q_V\, c\, \Delta\theta$.
- Groupe électrogène : puissance électrique fournie 130 kW (serveurs et climatisation) ; rendement global 0,38 ; gazole : $PCI = 12{,}5\,\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$, $\rho = 0{,}84\,\text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$; cuve de 1 000 L. Le cahier des charges exige 24 h d'autonomie. Pour un appareil de rendement η, la puissance utile vaut $P = \eta \times \dot{m} \times PCI$, où $\dot{m}$ est le débit massique de combustible.

Partie A – Dimensionnement de la batterie

A.1. Calculer la puissance P_{bat} fournie par la batterie pendant une coupure.

A.2. Calculer l'énergie E_u que doit restituer la batterie pendant les 10 min d'autonomie.

A.3. Calculer le nombre de blocs de la chaîne, puis la capacité Q_u à restituer.

A.4. En tenant compte de la décharge rapide et du vieillissement, calculer la capacité nominale minimale des blocs et choisir un bloc normalisé.

Partie B – Masse : plomb ou lithium ?

B.1. Calculer la masse de la batterie au plomb, l'énergie nominale qu'elle stocke et l'énergie spécifique d'un bloc.

B.2. Calculer l'énergie nominale et la masse de la solution lithium-ion. Conclure sachant que le plancher technique admet au plus 1 000 kg par armoire.

B.3. À l'aide du cours, citer un autre avantage et un inconvénient de la technologie lithium-ion pour cette application.

Partie C – Comportement électrique de la batterie au plomb

C.1. Donner le modèle $(E\,;r)$ de la chaîne (en série, E et r s'ajoutent).

C.2. On admet que la tension de la batterie reste voisine de 480 V. Calculer le courant débité au début d'une coupure, puis la tension réelle aux bornes de la batterie et ses pertes internes.

C.3. Calculer le courant de court-circuit de la chaîne (tension nulle à ses bornes). Quelle protection impose-t-il ?

Partie D – Ventilation de la salle de l'ASI

D.1. En fonctionnement normal, calculer la puissance perdue par l'onduleur.

D.2. Cette puissance est évacuée par un flux d'air qui s'échauffe de 12 °C. Calculer le débit volumique d'air nécessaire, en $\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$.

D.3. Donner deux raisons de ventiler une salle de batteries au plomb.

Partie E – Autonomie du groupe électrogène

E.1. Calculer la consommation horaire de gazole du groupe, en $\mathrm{kg \cdot h^{-1}}$ puis en $\mathrm{L \cdot h^{-1}}$.

E.2. Calculer l'autonomie offerte par la cuve. Le cahier des charges est-il respecté ?

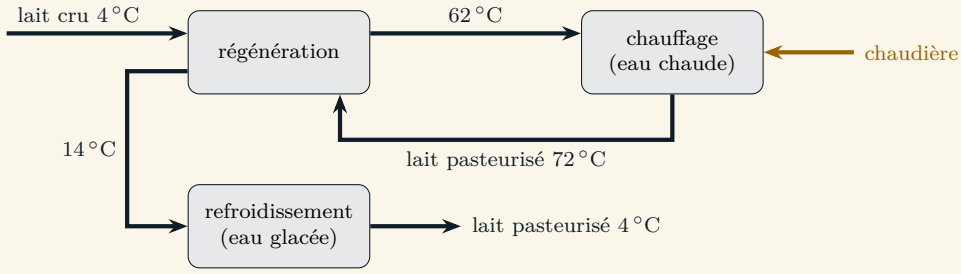
E.3. Le groupe est placé dans un local technique. Citer les trois éléments du triangle du feu présents dans ce local et une mesure de prévention pour chacun.

→ corrigé p. 415

Sujet BTS 11.B – Pasteurisation dans une laiterie

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une coopérative laitière pasteurise le lait cru avant de le conditionner : le lait est chauffé à 72 °C, maintenu quelques secondes à cette température, puis refroidi à 4 °C. Pour économiser l'énergie, l'installation comporte un échangeur de « régénération » : le lait pasteurisé chaud cède sa chaleur au lait cru froid qui arrive. La coopérative veut chiffrer les besoins en chauffage et en froid de la ligne.



Données

- Débit de lait : $6\,000\,\text{L}\cdot\text{h}^{-1}$; masse volumique $1\,030\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; capacité thermique massique $c_{lait} = 3\,900\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. La ligne fonctionne 16 h par jour.
- Chaudière gaz à condensation : rendement 0,92 (sur PCI) ; gaz naturel à $10\,\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{m}^{-3}$ (PCI).
- Eau glacée produite par un banc de glace : la nuit, un groupe frigorifique fabrique de la glace à 0 °C ; le jour, la fonte de cette glace refroidit le lait. $L_{fusion} = 334\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Le groupe fonctionne 8 h par nuit et absorbe 1 kW électrique pour 3 kW de froid produit.
- Eau : $c_{eau} = 4\,180\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
- Relations utiles : un débit massique q_m de liquide chauffé de $\Delta\theta$ reçoit $P = q_m\, c\,\Delta\theta$; une chaudière de rendement η fournit $P = \eta \times q_V \times PCI$ (q_V : débit de gaz, PCI par m^3).

Partie A – Besoins de chauffage

A.1. Calculer le débit massique de lait, en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

A.2. Calculer la puissance thermique qu'il faudrait fournir pour chauffer le lait de 4 °C à 72 °C sans régénération.

A.3. Calculer la puissance thermique fournie par la chaudière avec la régénération. Quelle fraction du chauffage la régénération assure-t-elle ?

A.4. Calculer l'énergie thermique économisée chaque jour grâce à la régénération, en $\text{kW}\cdot\text{h}$.

Partie B – Chaudière et combustion

B.1. Calculer la consommation horaire de gaz de la chaudière, puis sa consommation journalière.

B.2. La combustion complète du méthane CH_4 dans le dioxygène O_2 produit du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O. Écrire et équilibrer l'équation de cette combustion. Quel gaz dangereux se forme si l'apport d'air est insuffisant ? Quel équipement de sécurité installer dans la chaufferie ?

B.3. Expliquer pourquoi une chaudière « à condensation » peut annoncer un rendement supérieur à celui d'une chaudière classique, en utilisant les notions de PCI et de PCS.

Partie C – Refroidissement par banc de glace

C.1. Calculer la puissance frigorifique nécessaire pour refroidir le lait de 14 °C à 4 °C.

C.2. Calculer l'énergie frigorifique nécessaire pour une journée de production, en $\text{kW}\cdot\text{h}$ et en J.

C.3. Calculer la masse de glace que le banc doit contenir, en négligeant l'échauffement de l'eau de fonte.

C.4. Calculer la puissance frigorifique du groupe, puis sa puissance électrique. Quel est l'intérêt de fabriquer la glace la nuit ?

Partie D – Contrôle de la capacité thermique du lait

Le laboratoire vérifie la valeur de c_{lait}. Dans un calorimètre de capacité thermique $C = 150\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ contenant 300 g d'eau à 50 °C, on verse 200 g de lait à 4 °C. La température d'équilibre vaut 33,6 °C. On admet que le système est isolé : la somme des chaleurs échangées est nulle ; le calorimètre échange $C\,(\theta_f - \theta_i)$.

D.1. Écrire les chaleurs échangées par l'eau, le calorimètre et le lait, en précisant leur signe.

D.2. En écrivant le bilan thermique, calculer c_{lait}. La valeur utilisée dans l'étude est-elle validée ?

→ corrigé p. 417

Corrigés

Chapitre 11

Énergie chimique : piles, accumulateurs, combustibles

✓ Corrigé de l'exercice 11.1 – Terminal de lecture d'un entrepôt

1. Modèle du générateur : $U = E - r\,I = 3{,}7 - 0{,}12 \times 0{,}8$ soit $\boxed{U \approx 3{,}60\,\text{V}}$

Pertes internes : $P_j = r\,I^2 = 0{,}12 \times 0{,}8^2 \approx 0{,}077\,\text{W}$, négligeables devant la puissance fournie $U\,I \approx 2{,}88\,\text{W}$.

2. $E_e = Q_{max} \times E = 3{,}2 \times 3{,}7$ soit $\boxed{E_e \approx 11{,}8\,\text{W}\cdot\text{h}}$

3. Masse en kilogrammes : $m = 0{,}048\,\text{kg}$.

$$\mathcal{E}_m = \frac{Q_{max} \times E}{m} = \frac{11{,}84}{0{,}048} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{E}_m \approx 247\,\text{W}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}}$$

Cette valeur se situe en haut de la plage du lithium-ion (150 à 250 $\text{W}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$) : elle est cohérente.

4. $Q_{max} = I \times \Delta t_{max}$, d'où $\Delta t_{max} = \dfrac{Q_{max}}{I} = \dfrac{3{,}2}{0{,}8}$ soit $\boxed{\Delta t_{max} = 4\,\text{h}}$

C'est moins qu'un poste de 7 h : un accumulateur ne suffit pas. On prévoit **deux accumulateurs par terminal**, échangés à la pause, l'un étant en charge pendant que l'autre sert ($2 \times 4 = 8\,\text{h} > 7\,\text{h}$).

5. Avec une recharge par jour : $\dfrac{1000}{250} = 4$: les accumulateurs sont à remplacer au bout d'environ $\boxed{4 \text{ ans}}$ (perte d'environ 20 % de capacité, l'autonomie tombant alors vers 3,2 h).

✓ Corrigé de l'exercice 11.2 – Batterie d'un véhicule autoguidé

I- Dimensionnement du pack

1. En série, les f.é.m. s'ajoutent : $n_s = \dfrac{48}{3{,}2}$ soit $\boxed{n_s = 15 \text{ éléments}}$

2. Énergie utile pour 8 h : $E_u = P \times \Delta t = 450 \times 8 = 3\,600\,\text{W}\cdot\text{h} = 3{,}6\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

Seuls 80 % sont utilisables : $E_n = \dfrac{E_u}{0{,}8} = \dfrac{3{,}6}{0{,}8}$ soit $\boxed{E_n = 4{,}5\,\text{kW}\cdot\text{h}}$

3. $Q_n = \dfrac{E_n}{E} = \dfrac{4500}{48} \approx 93{,}8\,\text{A}\cdot\text{h}$. Un élément ne fait que $50\,\text{A}\cdot\text{h}$: il faut $n_p = 2$ branches en parallèle ($2 \times 50 = 100\,\text{A}\cdot\text{h} \geq 93{,}8\,\text{A}\cdot\text{h}$).

Pack $\boxed{15\text{S}\,2\text{P}}$, soit $15 \times 2 = 30$ éléments.

4. Énergie stockée : $48 \times 100 = 4\,800\,\text{W}\cdot\text{h}$; énergie utile : $0{,}8 \times 4800 = 3\,840\,\text{W}\cdot\text{h}$.

$$\Delta t = \frac{E_u}{P} = \frac{3840}{450} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta t \approx 8{,}5\,\text{h}} \quad (\text{environ } 8\,\text{h } 32\,\text{min})$$

II- Comportement électrique et comparaison

5. $r = \dfrac{n_s\, r_1}{n_p} = \dfrac{15 \times 1{,}5}{2}$ soit $\boxed{r \approx 11{,}3\,\text{m}\Omega}$

Sous 60 A : $U = E - r\,I = 48 - 0{,}011\,25 \times 60 \approx 47{,}3\,\text{V}$; pertes : $r\,I^2 = 0{,}011\,25 \times 60^2 \approx 40{,}5\,\text{W}$.

La chute de tension (0,7 V) est faible : le lithium supporte bien les fortes pointes de courant.

6. Masse : $30 \times 1{,}1 = 33\,\text{kg}$; $\mathcal{E}_m = \dfrac{4800}{33} \approx 145\,\text{W}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$ (plage du $LiFePO_4$).

Au plomb, l'énergie utile $3{,}6\,\text{kW}\cdot\text{h}$ ne représente que 50 % de l'énergie nominale : $E_n = \dfrac{3{,}6}{0{,}5} = 7{,}2\,\text{kW}\cdot\text{h}$, d'où

$$m_{Pb} = \frac{7200}{35} \quad \text{soit} \quad \boxed{m_{Pb} \approx 206\,\text{kg}}$$

La batterie au plomb serait six fois plus lourde : elle alourdirait l'AGV et augmenterait sa consommation. Le $LiFePO_4$ s'impose.

7. Une recharge par jour : $3500/300 \approx 11{,}7$; le pack durera environ $\boxed{11 \text{ ans}}$, soit plus que la durée de vie probable de l'AGV.

✓ Corrigé de l'exercice 11.3 – Secours d'un relais de télécommunication

I- La pile à combustible

1. À l'anode, le dihydrogène **cède** des électrons : c'est une oxydation, donc l'anode est la borne $-$. Les électrons partent de cette borne et circulent dans le circuit extérieur de la borne $-$ vers la borne $+$ (le courant I circule en sens inverse).

2. Cathode (réduction) : $\mathrm{O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- \longrightarrow 2\,H_2O}$.

   On multiplie la demi-équation de l'anode par 2 pour que les électrons s'éliminent : $\mathrm{2\,H_2 \longrightarrow 4\,H^+ + 4\,e^-}$. En ajoutant :

   $$\mathrm{2\,H_2 + O_2 \longrightarrow 2\,H_2O}$$

   C'est l'équation de la combustion du dihydrogène, mais ici sans flamme : l'énergie est récupérée directement sous forme électrique.

3. Les cellules sont associées **en série** : $n = \dfrac{48}{0{,}7} \approx 68{,}6$, soit 69 cellules en série (on arrondit au nombre supérieur). Comme pour un accumulateur, la tension d'une cellule baisse quand le courant augmente ($U = E - r\,I$) : un convertisseur continu-continu placé en sortie de la pile maintient une tension de 48 V stable pour le relais. Ce convertisseur a lui-même un rendement voisin de 0,95, ce qui augmente légèrement la consommation de dihydrogène calculée plus loin ; on le néglige ici.

II- Comparaison énergétique

4. $W_e = P \times \Delta t = 1{,}5 \times 72$ soit $W_e = 108\,\mathrm{kW \cdot h}$

5. L'énergie chimique consommée vaut $\dfrac{W_e}{\eta}$, d'où

   $$m_{\mathrm{H_2}} = \frac{W_e}{\eta \times PCI} = \frac{108}{0{,}50 \times 33{,}3} \quad \text{soit} \quad m_{\mathrm{H_2}} \approx 6{,}5\,\mathrm{kg}$$

   Nombre de bouteilles : $\dfrac{6{,}49}{0{,}9} \approx 7{,}2$, soit **8 bouteilles**.

6. $m_g = \dfrac{108}{0{,}25 \times 12{,}5} \approx 34{,}6\,\mathrm{kg}$; $V = \dfrac{34{,}6}{0{,}84}$ soit $V \approx 41\,\mathrm{L}$

   Dioxyde de carbone rejeté : $34{,}56 \times 3{,}16 \approx 109\,\mathrm{kg}$ de $\mathrm{CO_2}$.

7. **Conclusion.** Le groupe diesel est simple et le stockage de 41 L de gazole tient dans un petit réservoir ; mais il a un rendement médiocre, il est bruyant, demande un entretien régulier et rejette environ 110 kg de $\mathrm{CO_2}$ par secours de 72 h. La pile à combustible, deux fois plus efficace, silencieuse et sans rejet de $\mathrm{CO_2}$ sur site, impose en revanche le stockage de 8 bouteilles de gaz sous pression (risque d'explosion, local ventilé) et un coût d'investissement élevé. Pour un site isolé et protégé, la pile à combustible est une solution pertinente si l'approvisionnement en hydrogène est organisé.

Méthode Pour comparer deux solutions énergétiques, on part toujours de la même énergie **utile** ; on la divise par le rendement de chaque appareil pour obtenir l'énergie chimique consommée, puis par le PCI pour obtenir la masse de combustible. On compare enfin masses, volumes, coûts et rejets.

Énergie thermique

✓ Corrigé de l'exercice 11.4 – Bac de dégraissage d'un atelier

1. $T_i = 12 + 273{,}15 = 285{,}15\,\text{K}$; $T_f = 55 + 273{,}15 = 328{,}15\,\text{K}$.
   $\Delta T = 328{,}15 - 285{,}15 = 43\,\text{K}$, et de même $\Delta\theta = 55 - 12 = 43\,°\text{C}$: un écart a la même valeur dans les deux échelles.

2. Masse : $m = 400\,\text{kg}$.
$$Q = m\,c\,(\theta_f - \theta_i) = 400 \times 4180 \times 43 \approx 71{,}9\,\text{MJ}$$
$$Q = \frac{71{,}90 \times 10^6}{3{,}6 \times 10^6} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q \approx 20{,}0\,\text{kW}\cdot\text{h}}$$

3. Puissance reçue par la solution : $0{,}9 \times 9 = 8{,}1\,\text{kW}$.
$$\Delta t = \frac{Q}{P_{recue}} = \frac{20}{8{,}1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta t \approx 2{,}47\,\text{h} \approx 2\,\text{h}\ 28\,\text{min}}$$
   Il faut lancer le chauffage au plus tard vers **5 h** (une horloge programmable s'en charge, avec une petite marge).

4. Énergie électrique : $W_e = \dfrac{Q}{0{,}9} = \dfrac{20}{0{,}9} \approx 22{,}2\,\text{kW}\cdot\text{h}$; coût : $22{,}2 \times 0{,}20$ soit $\boxed{\approx 4{,}44\ €}$ par mise en température.

✓ Corrigé de l'exercice 11.5 – Four à induction d'une fonderie

I- Énergie nécessaire à la fusion d'un lot

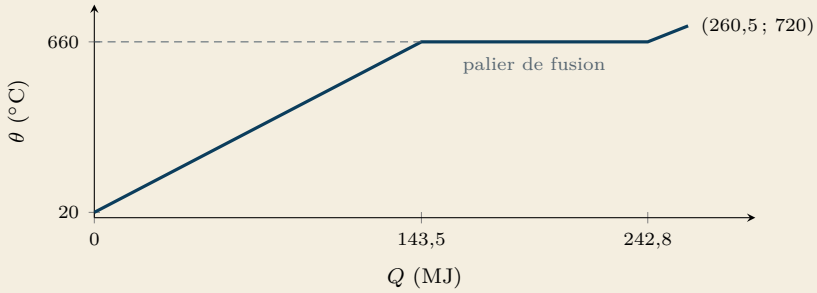
1. (1) Échauffement de l'aluminium **solide** de 20 °C à 660 °C ; (2) **fusion** à température constante (660 °C) ; (3) échauffement de l'aluminium **liquide** de 660 °C à 720 °C.

2. $Q_1 = m\,c_{solide}\,(660 - 20) = 250 \times 897 \times 640$ soit $\boxed{Q_1 \approx 143{,}5\,\text{MJ}}$

3. $Q_2 = m\,L_{fusion} = 250 \times 397 \times 10^3$ soit $\boxed{Q_2 \approx 99{,}3\,\text{MJ}}$
   $Q_3 = m\,c_{liquide}\,(720 - 660) = 250 \times 1180 \times 60$ soit $\boxed{Q_3 = 17{,}7\,\text{MJ}}$

4. $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 143{,}52 + 99{,}25 + 17{,}7 \approx 260{,}5\,\text{MJ}$, soit $Q = \dfrac{260{,}47 \times 10^6}{3{,}6 \times 10^6}$

$\boxed{Q \approx 72{,}4\,\text{kW}\cdot\text{h}}$



II- Le four

5. $P_u = \eta\, P_e = 0{,}65 \times 250 = 162{,}5\,\text{kW}$.

$$\Delta t = \frac{Q}{P_u} = \frac{260{,}47 \times 10^6}{162{,}5 \times 10^3} \approx 1\,603\,\text{s} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta t \approx 27\,\text{min}}$$

6. Par lot : $W_e = \dfrac{Q}{\eta} = \dfrac{72{,}35}{0{,}65} \approx 111\,\text{kW}\cdot\text{h}$; une tonne correspond à 4 lots : $\boxed{W_e \approx 445\,\text{kW}\cdot\text{h par tonne}}$

7. Pertes : $P_p = P_e - P_u = 250 - 162{,}5 = 87{,}5\,\text{kW}$. Elles sont évacuées par l'eau : $P_p = q_m\, c_{eau}\, \Delta\theta$, d'où

$$q_m = \frac{P_p}{c_{eau}\,\Delta\theta} = \frac{87\,500}{4180 \times 12} \quad \text{soit} \quad \boxed{q_m \approx 1{,}74\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}}$$

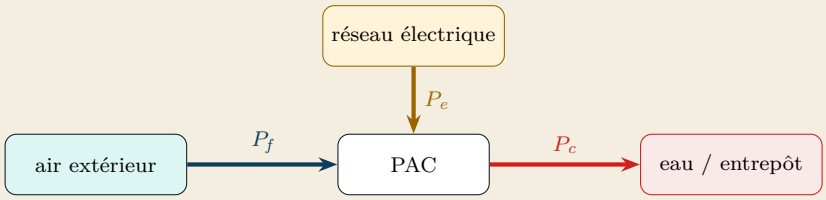
Débit volumique : $1{,}744 \times 3600 \approx 6\,280\,\text{L}\cdot\text{h}^{-1}$, soit $\boxed{q_V \approx 6{,}3\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}}$

Cette eau ressort de l'inducteur environ 12 °C plus chaude qu'à l'entrée : plutôt que de refroidir ces 87,5 kW dans un aéroréfrigérant, la fonderie pourrait les utiliser pour chauffer ses vestiaires ou préchauffer l'eau sanitaire, éventuellement à l'aide d'une pompe à chaleur qui en relèverait la température. C'est une démarche classique d'efficacité énergétique dans l'industrie : valoriser la « chaleur fatale » des procédés.

Méthode Pour un corps qui change d'état, on découpe toujours le trajet en étapes : une étape « $m\,c\,\Delta\theta$ » par phase, avec la capacité thermique massique de **cette** phase, et une étape « $m\,L$ » par palier.

✓ Corrigé de l'exercice 11.6 – Pompe à chaleur d'un entrepôt

1. Source froide : l'air extérieur, qui cède de l'énergie thermique P_f ; source chaude : l'eau du circuit de chauffage, donc l'entrepôt, qui reçoit l'énergie thermique $P_c = P_{th}$; le réseau fournit l'énergie électrique P_e au compresseur.



2. $\text{COP} = \dfrac{P_{th}}{P_e}$, d'où $P_e = \dfrac{120}{3{,}2}$ soit $\boxed{P_e = 37{,}5\,\text{kW}}$

3. Conservation de l'énergie : $P_c = P_f + P_e$, d'où $P_f = 120 - 37{,}5$ soit $\boxed{P_f = 82{,}5\,\text{kW}}$ prélevés à l'air extérieur.

4. PAC : $W_e = \dfrac{180\,000}{3{,}4} \approx 52\,900\,\text{kW}\cdot\text{h}$, soit $52\,941 \times 0{,}18 \approx 9\,530$ €.

   Chaudière : $\dfrac{180\,000}{0{,}92} \approx 195\,700\,\text{kW}\cdot\text{h}$ PCI, soit $195\,652 \times 0{,}09 \approx 17\,610$ €.

   Économie : $\boxed{\approx 8\,080\text{ € par an}}$, soit 46 % de la facture.

5. $P_e = \dfrac{120}{3{,}85}$ soit $\boxed{P_e \approx 31{,}2\,\text{kW}}$

   Abaisser de 10 °C la température de l'eau réduit la puissance électrique de 17 % : une PAC est d'autant plus performante que l'écart de température entre ses sources est faible. Les émetteurs basse température sont donc à privilégier.

✓ Corrigé de l'exercice 11.7 – Récupérer la chaleur d'un compresseur

A- Puissance récupérable

1. $P_r = 0{,}75 \times 0{,}94 \times 90$ soit $\boxed{P_r \approx 63{,}5\,\text{kW}}$

2. $P_r = q_m\, c\, \Delta\theta$, d'où

$$q_m = \frac{P_r}{c\,\Delta\theta} = \frac{63\,450}{4180 \times (60 - 15)} \quad \text{soit} \quad \boxed{q_m \approx 0{,}337\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}}$$

   En une heure : $0{,}337\,3 \times 3600 \approx 1\,214\,\text{kg}$, soit environ $\boxed{1\,210\,\text{L}}$ d'eau à 60 °C par heure.

B- Bilan annuel

3. $W_r = P_r \times \Delta t = 63{,}45 \times 4000$ soit $\boxed{W_r \approx 253\,800\,\text{kW}\cdot\text{h}}$ par an

4. Cette chaleur (eau de lavage et chauffage des locaux) n'est plus produite par la chaudière. Énergie du gaz économisée :

$$\frac{W_r}{\eta} = \frac{253\,800}{0{,}90} = 282\,000\,\text{kW}\cdot\text{h (PCI), soit}$$

$$V_{gaz} = \frac{282\,000}{10} = 28\,200\,\text{m}^3 \qquad \text{gain : } 282\,000 \times 0{,}09 \approx 25\,400\ € \text{ par an}$$

CO_2 évité : $282\,000 \times 0{,}20 = 56\,400\,\text{kg}$, soit $\boxed{\approx 56\,\text{t de } CO_2 \text{ par an}}$

Méthode Pour chiffrer une économie d'énergie, on remonte la chaîne : énergie utile récupérée → énergie que l'ancien appareil aurait consommée (division par son rendement) → quantité de combustible (division par le PCI) → coût et CO_2 évités. Ne pas oublier le rendement : économiser 1 kW · h de chaleur utile, c'est économiser plus d'1 kW · h de gaz.

C- Besoins du lavage

5. Soit m_c la masse d'eau à 60 °C et $m_f = 12\,000 - m_c$ celle d'eau froide (en kg). Le mélange est supposé sans perte : $\sum Q = 0$.

$$m_c\, c\,(45 - 60) + (12\,000 - m_c)\, c\,(45 - 15) = 0$$

$$15\, m_c = 30\,(12\,000 - m_c) \;\Rightarrow\; m_c = \frac{360\,000}{45}$$

$\boxed{m_c = 8\,000\,\text{kg}}$ soit 8 m³ d'eau à 60 °C, et 4 m³ d'eau froide.

6. $\Delta t = \dfrac{8000}{1214} \approx 6{,}6\,\text{h}$ par jour. Le compresseur fonctionnant 4 000 h par an, soit environ 16 h par jour ouvré, il couvre largement ce besoin.

7. Toute l'eau à 60 °C est utilisée en une fois : le ballon doit contenir au moins 8 m³. On choisit $\boxed{\text{un ballon de } 10\,\text{m}^3}$, ce qui laisse une marge pour les pertes thermiques et les jours de faible fonctionnement du compresseur.

Conclusion : la récupération couvre la totalité de l'eau chaude de lavage (environ 6,6 h de fonctionnement sur 16) ; le reste de la chaleur récupérée chauffe les locaux. Au total, le projet économise environ 25 000 € et 56 t de CO_2 par an : il est très intéressant.

Méthode Dans un bilan de mélange, on écrit la chaleur de chaque masse sous la forme $m\,c\,(\theta_f - \theta_i)$ avec la **température finale en premier** : les signes sont alors automatiquement corrects ($Q < 0$ pour l'eau chaude qui cède, $Q > 0$ pour l'eau froide qui reçoit).

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 11.A – Continuité de service d'un centre de données

Partie A – Dimensionnement de la batterie

A.1. $P_{bat} = \dfrac{P}{\eta} = \dfrac{110}{0{,}95}$ soit $\boxed{P_{bat} \approx 115{,}8\,\text{kW}}$

A.2. $E_u = P_{bat} \times \Delta t = 115{,}8 \times \dfrac{10}{60}$ soit $\boxed{E_u \approx 19{,}3\,\text{kW}\cdot\text{h}}$

A.3. Nombre de blocs : $\dfrac{480}{12} = 40$ blocs en série. $Q_u = \dfrac{E_u}{U} = \dfrac{19300}{480}$ soit $\boxed{Q_u \approx 40{,}2\,\text{A}\cdot\text{h}}$

A.4. Seuls 55 % de la capacité nominale sont restitués en 10 min, et l'on prend une marge de vieillissement :

$$Q_n = \frac{Q_u}{0{,}55} \times 1{,}25 = \frac{40{,}2}{0{,}55} \times 1{,}25 \approx 91{,}4\,\text{A}\cdot\text{h} \Rightarrow \boxed{\text{blocs de } 100\,\text{A}\cdot\text{h}}$$

Méthode Dimensionner la batterie d'une ASI : (1) puissance demandée à la batterie $P_{bat} = P/\eta$; (2) énergie utile $E_u = P_{bat}\,\Delta t$; (3) capacité utile $Q_u = E_u/U$; (4) capacité nominale, en divisant par la fraction réellement restituée et en multipliant par la marge de vieillissement ; (5) choix de la valeur normalisée **supérieure**.

Partie B – Masse : plomb ou lithium ?

B.1. Masse : $40 \times 31 = 1\,240$ kg. Énergie nominale, avec la f.é.m. de la chaîne $E = 40 \times 12{,}8 = 512$ V : $E_e = Q_{max} \times E = 100 \times 512 \approx 51{,}2\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

Énergie spécifique d'un bloc : $\mathcal{E}_m = \dfrac{100 \times 12{,}8}{31}$ soit $\boxed{\mathcal{E}_m \approx 41{,}3\,\text{W}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}}$

On stocke 51,2 kW·h pour n'en utiliser que 19,3 kW·h : c'est le prix de la décharge rapide et du vieillissement du plomb.

B.2. $E_{n,Li} = \dfrac{19{,}3}{0{,}9} \times 1{,}1 \approx 23{,}6\,\text{kW}\cdot\text{h}$ et $m_{Li} = \dfrac{23600}{140}$ soit $\boxed{m_{Li} \approx 169\,\text{kg}}$

La batterie au plomb (1 240 kg) dépasse la charge admissible d'une armoire : il faudrait la répartir sur deux armoires. La solution lithium-ion, sept fois plus légère, tient dans une seule armoire.

B.3. Avantage : une bien meilleure cyclabilité (1 000 à 5 000 cycles contre 300 à 800 pour le plomb), donc moins de remplacements. Inconvénient : un coût d'achat plus élevé, et la nécessité d'un système de gestion (BMS) qui surveille chaque élément.

Partie C – Comportement électrique de la batterie au plomb

C.1. 40 blocs en série : $E = 40 \times 12{,}8 = 512\,\text{V}$ et $r = 40 \times 0{,}004 = 0{,}16\,\Omega$.
$\boxed{(E\,;r) = (512\,\text{V}\,;0{,}16\,\Omega)}$

C.2. $I \approx \dfrac{P_{bat}}{480} = \dfrac{115800}{480}$ soit $\boxed{I \approx 241\,\text{A}}$
$U = E - r\,I = 512 - 0{,}16 \times 241 \approx 473\,\text{V}$ (l'hypothèse $U \approx 480\,\text{V}$ est justifiée) ; pertes internes : $r\,I^2 = 0{,}16 \times 241^2 \approx 9{,}3\,\text{kW}$, qui échauffent la batterie pendant la décharge.

C.3. $I_{cc} = \dfrac{E}{r} = \dfrac{512}{0{,}16}$ soit $\boxed{I_{cc} = 3\,200\,\text{A}}$
Il faut un organe de protection (fusibles ou disjoncteur de batterie) de pouvoir de coupure supérieur à 3,2 kA en courant continu, placé au plus près des bornes de la chaîne.

Partie D – Ventilation de la salle de l'ASI

D.1. Puissance absorbée par l'onduleur : $\dfrac{110}{0{,}96} \approx 114{,}58\,\text{kW}$; pertes :

$$114{,}58 - 110 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_p \approx 4{,}58\,\text{kW}}$$

D.2. $P_p = \rho\,q_V\,c\,\Delta\theta$, d'où
$$q_V = \frac{P_p}{\rho\,c\,\Delta\theta} = \frac{4583}{1{,}20 \times 1005 \times 12} \approx 0{,}317\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad \boxed{q_V \approx 1\,140\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}}$$

D.3. **Thermique** : la durée de vie d'une batterie au plomb chute fortement au-dessus de 25 °C ; il faut évacuer les pertes de l'onduleur et de la batterie. **Sécurité** : en fin de charge, les batteries au plomb dégagent du dihydrogène, gaz explosif ; la ventilation empêche son accumulation.

Partie E – Autonomie du groupe électrogène

E.1. $\dot m = \dfrac{P_e}{\eta \times PCI} = \dfrac{130}{0{,}38 \times 12{,}5}$ soit $\boxed{\dot m \approx 27{,}4\,\text{kg}\cdot\text{h}^{-1}}$ et $\frac{27{,}37}{0{,}84} \approx 32{,}6\,\text{L}\cdot\text{h}^{-1}$.

E.2. $\Delta t = \dfrac{1000}{32{,}6}$ soit $\boxed{\Delta t \approx 30{,}7\,\text{h}}$ $> 24\,\text{h}$: le cahier des charges est respecté.

E.3. **Combustible** : le gazole (cuve, nourrice) ⇒ cuve sur bac de rétention, nettoyage des fuites. **Comburant** : l'oxygène de l'air ⇒ porte coupe-feu fermée et, si besoin, extinction automatique par gaz inerte (étouffement). **Énergie d'activation** : échappement chaud, étincelles électriques ⇒ entretien, calorifugeage de l'échappement, interdiction de fumer et des travaux par point chaud sans permis.

Bilan : une chaîne de 40 blocs de 100 A · h convient électriquement mais pèse trop pour une armoire ; la solution lithium-ion est à privilégier. Le groupe assure plus de 30 h d'autonomie.

✓ Corrigé du sujet BTS 11.B – Pasteurisation dans une laiterie

Partie A – Besoins de chauffage

A.1. $q_m = \rho\, q_V = 1030 \times \dfrac{6}{3600}$ soit $\boxed{q_m \approx 1{,}717\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}}$

A.2. $P = q_m\, c_{lait}\, \Delta\theta = 1{,}717 \times 3900 \times (72-4)$ soit $\boxed{P \approx 455\,\text{kW}}$

A.3. La chaudière ne chauffe plus le lait que de 62 °C à 72 °C :

$$P_{ch} = 1{,}717 \times 3900 \times (72-62) \quad \text{soit} \quad \boxed{P_{ch} \approx 67{,}0\,\text{kW}}$$

Fraction assurée par la régénération : $\dfrac{62-4}{72-4} = \dfrac{58}{68} \approx 0{,}85$, soit 85 % du chauffage, gratuitement.

A.4. Puissance économisée : $455{,}3 - 67{,}0 \approx 388\,\text{kW}$; sur 16 h : 388×16 soit $\boxed{\approx 6\,210\,\text{kW}\cdot\text{h par jour}}$, l'équivalent d'environ $675\,\text{m}^3$ de gaz.

Partie B – Chaudière et combustion

B.1. $q_{V,gaz} = \dfrac{P_{ch}}{\eta \times PCI} = \dfrac{66{,}95}{0{,}92 \times 10}$ soit $\boxed{q_{V,gaz} \approx 7{,}3\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}}$; par jour : $7{,}28 \times 16 \approx 116\,\text{m}^3$.

B.2. $CH_4 + 2\,O_2 \longrightarrow CO_2 + 2\,H_2O$. Avec un manque d'air, la combustion est incomplète et produit du **monoxyde de carbone** CO, toxique et inodore : on installe un **détecteur de CO** (et de gaz) asservi à la coupure de l'arrivée de gaz, et l'on assure la ventilation de la chaufferie.

B.3. Les fumées contiennent de la vapeur d'eau. Une chaudière classique la rejette : elle ne peut récupérer au mieux que le PCI. Une chaudière à condensation refroidit les fumées jusqu'à condenser cette vapeur et récupère une partie de la différence $PCS - PCI$. Comme le rendement est rapporté au PCI, il peut même dépasser 100 %. Pour le gaz naturel, $PCS \approx 1{,}11 \times PCI$: la condensation permet de récupérer jusqu'à environ 11 % d'énergie supplémentaire, à condition que l'eau de retour du circuit soit assez froide (moins de 55 °C environ) pour condenser la vapeur des fumées.

Partie C – Refroidissement par banc de glace

C.1. $P_f = q_m\, c_{lait}\,(14-4) = 1{,}717 \times 3900 \times 10$ soit $\boxed{P_f \approx 67{,}0\,\text{kW}}$

C.2. $E_f = P_f \times \Delta t = 66{,}95 \times 16$ soit $\boxed{E_f \approx 1\,071\,\text{kW}\cdot\text{h}}$ soit $1071 \times 3{,}6 \times 10^6 \approx 3{,}86 \times 10^9$ J.

C.3. La fonte de la glace absorbe $Q = m\,L_{fusion}$:

$$m = \frac{E_f}{L_{fusion}} = \frac{3{,}856 \times 10^9}{334 \times 10^3} \quad \text{soit} \quad \boxed{m \approx 11\,500 \text{ kg} \approx 11{,}5 \text{ t}}$$

C.4. $P_{froid} = \dfrac{1071}{8} \approx 134 \text{ kW}$ et $P_e = \dfrac{134}{3}$ soit $\boxed{P_e \approx 44{,}6 \text{ kW}}$

Fabriquer la glace la nuit permet de consommer l'électricité en heures creuses (moins chère) et de ne pas cumuler, en journée, l'appel de puissance du groupe frigorifique avec celui des machines de production ; le banc de glace est un **stockage d'énergie** par changement d'état.

Pourquoi stocker du froid sous forme de glace ? Stocker les mêmes $3{,}86 \times 10^9$ J dans de l'eau liquide refroidie de 10 °C demanderait

$$m = \frac{3{,}856 \times 10^9}{4180 \times 10} \approx 92 \text{ t d'eau,}$$

soit huit fois plus que de glace : la fusion d'1 kg de glace absorbe autant d'énergie que l'échauffement de 8 kg d'eau de 10 °C. Le changement d'état permet un stockage compact.

Partie D – Contrôle de la capacité thermique du lait

D.1. Eau (cède) : $Q_e = 0{,}300 \times 4180 \times (33{,}6 - 50) \approx -20\,570$ J.

Calorimètre (cède) : $Q_{cal} = 150 \times (33{,}6 - 50) = -2\,460$ J.

Lait (reçoit) : $Q_l = 0{,}200 \times c_{lait} \times (33{,}6 - 4) = 5{,}92\,c_{lait} > 0$.

D.2. Système isolé : $Q_e + Q_{cal} + Q_l = 0$, d'où

$$c_{lait} = \frac{20570 + 2460}{5{,}92} \quad \text{soit} \quad \boxed{c_{lait} \approx 3\,890 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

L'écart avec la valeur de l'étude (3 900) est d'environ 0,3 % : la valeur utilisée est validée.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ décrire une pile et utiliser le modèle $U = E - r\,I$; — ex. 11.1 à 11.3
- ☐ calculer une capacité, une énergie stockée et une autonomie ; — ex. 11.1, 11.2, sujet A
- ☐ calculer une masse ou un débit de combustible (PCI) ; — ex. 11.3, sujets A et B
- ☐ calculer une énergie thermique, avec ou sans changement d'état ; — ex. 11.4 à 11.7, sujet B
- ☐ tracer la chaîne énergétique d'une PAC et calculer son COP. — ex. 11.6, sujet B

CHAPITRE

12

Transferts thermiques

Conduction, convection, rayonnement : évacuer la chaleur des équipements

Dans ce chapitre

- Chaleur, flux et densité de flux thermique
- Conduction : loi de Fourier, parois composées
- Convection et rayonnement thermique
- Résistances thermiques en série et en parallèle
- Dissipateurs, armoires électriques, bâtiments
- Régime transitoire : constante de temps thermique

Objectifs

- ✓ Calculer un flux thermique et une résistance thermique
- ✓ Construire et exploiter un schéma thermique équivalent
- ✓ Dimensionner un dissipateur, une ventilation ou une climatisation
- ✓ Exploiter une courbe d'échauffement (constante de temps)

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 12

Cours — Chapitre 12

12.1 Chaleur, température et flux thermique

En électrotechnique, toute puissance perdue (pertes Joule, pertes fer, pertes mécaniques, pertes par commutation) finit en **chaleur**. Si cette chaleur n'est pas évacuée, la température monte : les isolants vieillissent, les semi-conducteurs sont détruits, les automates se mettent en défaut. Savoir où va la chaleur et à quelle vitesse elle s'évacue est donc un savoir-faire de base du technicien.

Température et chaleur

D

Définition La **température** mesure l'agitation des particules d'un corps. On l'exprime en degrés Celsius (°C) ou, dans les lois du rayonnement, en kelvins (K) : $T(\text{K}) = \theta(^\circ\text{C}) + 273{,}15$.
La **chaleur** Q (ou transfert thermique) est une énergie, en joules (J), qui passe **spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid**, jusqu'à l'égalité des températures (équilibre thermique).

La **capacité thermique** C_{th} d'un corps, en J/K, est la chaleur qu'il faut lui apporter pour élever sa température de 1 K : plus elle est grande, plus le corps met de temps à s'échauffer (voir § 11.7). Elle interviendra en régime transitoire (section 12.9).

+

Capacité thermique massique – hors programme Pour un corps de masse m : $C_{th} = m\,c$ et $Q = m\,c\,\Delta T$, où c est la capacité thermique massique, en $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (acier : 460 ; aluminium : 897 ; cuivre : 385 ; eau : 4 180).

Un **écart** de température a la même valeur en kelvins et en degrés Celsius : passer de 20 °C à 30 °C, c'est un échauffement $\Delta T = 10\,\text{K}$. Dans ce chapitre, les températures sont notées T et exprimées en °C, sauf dans la loi de Stefan-Boltzmann et la loi de Wien où elles sont **obligatoirement en kelvins**.

Flux et densité de flux thermique

★

À retenir · Flux thermique

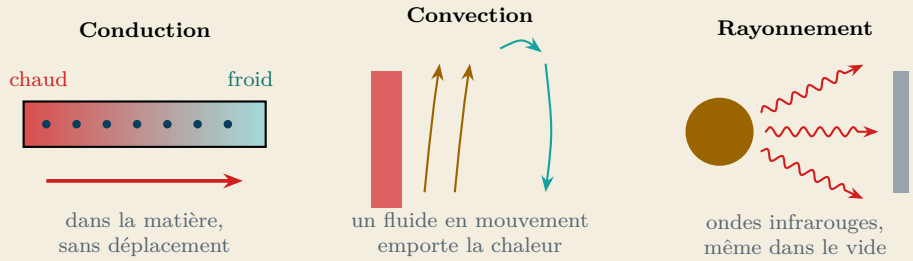
$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} \qquad \varphi = \frac{\Phi}{S}$$

Φ : flux thermique, c'est-à-dire la chaleur transférée par seconde : c'est une **puissance**, en watts (W). φ : densité de flux (ou flux surfacique) à travers une surface S, en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Ex

Exemple : pertes d'un variateur de vitesse Un variateur fournit $P_u = 15\,\text{kW}$ avec un rendement $\eta = 0{,}97$. Ses pertes valent $P_u\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) \approx 464\,\text{W}$: c'est le flux thermique qu'il dégage dans l'armoire. En une journée de $8\,\text{h}$, il produit $Q = 0{,}464 \times 8 \approx 3{,}7\,\text{kW}\cdot\text{h} \approx 13{,}4\,\text{MJ}$ de chaleur, l'équivalent d'un petit radiateur électrique allumé toute la journée.

Les trois modes de transfert



- **Conduction** : l'agitation thermique se transmet de proche en proche dans un solide (ou un fluide immobile), sans déplacement de matière. Exemples : paroi d'une armoire, semelle d'un transistor, isolant d'un mur.
- **Convection** : un fluide (air, eau, huile) au contact d'une surface chaude s'échauffe, se déplace et emporte la chaleur. Elle est **naturelle** (l'air chaud, moins dense, monte) ou **forcée** (ventilateur, pompe).
- **Rayonnement** : tout corps émet des ondes électromagnétiques (infrarouges aux températures usuelles), qui transportent de l'énergie même dans le vide.

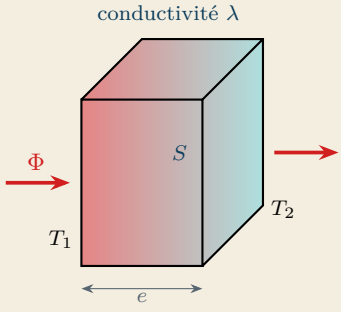
Dans la plupart des situations réelles, les trois modes agissent en même temps : la carcasse d'un moteur reçoit la chaleur des bobinages par conduction, puis la cède à l'air par convection et aux murs du local par rayonnement.

12

12.2 Conduction

Loi de Fourier

On considère une paroi plane, d'épaisseur e et de surface S, dont les deux faces sont maintenues aux températures T_1 et T_2, avec $T_1 > T_2$. En régime permanent (températures constantes), le flux qui la traverse est proportionnel à la surface et à l'écart de température, et inversement proportionnel à l'épaisseur.



À retenir · Loi de Fourier (paroi plane, régime permanent)

$$\Phi = \lambda\, S\, \frac{T_1 - T_2}{e}$$

Φ en W ; S en m^2 ; e en m ; λ : **conductivité thermique** du matériau, en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Matériau	cuivre	alu	acier	béton	verre	plâtre	PVC	laine de verre	air immobile
λ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	390	220	50	1,75	1	0,25	0,17	0,035	0,025

Les métaux, bons conducteurs électriques, sont aussi de bons conducteurs thermiques : on en fait les dissipateurs et les carcasses. Un **isolant thermique** a une conductivité très faible ; la plupart (laines minérales, mousses) doivent leur efficacité à l'air immobile emprisonné dans leurs fibres ou leurs bulles.

Exemple : mur en béton d'un local technique Mur de surface $S = 15\,\mathrm{m}^2$ et d'épaisseur $e = 20\,\mathrm{cm}$; faces à 18 °C et 6 °C.

$$\Phi = 1{,}75 \times 15 \times \frac{18 - 6}{0{,}20} = 1\,575\,\mathrm{W} \qquad \varphi = \frac{1575}{15} = 105\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

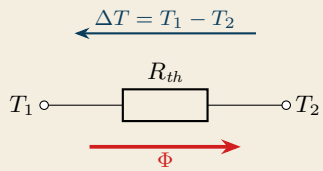
Résistance thermique

La loi de Fourier se met sous la forme d'une loi d'Ohm : l'écart de température joue le rôle de la tension, le flux celui du courant.

À retenir · Résistance thermique

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi} \qquad \text{paroi plane : } R_{th} = \frac{e}{\lambda\, S} \qquad \text{soit} \qquad \Delta T = R_{th}\, \Phi$$

R_{th} en K/W. Pour $1\,\mathrm{m}^2$ de paroi, on utilise la **résistance surfacique** $R = \frac{e}{\lambda}$, en $\mathrm{m^2 \cdot K/W}$ (valeur indiquée sur les isolants du bâtiment).



températures ↔ potentiels
écart ΔT (K) ↔ tension U (V)
flux Φ (W) ↔ intensité I (A)
R_{th} (K/W) ↔ résistance R (Ω)

Pour le mur de l'exemple :

$$R_{th} = \frac{0{,}20}{1{,}75 \times 15} \approx 7{,}62 \times 10^{-3}\,\mathrm{K/W} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{12}{7{,}62 \times 10^{-3}} \approx 1\,575\,\mathrm{W}$$

Une plaque de polystyrène ($\lambda = 0{,}032$) aurait la même résistance avec une épaisseur de $0{,}20 \times 0{,}032/1{,}75 \approx 3{,}7\,\mathrm{mm}$ seulement : le béton est un très mauvais isolant.

Échanges superficiels et parois composées

Le plus souvent, on connaît la température de l'**air** de part et d'autre de la paroi, et non celle de ses faces. Entre l'air et chaque face, la chaleur passe par convection et rayonnement : on en tient compte par deux **résistances superficielles**, $R_{si} \approx 0{,}13\,\mathrm{m^2 \cdot K/W}$ côté intérieur (air calme) et $R_{se} \approx 0{,}04\,\mathrm{m^2 \cdot K/W}$ côté extérieur (vent).

Une paroi formée de plusieurs couches est traversée par le **même flux** : ses résistances sont **en série** et s'additionnent.

★ **À retenir · Paroi composée**

$$R = R_{si} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \cdots + R_{se} \qquad \varphi = \frac{T_i - T_e}{R}$$

$$U = \frac{1}{R} \qquad \Phi = U\,S\,(T_i - T_e)$$

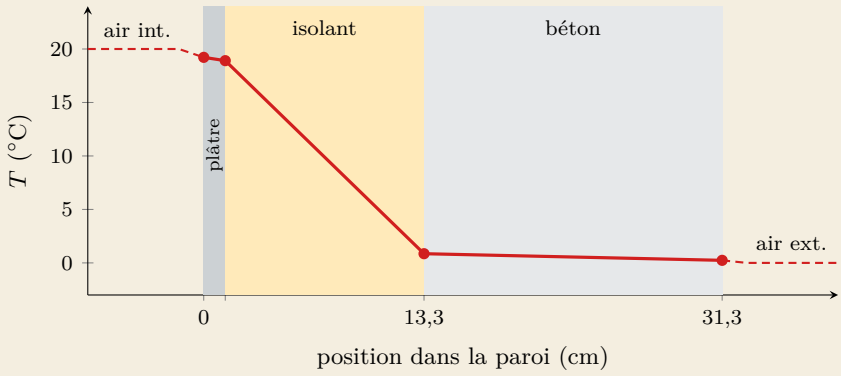
U : coefficient de transmission de la paroi, en $\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Plus U est petit, plus la paroi est isolante.

Ex **Exemple : mur isolé par l'intérieur** De l'intérieur vers l'extérieur : plâtre (13 mm, $\lambda = 0{,}25$), laine de roche (12 cm, $\lambda = 0{,}040$), béton (18 cm, $\lambda = 1{,}75$). Air intérieur à 20 °C, extérieur à 0 °C.

$$R = 0{,}13 + 0{,}052 + 3{,}000 + 0{,}103 + 0{,}04 \approx 3{,}32\,\mathrm{m^2 \cdot K/W} \qquad U \approx 0{,}30\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$$

$$\varphi = \frac{20 - 0}{3{,}32} \approx 6{,}0\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

Dans chaque couche, la température chute de $\Delta T_k = R_k\,\varphi$ (« loi d'Ohm » couche par couche) : 0,8 K sur l'air intérieur, 0,3 K dans le plâtre, 18 K dans l'isolant, 0,6 K dans le béton.



La température chute presque entièrement dans l'**isolant**, la couche de plus forte résistance, comme la tension se reporte sur la plus grande résistance d'un circuit série.

✗ **Piège classique** Utiliser les températures de l'air dans la loi de Fourier sans ajouter R_{si} et R_{se}. Pour un mur non isolé, ces résistances superficielles sont même plus grandes que celle du béton : les oublier surestime fortement les pertes. Penser aussi à convertir les épaisseurs en mètres.

12.3 Convection

Une surface à la température T_s, au contact d'un fluide à la température T_f, lui cède par convection un flux proportionnel à sa surface et à l'écart de température.

★ **À retenir · Loi de Newton (convection)**

$$\Phi = h\,S\,(T_s - T_f) \qquad R_{th} = \frac{1}{h\,S}$$

h : coefficient d'échange convectif, en $\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$; il dépend du fluide, de sa vitesse et de la forme de la surface.

Situation	h ($\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$)
air, convection naturelle	5 à 15
air, convection forcée (ventilateur)	20 à 150
eau ou huile, convection forcée	500 à 10 000

Ex **Exemple : carcasse d'un moteur fermé** Un moteur dissipe $P = 1{,}2\,\mathrm{kW}$ de pertes par sa carcasse à ailettes ($S = 0{,}9\,\mathrm{m^2}$). Avec son ventilateur ($h = 35\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$), l'échauffement de la carcasse vaut

$$\Delta T = \frac{P}{h\,S} = \frac{1200}{35 \times 0{,}9} \approx 38\,\mathrm{K}$$

Ventilateur cassé ($h = 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$) : $\Delta T \approx 133\,\mathrm{K}$, soit plus de 170 °C dans un local à 40 °C. Le bobinage serait rapidement détruit.

Pour améliorer l'échange, on augmente la **surface** (ailettes d'un moteur, d'un dissipateur, d'une cuve de transformateur) ou le **coefficient** h (ventilateur, circulation d'huile ou d'eau). En convection naturelle, les ailettes doivent être **verticales** pour ne pas gêner la montée de l'air chaud.

Ex **Exemple : surface d'un dissipateur** Un dissipateur doit évacuer 50 W en convection naturelle ($h = 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$) avec un échauffement de 50 K au plus. Il faut

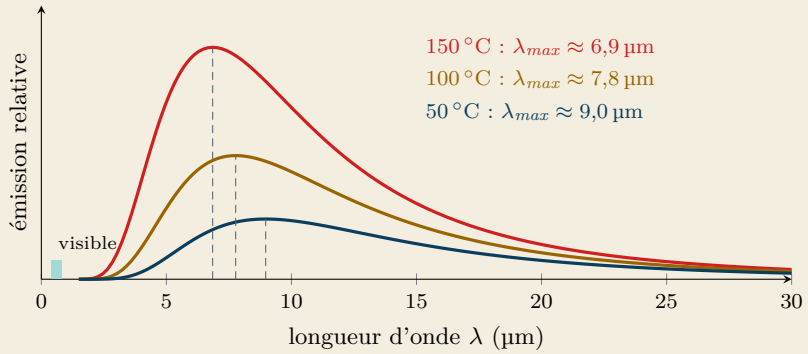
$$S \geq \frac{\Phi}{h\,\Delta T} = \frac{50}{10 \times 50} = 0{,}1\,\mathrm{m^2}$$

soit $1\,000\,\mathrm{cm^2}$: une plaque d'environ 23 cm de côté (ses deux faces échangent), ou un profilé à ailettes de 10 cm × 10 cm comportant une vingtaine d'ailettes de 2,5 cm de haut (chaque ailette offre ses deux faces).

✗ **Piège classique** Monter un dissipateur à ailettes horizontales, l'enfermer dans un recoin ou laisser ses ailettes s'encrasser : l'air circule mal, h chute et la température du composant monte. Le coefficient h n'est pas une propriété du matériau mais de l'écoulement de l'air.

12.4 Rayonnement thermique

Tout corps émet un rayonnement électromagnétique dont la puissance et la couleur dépendent de sa température. Aux températures rencontrées en électrotechnique, il est situé dans l'**infrarouge**, invisible ; il ne devient visible (rouge sombre) qu'au-delà de 600 °C environ.



★ **À retenir · Lois du rayonnement (T en kelvins)**

$$\text{Stefan-Boltzmann : } \Phi = \varepsilon\,\sigma\,S\,T^4 \qquad \sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$$

$$\text{Wien : } \lambda_{max}\,T = 2\,898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$$

ε : **émissivité** de la surface, entre 0 et 1 (peinture mate ou ruban noir : 0,95 ; métal oxydé : 0,6 ; aluminium ou cuivre brillant : 0,05 à 0,1).

Ex **Exemple : rayonnement d'une carcasse de moteur** Carcasse peinte ($\varepsilon = 0{,}95$, $S = 0{,}9\ \text{m}^2$) à 75 °C, soit 348,15 K :

$$\Phi_{\text{émis}} = 0{,}95 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 0{,}9 \times 348{,}15^4 \approx 712\ \text{W} \qquad \lambda_{max} = \frac{2898}{348{,}15} \approx 8{,}3\ \mu\text{m}$$

Le maximum d'émission est dans l'infrarouge lointain, invisible à l'œil.

\+ **Flux net rayonné** – hors programme La carcasse reçoit aussi le rayonnement des murs du local. Le flux **net** qu'elle perd, si les murs sont à T_a, vaut $\Phi_{net} = \varepsilon\,\sigma\,S\,(T_s^4 - T_a^4)$. Dans un local à 35 °C (308,15 K) : $\Phi_{net} = 0{,}95 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 0{,}9 \times (348{,}15^4 - 308{,}15^4) \approx 275\ \text{W}$, bien moins que les 712 W émis.

La caméra thermique

Une caméra thermique mesure le rayonnement infrarouge reçu et en déduit une température **en supposant une émissivité** réglée par l'utilisateur. Sur une surface métallique brillante ($\varepsilon \approx 0{,}1$), la caméra reçoit surtout le rayonnement de l'environnement réfléchi par la surface : la température affichée est fausse, souvent beaucoup trop basse. On colle alors une pastille de ruban noir mat ($\varepsilon \approx 0{,}95$) sur la pièce, ou l'on règle l'émissivité. En maintenance, la thermographie repère les connexions desserrées (point chaud sur un bornier), les déséquilibres entre phases, les roulements qui chauffent et les ponts thermiques d'un bâtiment.

En ligne : animation des trois modes de transfert, spectre du rayonnement, simulateur de caméra thermique ; simulateurs de paroi composée, de dissipateur, d'armoire ventilée et d'échauffement d'un moteur ; QCM du chapitre.

12.5 Résistances thermiques en série et en parallèle

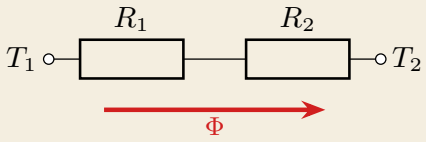
L'analogie électrique permet de traiter n'importe quel problème thermique en régime permanent avec les outils du chapitre 1 (voir § 1.2) : chaque obstacle au passage de la chaleur est une résistance thermique, chaque température un potentiel, chaque puissance dissipée une source de « courant ».

★ **À retenir · Associations de résistances thermiques** **En série** (la chaleur traverse successivement plusieurs obstacles : couches d'une paroi, jonction–boîtier–dissipateur) : $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots$

En parallèle (la chaleur dispose de plusieurs chemins entre les deux mêmes températures : murs, toiture et fenêtres d'un local) :

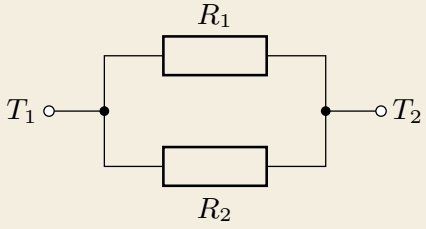
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \qquad \text{soit, pour des parois,} \qquad U_{eq} S_{eq} = U_1 S_1 + U_2 S_2 + \dots$$

en série : même flux



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

en parallèle : même écart ΔT



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ex

Exemple : façade avec fenêtres Une façade comprend $32\,\mathrm{m}^2$ de mur ($U = 0{,}30\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$) et $8\,\mathrm{m}^2$ de fenêtres ($U = 2{,}8\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$), avec $\Delta T = 20\,\mathrm{K}$.

$$R_{mur} = \frac{1}{0{,}30\times 32} \approx 0{,}104\,\mathrm{K/W} \qquad R_{fen} = \frac{1}{2{,}8\times 8} \approx 0{,}044\,6\,\mathrm{K/W}$$

$$R_{eq} = \frac{0{,}104\times 0{,}044\,6}{0{,}104+0{,}044\,6} = 0{,}031\,25\,\mathrm{K/W} \qquad \Phi = \frac{20}{0{,}031\,25} = 640\,\mathrm{W}$$

Les fenêtres laissent passer $2{,}8\times 8\times 20 = 448\,\mathrm{W}$, soit 70 % des pertes pour 20 % de la surface : comme en électricité, le courant passe surtout par la plus petite résistance.

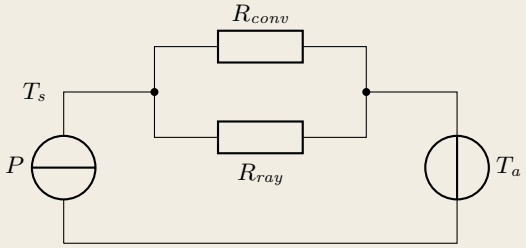
+

Convection et rayonnement en parallèle – hors programme Une surface chaude perd de la chaleur à la fois par convection et par rayonnement, sous le même écart de température : les deux résistances sont en parallèle. Pour un écart modéré, on écrit le rayonnement sous une forme « linéarisée » :

$$\Phi_{ray} \approx h_r\, S\,(T_s - T_a) \qquad \text{avec} \qquad h_r \approx 4\,\varepsilon\,\sigma\,T_m^3$$

où T_m est la moyenne (en K) des températures de la surface et du local. Pour une surface peinte vers 50 °C, $h_r \approx 6$ à $7\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$: autant que la convection naturelle.

Exemple : coffret de commande en convection naturelle. Un coffret peint ($\varepsilon = 0{,}9$, $S = 0{,}6\,\mathrm{m}^2$) dissipe $P = 300\,\mathrm{W}$ dans un local à 30 °C ; $h = 8\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. Avec $h_r \approx 6{,}7\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ (pour $T_m \approx 320\,\mathrm{K}$) :



deux chemins pour la chaleur, sous le même écart $T_s - T_a$: résistances en parallèle

$$R_{conv} = \frac{1}{8\times 0{,}6} \approx 0{,}208\,\mathrm{K/W} \qquad R_{ray} = \frac{1}{6{,}7\times 0{,}6} \approx 0{,}249\,\mathrm{K/W}$$

$$R_{eq} = \frac{0{,}208\times 0{,}249}{0{,}208+0{,}249} \approx 0{,}113\,\mathrm{K/W} \qquad T_s = 30 + 300\times 0{,}113 \approx 64\,^\circ\mathrm{C}$$

En oubliant le rayonnement, on aurait trouvé $30 + 300\times 0{,}208 \approx 92\,^\circ\mathrm{C}$: le rayonnement évacue ici près de la moitié des pertes.

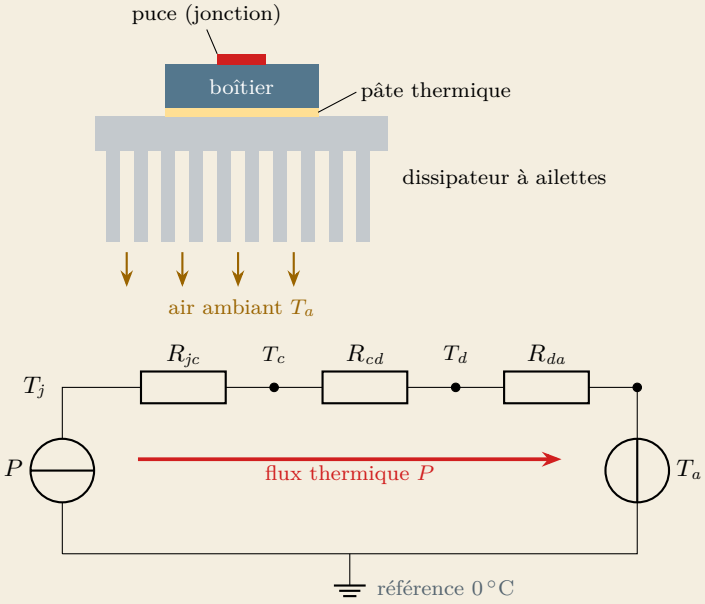
✎

Méthode : résoudre un problème thermique en régime permanent.

1. Repérer les températures connues (air ambiant, consigne) : ce sont les « potentiels » imposés.
2. Repérer les puissances dissipées : ce sont les « sources de courant ».
3. Remplacer chaque obstacle par sa résistance : $\frac{e}{\lambda S}$ (conduction), $\frac{1}{hS}$ (convection), valeur du constructeur (composant, dissipateur).
4. Réduire le schéma (série, parallèle) puis appliquer $\Delta T = R_{th}\,\Phi$.

12.6 Refroidissement des composants et des machines

Les pertes d'un composant de puissance (diode, thyristor, IGBT, régulateur) (voir § 8.9) sont produites dans la puce de silicium, appelée **jonction**. Elles traversent le boîtier, l'interface (pâte ou film thermique), puis le dissipateur avant d'atteindre l'air ambiant : trois résistances en série.



À retenir · Température de jonction et choix du dissipateur

$$T_j = T_a + P\,(R_{jc} + R_{cd} + R_{da}) \qquad R_{da} \leq \frac{T_{j,max} - T_a}{P} - R_{jc} - R_{cd}$$

R_{jc} : jonction–boîtier (fiche technique du composant) ; R_{cd} : boîtier–dissipateur (contact, pâte thermique) ; R_{da} : dissipateur–air (catalogue du dissipateur). $T_{j,max}$: 125 °C à 175 °C selon les composants.

Exemple : régulateur d'une alimentation Un régulateur dissipe $P = 25\,\text{W}$; $R_{jc} = 1{,}2\,\text{K/W}$, $R_{cd} = 0{,}3\,\text{K/W}$; air de l'armoire à $T_a = 45\,°\text{C}$; on s'impose $T_j \leq 125\,°\text{C}$.

$$R_{da} \leq \frac{125 - 45}{25} - 1{,}2 - 0{,}3 = 1{,}7\,\text{K/W}$$

On choisit dans le catalogue un dissipateur de 1,4 K/W :

$$T_j = 45 + 25 \times (1{,}2 + 0{,}3 + 1{,}4) = 117{,}5\,°\text{C} \leq 125\,°\text{C}$$

Piège classique Monter le composant sans dissipateur « pour essayer » : avec la seule résistance jonction–air du boîtier (environ 40 K/W), on obtiendrait $T_j \approx 45 + 25 \times 40 \approx 1\,045\,°\text{C}$: destruction immédiate. Oublier la pâte thermique augmente fortement R_{cd} (l'air emprisonné entre les surfaces est un isolant).

Machines électriques et classes d'isolation

Dans un moteur ou un transformateur, ce sont les **isolants des bobinages** (vernis, papiers, résines) qui limitent la température. La norme CEI 60085 les range en classes thermiques :

Classe	A	E	B	F	H
Température maximale du point chaud (°C)	105	120	130	155	180

Règle de Montsinger : au-delà de la température de sa classe, la durée de vie d'un isolant est environ **divisée par deux tous les** 10 K. La puissance nominale d'une machine est garantie pour une température ambiante d'au plus 40 °C : dans un local plus chaud, il faut la **déclasser** (l'utiliser en dessous de sa puissance nominale).

12.7 Bilan thermique d'une armoire électrique

Variateurs, alimentations, automates et appareillage dissipent leurs pertes dans l'armoire. Les fabricants imposent une température d'air intérieur maximale, souvent $T_{i,max} = 40\,°\text{C}$ (au-delà, il faut déclasser les variateurs et la durée de vie des condensateurs chute).

Évacuation par les parois

La chaleur traverse les parois de l'armoire : convection intérieure, conduction dans la tôle, convection et rayonnement extérieurs, trois résistances en série. Leur somme est la **résistance thermique** R_{th} de l'armoire, entre l'air intérieur et l'air du local. En régime permanent, l'échauffement de l'air intérieur est proportionnel à la puissance dissipée.

★ **À retenir · Armoire étanche en régime permanent**

$$T_i - T_e = R_{th}\,P \qquad P_{parois} = \frac{T_{i,max} - T_e}{R_{th}}$$

P : puissance dissipée dans l'armoire ; P_{parois} : puissance que les parois peuvent évacuer sans dépasser $T_{i,max}$.

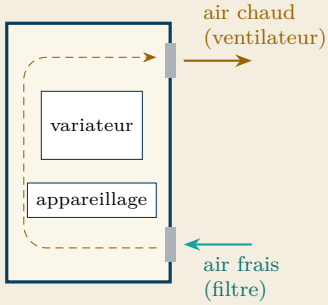
\+ **Estimer la résistance thermique d'une armoire** – hors programme Pour une tôle d'acier peinte, le coefficient global d'échange vaut $k \approx 5{,}5\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ et

$$R_{th} = \frac{1}{k\,S}$$

La surface d'échange effective S dépend de la position de l'armoire (règles de la CEI 60890) ; pour une armoire isolée, toutes faces libres : $S = 1{,}8\,H\,(L+p) + 1{,}4\,L\,p$ (H : hauteur, L : largeur, p : profondeur, en m).

Ventilation forcée

Si $P > P_{parois}$, on installe un **ventilateur à filtre**. L'air frais entre **en bas**, à travers un filtre qui arrête les poussières ; l'air chaud est extrait **en haut**, dans le sens naturel de la convection.
Le ventilateur doit évacuer la puissance P_{vent} que les parois ne peuvent pas évacuer. L'air qui traverse l'armoire avec un débit volumique D_v (en $\mathrm{m^3/h}$) entre à T_e et ressort à $T_{i,max}$: plus l'écart autorisé est faible, plus le débit doit être grand.



★ **À retenir · Ventilation d'une armoire**

$$P_{vent} = P - P_{parois} \qquad D_v = 3{,}1\,\frac{P_{vent}}{T_{i,max} - T_e} \quad (\mathrm{m^3/h},\ \mathrm{W},\ \mathrm{K})$$

Formule valable au niveau de la mer. Si $T_e \geq T_{i,max}$, la ventilation est inutile : il faut un **climatiseur** d'armoire.

Ex **Exemple : armoire de 600 W** Armoire de résistance thermique $R_{th} = 0{,}038\,1\ \mathrm{K/W}$ (armoire isolée de $1{,}8\,\mathrm{m} \times 0{,}8\,\mathrm{m} \times 0{,}5\,\mathrm{m}$) ; pertes 600 W ; local à 30 °C ; $T_{i,max} = 40\,^\circ\mathrm{C}$. Armoire fermée : $T_i = 30 + 600 \times 0{,}038\,1 \approx 53\,^\circ\mathrm{C}$, trop chaud. Les parois évacuent P_{parois}, il reste P_{vent}, d'où le débit D_v :

$$P_{parois} = \frac{10}{0{,}038\,1} \approx 262\,\mathrm{W} \qquad P_{vent} \approx 338\,\mathrm{W} \qquad D_v = 3{,}1 \times \frac{338}{10} \approx 105\,\mathrm{m^3/h}$$

On choisit le ventilateur du catalogue immédiatement supérieur, par exemple $160\,\mathrm{m^3/h}$.

✗ **Piège classique** Calculer le débit avec la puissance totale P au lieu de P_{vent} (on surdimensionne, ce n'est pas grave), ou, plus grave, prévoir une ventilation quand l'air du local est plus chaud que la consigne : elle ferait entrer de l'air encore plus chaud. Choisir toujours dans le catalogue le modèle **immédiatement supérieur** au besoin calculé.

\+ **Coefficient 3,1, puissance d'un climatiseur** – hors programme L'air de débit D_v qui s'échauffe de ΔT emporte

$$P_{vent} = \rho\, c\, \frac{D_v}{3600}\, \Delta T$$

Pour l'air (vers 35 °C), $\rho\, c \approx 1\,160\ \mathrm{J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}}$, d'où $\frac{3600}{1160} \approx 3{,}1$. Lorsque $T_e > T_i$, les parois **apportent** de la chaleur : le climatiseur doit fournir la puissance frigorifique

$$P_{froid} = P + \frac{T_e - T_i}{R_{th}}$$

Pour l'armoire précédente dans un local à 45 °C : $P_{froid} = 600 + \frac{5}{0{,}038\,1} \approx 731\,\mathrm{W}$.

12.8 Isolation d'un bâtiment

Les déperditions d'un local chauffé se font par toutes ses parois, qui sont **en parallèle** entre l'air intérieur et l'air extérieur : on additionne les produits $U\,S$.

★ **À retenir · Déperditions d'un local**

$$\Phi = \left(\sum U_k\,S_k\right)(T_i - T_e) \qquad E = \left(\sum U_k\,S_k\right) \times \overline{\Delta T} \times \Delta t$$

$\overline{\Delta T}$: écart moyen de température sur la saison de chauffage, de durée Δt (en h pour obtenir E en $\mathrm{W\cdot h}$).

Paroi	U ($\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$)	Paroi	U ($\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$)
mur en béton non isolé	3,5	simple vitrage	5,8
mur isolé (12 cm d'isolant)	0,30	double vitrage	2,8
toiture isolée (30 cm)	0,13	triple vitrage	0,8

Pourquoi un double vitrage isole. Le verre seul conduit bien la chaleur ; c'est la **lame d'air ou d'argon immobile** entre les deux verres qui isole (gaz immobile : $\lambda \approx 0{,}025$, pas de convection si la lame est mince). Une couche métallique invisible, peu émissive, limite en plus les échanges par rayonnement : les trois modes de transfert sont combattus.

Ponts thermiques. Là où l'isolant est interrompu (jonction mur–plancher, encadrement des fenêtres, passages de câbles), la chaleur trouve une résistance faible en parallèle sur le reste de la paroi : ces zones fuient beaucoup et sont froides côté intérieur (moisissures). La caméra thermique les repère facilement.

Ex **Exemple : remplacer des fenêtres** Pour la façade précédente, $\sum U\,S = 0{,}30 \times 32 + 2{,}8 \times 8 = 32\,\mathrm{W/K}$. Sur une saison de 5 000 h avec un écart moyen de 12 K : $E = 32 \times 12 \times 5000 = 1\,920\,\mathrm{kW\cdot h}$. Avec du triple vitrage ($U = 0{,}8$), $\sum U\,S = 16\,\mathrm{W/K}$ et $E = 960\,\mathrm{kW\cdot h}$: la consommation de chauffage de la façade est divisée par deux.

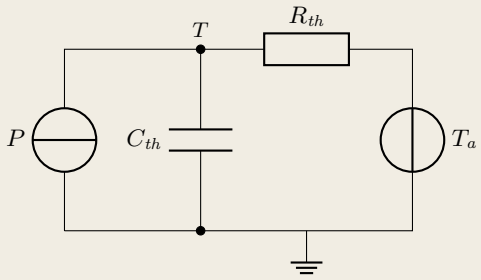
12.9 Régime transitoire : constante de temps thermique

Un moteur qui démarre ne passe pas instantanément à sa température de fonctionnement : sa masse doit d'abord s'échauffer. Au début, presque toute la chaleur produite sert à élever sa température ; à mesure qu'il chauffe, il en cède de plus en plus à l'air ambiant, jusqu'au régime permanent où il évacue toute sa puissance perdue. La rapidité de cette évolution dépend de la résistance thermique R_{th} et de la capacité thermique C_{th} du moteur.

\+ **Équation de l'échauffement et analogie** *RC* – hors programme Pendant $\mathrm{d}t$, la chaleur produite $P\,\mathrm{d}t$ sert en partie à élever la température du corps ($C_{th}\,\mathrm{d}T$), le reste étant évacué à travers R_{th} :

$$P = C_{th}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T - T_a}{R_{th}}$$

C'est l'équation d'un circuit RC alimenté par une source de courant (voir § 15.4) :

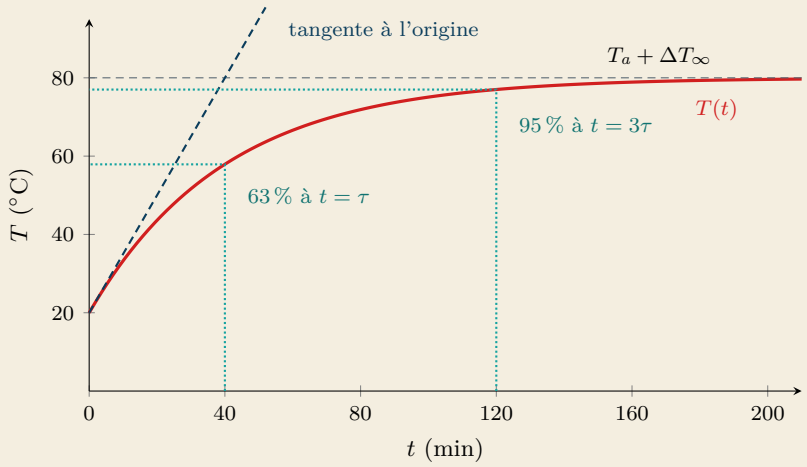


C_{th} : capacité thermique (J/K)
$\tau = R_{th}\,C_{th}$: constante de temps (s)
référence (masse) : 0 °C

À retenir · Constante de temps thermique

$$\tau = R_{th}\,C_{th} \qquad \Delta T_\infty = R_{th}\,P \qquad T(t) = T_a + \Delta T_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

τ en s (R_{th} en K/W, C_{th} en J/K) ; ΔT_∞ : échauffement final, en régime permanent. Au bout de τ, l'échauffement atteint 63 % de sa valeur finale ; au bout de 3τ, 95 % ; au bout de 5τ, plus de 99 % (régime permanent).



Méthode : lire τ sur une courbe d'échauffement. Sur l'enregistrement de $T(t)$, on lit l'échauffement final ΔT_∞, puis l'instant où l'échauffement vaut $0{,}63\,\Delta T_\infty$: c'est τ. On peut aussi tracer la tangente à l'origine : elle coupe l'asymptote horizontale à $t = \tau$. Ensuite $R_{th} = \frac{\Delta T_\infty}{P}$ et $C_{th} = \frac{\tau}{R_{th}}$ (τ en secondes).

Ex **Exemple : essai d'échauffement d'un moteur** Pertes $P = 1{,}5\,\mathrm{kW}$, $R_{th} = 0{,}040\,\mathrm{K/W}$, $C_{th} = 60\,\mathrm{kJ/K}$, ambiance 20 °C (figure ci-dessus). Échauffement final $\Delta T_\infty = 0{,}040 \times 1500 = 60\,\mathrm{K}$; $\tau = 0{,}040 \times 60\,000 = 2\,400\,\mathrm{s} = 40\,\mathrm{min}$. Après 40 min, $\Delta T = 60 \times (1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 38\,\mathrm{K}$; après 2 h (3τ), $\Delta T \approx 57\,\mathrm{K}$.

Les grosses machines ont des constantes de temps de plusieurs dizaines de minutes, voire de plusieurs heures pour un transformateur à huile : elles supportent sans dommage une

surcharge de courte durée, car leur température n'a pas le temps d'atteindre la valeur finale. À l'inverse, la puce d'un semi-conducteur a une constante de temps de quelques millisecondes : elle ne tolère aucune surcharge, ce qui explique la rapidité exigée de leurs protections.

Surcharge temporaire et refroidissement – hors programme À chaque changement de régime (surcharge, arrêt), on repart de la température atteinte à la fin du régime précédent, T_0, et l'on applique

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

où T_∞ est la température finale du **nouveau** régime et t le temps écoulé depuis le changement. Cette seule formule couvre l'échauffement ($T_\infty > T_0$) et le refroidissement ($T_\infty < T_0$).

Exemple : surcharge puis arrêt du moteur précédent. Le moteur, en régime permanent ($\Delta T = 60\,\mathrm{K}$, soit $80\,^\circ\mathrm{C}$), subit pendant 20 min une surcharge qui porte ses pertes à 2,25 kW. L'échauffement final serait $0{,}040 \times 2250 = 90\,\mathrm{K}$; au bout de 20 min :

$$\Delta T = 90 - (90 - 60)\,\mathrm{e}^{-20/40} \approx 71{,}8\,\mathrm{K} \qquad T \approx 92\,^\circ\mathrm{C}$$

Le moteur est ensuite arrêté. Son ventilateur, calé sur l'arbre, s'arrête aussi : R_{th} double et la constante de temps devient $\tau' = 80\,\mathrm{min}$. La température redescend selon $T = 20 + 71{,}8\,\mathrm{e}^{-t/80}$: $54\,^\circ\mathrm{C}$ après 1 h, $30\,^\circ\mathrm{C}$ après 160 min. Un moteur à l'arrêt refroidit lentement : on ne peut pas enchaîner les redémarrages sans attendre.

Exemple : surcharge d'un moteur démarré à froid Le même moteur ($\tau = 40\,\mathrm{min}$, ambiance $20\,^\circ\mathrm{C}$) démarre à froid avec une charge excessive : ses pertes porteraient l'échauffement final à $\Delta T'_\infty = 120\,\mathrm{K}$, alors que l'échauffement admissible est de 100 K. La limite est atteinte quand $120\left(1 - \mathrm{e}^{-t/40}\right) = 100$, soit

$$t = -40\,\ln\!\left(1 - \frac{100}{120}\right) = 40\,\ln(6) \approx 72\,\mathrm{min}$$

Déjà chaud (échauffement initial 60 K, régime nominal), il la supporterait bien moins longtemps ; avec la relation de l'encadré précédent, $\Delta T = 120 - (120 - 60)\,\mathrm{e}^{-t/40}$ atteint 100 K au bout de

$$t = 40\,\ln\!\left(\frac{120 - 60}{120 - 100}\right) = 40\,\ln(3) \approx 44\,\mathrm{min}$$

C'est pourquoi les relais thermiques déclenchent plus lentement « à froid » qu'« à chaud » : leur courbe de déclenchement tient compte de l'échauffement déjà acquis par le moteur.

Piège classique Utiliser τ en minutes dans $C_{th} = \tau / R_{th}$: il faut des secondes pour obtenir des J/K. Dans $\mathrm{e}^{-t/\tau}$, il suffit que t et τ soient dans la même unité.

L'essentiel

Chapitre 12

Flux, résistances thermiques, convection, rayonnement

Température absolue	$T\,(\mathrm{K}) = \theta\,(^\circ\mathrm{C}) + 273{,}15$
Flux thermique	$\Phi = \dfrac{Q}{\Delta t}\ (\mathrm{W})$
Densité de flux	$\varphi = \dfrac{\Phi}{S}\ (\mathrm{W \cdot m^{-2}})$
Loi de Fourier	$\Phi = \lambda\, S\, \dfrac{T_1 - T_2}{e}$
Résistance thermique	$R_{th} = \dfrac{\Delta T}{\Phi} \qquad \Delta T = R_{th}\,\Phi$
Conduction (paroi plane)	$R_{th} = \dfrac{e}{\lambda\, S} \qquad R = \dfrac{e}{\lambda}\ (\mathrm{m^2 \cdot K/W})$
Paroi composée	$R = R_{si} + \dfrac{e_1}{\lambda_1} + \dfrac{e_2}{\lambda_2} + \cdots + R_{se}$
Coefficient de transmission	$U = \dfrac{1}{R} \qquad \Phi = U\, S\, (T_i - T_e)$
En série (même flux)	$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots$
En parallèle (même ΔT)	$\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \ldots$
Convection	$\Phi = h\, S\, (T_s - T_f) \qquad R_{th} = \dfrac{1}{h\, S}$
Émissivité	$0 \leq \varepsilon \leq 1$ (peinture mate : 0,95)
Stefan-Boltzmann (T en K)	$\Phi = \varepsilon\, \sigma\, S\, T^4 \qquad \sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$
Loi de Wien	$\lambda_{max}\, T = 2\,898\ \mu\mathrm{m \cdot K}$

Bâtiment, équipements, régime transitoire

Parois en parallèle	$\Phi = \left(\sum U_k\, S_k\right)(T_i - T_e)$
Énergie perdue sur une saison	$E = \left(\sum U_k\, S_k\right)\overline{\Delta T}\,\Delta t$
Température de jonction	$T_j = T_a + P\,(R_{jc} + R_{cd} + R_{da})$
Choix du dissipateur	$R_{da} \leq \dfrac{T_{j,max} - T_a}{P} - R_{jc} - R_{cd}$
Classes d'isolation	B : 130 °C F : 155 °C H : 180 °C
Règle de Montsinger	durée de vie÷2 tous les 10 K au-delà de la classe
Armoire fermée	$T_i - T_e = R_{th}\,P$
Puissance évacuée par les parois	$P_{parois} = \dfrac{T_{i,max} - T_e}{R_{th}}$
Puissance à ventiler	$P_{vent} = P - P_{parois}$
Débit de ventilation	$D_v = 3{,}1\,\dfrac{P_{vent}}{T_{i,max} - T_e}\ (\mathrm{m^3/h})$
Constante de temps	$\tau = R_{th}\,C_{th}$
Échauffement final	$\Delta T_\infty = R_{th}\,P$
Échauffement	$T(t) = T_a + R_{th}P\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$
Repères	$t = \tau$: 63 % $t = 3\tau$: 95 % $t = 5\tau$: 99 %

Exercices

Chapitre 12

Conduction, convection, rayonnement

Exercice 12.1 – Panneaux d'une chambre froide ★☆☆

Une coopérative fruitière stocke des fruits surgelés dans une chambre froide maintenue à $-20\,°\text{C}$. Les parois, le plafond et le sol sont faits de panneaux « sandwich » : deux tôles minces entourant une mousse de polyuréthane. Le groupe frigorifique doit extraire en permanence la chaleur qui entre à travers ces panneaux. Le responsable technique veut estimer le coût de ces pertes et savoir s'il est rentable de passer à des panneaux plus épais lors de la rénovation.

Données

- Surface totale des panneaux : $S = 150\,\text{m}^2$; épaisseur de mousse : $e = 100\,\text{mm}$; conductivité du polyuréthane : $\lambda = 0{,}022\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (les tôles sont négligées).
- Températures mesurées sur les faces des panneaux : $-20\,°\text{C}$ côté intérieur, $25\,°\text{C}$ côté extérieur.
- Le groupe frigorifique extrait $2{,}5\,\text{kW}\cdot\text{h}$ de chaleur pour $1\,\text{kW}\cdot\text{h}$ d'électricité consommée. Prix de l'électricité : 0,20 € le $\text{kW}\cdot\text{h}$.

1. Préciser le sens du transfert thermique à travers les panneaux et le mode de transfert mis en jeu.
2. Calculer le flux thermique Φ qui traverse les panneaux, puis la densité de flux φ.
3. Calculer la résistance thermique R_{th} de l'ensemble des panneaux et retrouver Φ par l'analogie avec la loi d'Ohm.
4. Calculer la chaleur qui entre en une journée, en $\text{kW}\cdot\text{h}$ puis en MJ. En déduire l'énergie électrique consommée par jour pour l'extraire, puis le coût annuel (365 jours).
5. Avec des panneaux de 150 mm, calculer le nouveau flux et l'économie annuelle réalisée.

→ corrigé p. 444

Exercice 12.2 – Thermographie d'un tableau général basse tension ★☆☆

Une société de maintenance réalise chaque année la thermographie du tableau général basse tension (TGBT) d'un centre commercial, en pleine charge. Cette année, l'image thermique montre la cosse de la phase L2 d'un départ de 200 A à $95\,°\text{C}$, alors que les cosses des phases L1 et L3 sont à $45\,°\text{C}$. La température du local est de $25\,°\text{C}$. Le technicien doit interpréter la mesure et rédiger sa préconisation. Les cosses sont

recouvertes d'une gaine noire mate d'émissivité $\varepsilon = 0{,}95$; la caméra est réglée sur cette valeur.

1. Calculer, en kelvins, la température de la cosse chaude. En déduire la longueur d'onde λ_{max} du maximum de son rayonnement. Dans quel domaine se situe-t-elle ? Pourquoi faut-il une caméra spéciale ?
2. Calculer la densité de flux émise par rayonnement par la cosse chaude, puis par une cosse à 45 °C. Par combien est-elle multipliée ?
3. L'échauffement anormal provient d'une résistance de contact (serrage insuffisant). Calculer la puissance dissipée dans un contact de résistance 0,05 mΩ (contact correct), puis 0,4 mΩ (contact desserré), parcouru par 200 A. Conclure.
4. Sur la même image, une barre de cuivre nu ($\varepsilon \approx 0{,}1$), dont la température réelle est de 80 °C, apparaît à environ 32 °C. Expliquer cette erreur et proposer deux moyens de mesurer correctement sa température.
5. Rédiger en deux ou trois lignes la préconisation du technicien.

→ corrigé p. 445

Exercice 12.3 – Rénovation thermique d'un atelier de maintenance ★★☆

Une entreprise de travaux publics rénove l'atelier où elle entretient ses engins. L'hiver, le chauffage électrique peine à maintenir 19 °C et les ouvriers se plaignent de la condensation qui ruisselle sur les fenêtres. Le bureau d'études propose d'isoler les murs par l'intérieur et de remplacer les fenêtres. On vous demande de chiffrer les gains.

Données

- Murs actuels, de l'intérieur vers l'extérieur : plâtre ($e = 10$ mm, $\lambda = 0{,}25$) et briques creuses de 20 cm (résistance surfacique $R_b = 0{,}45\ \text{m}^2 \cdot \text{K/W}$). Isolation prévue : polystyrène ($e = 80$ mm, $\lambda = 0{,}032\ \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) entre le plâtre et les briques.
- Résistances superficielles : $R_{si} = 0{,}13\ \text{m}^2 \cdot \text{K/W}$, $R_{se} = 0{,}04\ \text{m}^2 \cdot \text{K/W}$.
- Surface des murs (hors fenêtres) : $160\ \text{m}^2$; surface des fenêtres : $24\ \text{m}^2$. Fenêtres actuelles en simple vitrage ($U = 5{,}8\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$) ; fenêtres proposées en double vitrage ($U = 1{,}4\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$).
- Conditions de dimensionnement : $T_i = 19$ °C, $T_e = -5$ °C. Saison de chauffage : 5 500 h avec un écart moyen de 11 K ; électricité à 0,20 € le kW·h. Coût des nouvelles fenêtres : 12 000 €.

I- Les murs

1. Calculer la résistance surfacique R_0 et le coefficient U_0 du mur actuel, puis R et U du mur isolé.
2. Pour le mur isolé, calculer la densité de flux φ et les températures de chaque interface, de l'intérieur vers l'extérieur. Tracer l'allure du profil de température. Dans quelle couche la température chute-t-elle le plus ?

II- Les déperditions de l'atelier

3. Murs isolés et fenêtres sont-ils en série ou en parallèle du point de vue thermique ? Calculer les déperditions par les murs isolés, par les fenêtres actuelles, puis au total. Quelle part revient aux fenêtres ?
4. Calculer la température de la face intérieure d'une fenêtre en simple vitrage ($T_{si} = T_i - R_{si}\,\varphi$). Expliquer la condensation observée. Reprendre le calcul avec le double vitrage.
5. Calculer l'énergie de chauffage consommée sur une saison avant et après le remplacement des fenêtres (murs isolés dans les deux cas), l'économie annuelle en euros et le temps de retour sur investissement des fenêtres.

→ corrigé p. 445

Refroidissement des équipements

Exercice 12.4 – Dissipateur d'un démarreur progressif ★★☆

Un fabricant de pompes de relevage équipe ses armoires d'un démarreur progressif : sur chaque phase, un module de deux thyristors montés tête-bêche limite le courant de démarrage. Lors de la mise au point d'une nouvelle armoire, sans contacteur de court-circuitage (« bypass »), les thyristors conduisent en permanence le courant du moteur. Le technicien doit choisir le dissipateur de chaque module.

Données

- Courant efficace par phase en régime permanent : $I = 40\,\text{A}$. Chaque thyristor conduit une alternance sur deux : son courant moyen vaut $I_{moy} = \frac{\sqrt{2}\,I}{\pi}$ et son courant efficace $I_T = \frac{I}{\sqrt{2}}$.
- Modèle d'un thyristor passant : $V_{T0} = 0{,}85\,\text{V}$, $r_T = 6\,\text{m}\Omega$; pertes $P_T = V_{T0}\,I_{moy} + r_T\,I_T^2$.
- Module (deux thyristors) : $R_{jc} = 0{,}25\,\text{K/W}$, $T_{j,max} = 125\,^\circ\text{C}$; avec pâte thermique, $R_{cd} = 0{,}10\,\text{K/W}$. Le bureau d'études impose $T_j \leq 115\,^\circ\text{C}$ en fonctionnement normal.
- Air de l'armoire : $T_a = 45\,^\circ\text{C}$. Dissipateurs disponibles (convection naturelle) : DA : 2,0 K/W ; DB : 1,6 K/W ; DC : 1,2 K/W ; DD : 0,8 K/W.

1. Calculer I_{moy}, I_T, les pertes P_T d'un thyristor, puis les pertes P du module.
2. Dessiner le schéma thermique équivalent du module monté sur son dissipateur. Établir l'expression de la résistance maximale R_{da} du dissipateur, puis la calculer.
3. Choisir le dissipateur le plus petit qui convient, puis calculer les températures du dissipateur, du boîtier et de la jonction.
4. La ventilation de l'armoire tombe en panne et l'air intérieur monte à $60\,^\circ\text{C}$. Calculer T_j et conclure.

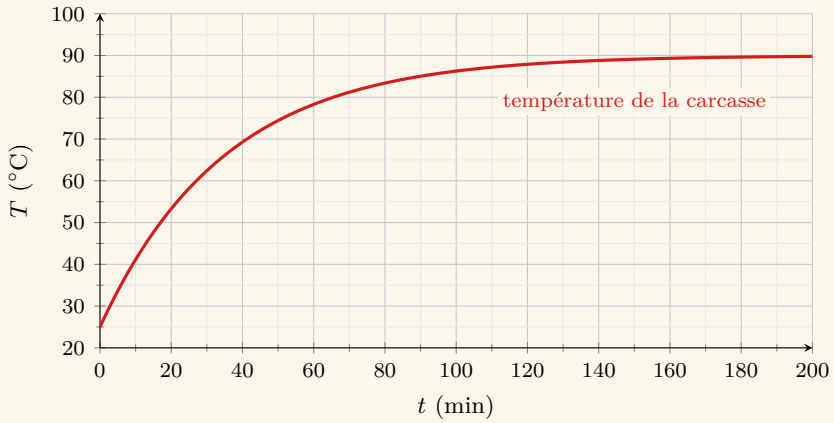
5. Le dissipateur choisi évacue la chaleur par convection naturelle avec $h \approx 8\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Estimer la surface d'échange nécessaire. Comment l'obtenir dans un faible encombrement ?

6. Expliquer pourquoi la plupart des démarreurs progressifs sont équipés d'un contacteur de bypass qui court-circuite les thyristors à la fin du démarrage.

→ corrigé p. 447

Exercice 12.5 – Essai d'échauffement d'un moteur de broyeur ★★☆

Un fabricant de broyeurs pour le recyclage du plastique teste le moteur asynchrone de sa nouvelle machine ($P_u = 30\,\mathrm{kW}$, rendement $\eta = 0{,}92$, isolation de classe F). Lors d'un essai à puissance nominale, une sonde collée sur la carcasse enregistre sa température ; la courbe obtenue est donnée ci-dessous. Le service essais veut en tirer un modèle thermique du moteur pour savoir combien de temps il peut supporter un bourrage du broyeur.



1. Calculer les pertes P du moteur. Que deviennent-elles en régime permanent ?

2. Relever sur la courbe la température ambiante et la température finale de la carcasse. En déduire l'échauffement final ΔT_∞ et la résistance thermique R_{th} carcasse–air.

3. Déterminer graphiquement la constante de temps τ par deux méthodes. Calculer la capacité thermique C_{th} et la comparer à celle de la masse du moteur, $m\,c$ (210 kg, essentiellement de l'acier, de capacité thermique massique $c = 460\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$).

4. Au bout de combien de temps le moteur atteint-il 95 % de son échauffement final ?

5. Le moteur étant en régime permanent nominal, un bourrage porte ses pertes à $P' = 4{,}5\,\mathrm{kW}$. On admet que, partant d'un échauffement ΔT_0, l'échauffement évolue alors selon $\Delta T(t) = \Delta T'_\infty - (\Delta T'_\infty - \Delta T_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, où $\Delta T'_\infty = R_{th}\,P'$. Calculer l'échauffement final qu'atteindrait la carcasse, puis son échauffement

après 20 min de bourrage. Le point chaud du bobinage est 40 K au-dessus de la carcasse : la classe F est-elle respectée ?

6. Calculer la durée maximale du bourrage avant que le point chaud n'atteigne 155 °C. Quel réglage cela suggère-t-il pour la protection du moteur ?

→ corrigé p. 448

Exercice 12.6 – Armoire d'une ligne d'embouteillage ★★★

Une usine d'eau minérale installe une nouvelle ligne d'embouteillage. Les trois convoyeurs sont entraînés par des moteurs asynchrones pilotés par des variateurs de vitesse, regroupés avec l'automate dans une armoire posée au sol, au milieu du hall (toutes faces libres). En été, l'air du hall atteint 35 °C. Le fabricant des variateurs exige une température intérieure d'au plus $T_{i,max} = 40\,°C$. On vous confie le bilan thermique de l'armoire.

Données

- Équipements : 3 variateurs de 11 kW dont les pertes valent 3 % de la puissance nominale ; alimentation 24 V : 20 W de pertes ; automate : 30 W ; appareillage (disjoncteurs, contacteurs, borniers) : 85 W.
- Armoire : hauteur $H = 2{,}0\,m$, largeur $L = 1{,}2\,m$, profondeur $p = 0{,}6\,m$; surface d'échange effective (armoire isolée) $S = 1{,}8\,H\,(L + p) + 1{,}4\,L\,p$. Tôle d'acier de 2 mm ($\lambda = 50$) ; coefficients d'échange (convection et rayonnement) $h_i = h_e = 11\,W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.
- Ventilateurs à filtre : 160 ; 300 ; 550 ; 700 ; 900 m^3/h. Climatiseurs d'armoire : 500 ; 1000 ; 1500 ; 2 000 W frigorifiques.

A- Bilan des pertes et résistance thermique

1. Calculer la puissance P dissipée dans l'armoire.
2. Calculer la surface d'échange S. Calculer les trois résistances thermiques traversées par la chaleur (convection intérieure, conduction dans la tôle, convection extérieure), puis la résistance R_{th} de l'armoire. Laquelle est négligeable ? En déduire le coefficient global d'échange de la paroi, $k = 1/(R_{th}\,S)$.

B- Ventilation

3. Calculer la température intérieure en été si l'armoire reste fermée. Conclure.
4. Calculer la puissance P_{parois} évacuée par les parois à $T_i = T_{i,max}$, puis la puissance P_{vent} et le débit D_v nécessaires. Choisir un ventilateur.
5. Avec le ventilateur choisi, la puissance évacuée vaut $\frac{T_i - T_e}{R_{th}} + \frac{D_v}{3{,}1}\,(T_i - T_e)$. Calculer la température intérieure obtenue.

C- Canicule

6. Lors d'une canicule, l'air du hall atteint 42 °C. Expliquer pourquoi la ventilation ne convient plus. Calculer la puissance frigorifique $P_{froid} = P + \frac{T_e - T_i}{R_{th}}$ d'un climatiseur capable de maintenir 40 °C et choisir un modèle.

7. Le climatiseur impose une armoire étanche (pas d'entrée d'air extérieur). Citer un avantage de cette solution dans une usine où l'on lave les sols à grande eau.

→ corrigé p. 449

Sujets de type BTS

Sujet BTS 12.A – Poste de transformation d'une zone d'activités

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une zone d'activités est alimentée par un poste de transformation préfabriqué en béton, qui abrite un transformateur sec HTA/BT de 630 kVA et le tableau basse tension. Plusieurs déclenchements de la sonde thermique du transformateur ont eu lieu l'été dernier. Le gestionnaire du réseau privé vous demande de vérifier la ventilation du poste et d'étudier la possibilité de surcharges ponctuelles.

Données

- Transformateur sec, isolation de classe F (155 °C) : $S_n = 630\,\text{kVA}$; pertes à vide $P_0 = 1{,}4\,\text{kW}$; pertes Joule nominales $P_{cc} = 6{,}6\,\text{kW}$. Les pertes Joule sont proportionnelles au carré de la charge : $P_j = (S/S_n)^2\,P_{cc}$.
- Tableau basse tension et câbles : 0,35 kW de pertes. Charge habituelle en été : $S = 500\,\text{kVA}$.
- Enveloppe du poste : surface d'échange $S_p = 46\,\text{m}^2$; béton de 12 cm ($\lambda = 1{,}75$) ; $R_{si} = 0{,}13\,\text{m}^2\cdot\text{K/W}$; $R_{se} = 0{,}04\,\text{m}^2\cdot\text{K/W}$ (rayonnement solaire négligé).
- Température extérieure en été : $T_e = 30\,°\text{C}$; température maximale de l'air du poste : $T_{i,max} = 40\,°\text{C}$.
- Ventilation naturelle par grilles basses (entrée) et hautes (sortie) ; vitesse de l'air dans les grilles : 0,5 m/s ; section utile d'une grille : $0{,}4\,\text{m}^2$.
- Échauffement moyen des enroulements : 100 K quand le transformateur dissipe ses pertes nominales $P_0 + P_{cc}$, proportionnel aux pertes ; point chaud : 15 K au-dessus de l'échauffement moyen. Constante de temps thermique des enroulements : $\tau = 1\,\text{h}$.

Partie A – Pertes à évacuer

A.1. Calculer les pertes Joule puis les pertes totales du transformateur pour la charge habituelle.

A.2. En déduire la puissance totale P dissipée dans le poste.

Partie B – Enveloppe et ventilation du poste

B.1. Calculer la résistance surfacique R et le coefficient U des parois, puis la résistance thermique R_{th} de l'enveloppe.

B.2. Grilles fermées, calculer la température de l'air du poste en été. Conclure.

B.3. Calculer la puissance évacuée par les parois à $T_{i,max}$, puis le débit d'air D_v que doit assurer la ventilation.

B.4. Calculer la section utile de grilles nécessaire et le nombre de grilles à installer en entrée et en sortie. Pourquoi place-t-on les grilles d'entrée en bas et celles de sortie en haut ?

Partie C – Échauffement du transformateur

C.1. Pour la charge habituelle, calculer l'échauffement moyen des enroulements, puis la température du point chaud (air du poste à 40 °C). Conclure.

C.2. On envisage une surcharge à $1{,}2\,S_n$. Calculer les pertes du transformateur et l'échauffement moyen final. Cette surcharge peut-elle être permanente ?

C.3. La surcharge commence alors que le transformateur est en régime permanent à 500 kVA. L'air du poste est supposé maintenu à 40 °C. Partant d'un échauffement ΔT_0, l'échauffement moyen évolue selon $\Delta T(t) = \Delta T'_\infty - (\Delta T'_\infty - \Delta T_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: préciser ΔT_0 et $\Delta T'_\infty$. Calculer la température du point chaud après 45 min de surcharge, puis la durée maximale de la surcharge.

C.4. À l'aide de la règle de Montsinger, indiquer l'effet sur la durée de vie de l'isolation d'un fonctionnement prolongé avec un point chaud à 175 °C.

Partie D – Contrôle par thermographie

D.1. Une connexion basse tension apparaît à 110 °C. Calculer la longueur d'onde du maximum de son rayonnement et préciser le domaine. Quelle est la cause probable de cet échauffement ?

→ corrigé p. 450

Sujet BTS 12.B – Local onduleurs d'une centrale photovoltaïque

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 h 15

Une plateforme logistique a équipé sa toiture d'une centrale photovoltaïque. Trois onduleurs de 25 kW et une armoire de protection côté alternatif sont installés dans un local technique de 12 m^2 construit sur le toit. Le constructeur des onduleurs garantit leur puissance jusqu'à une température ambiante de 35 °C ; au-delà, ils réduisent automatiquement leur puissance, et ils s'arrêtent à 45 °C. On vous demande d'étudier leur refroidissement et celui du local.

Données

▷ Onduleur : puissance de sortie 25 kW, rendement 0,975. Armoire de

protection : 80 W de pertes.

- ▷ Étage de puissance d'un onduleur : 6 IGBT montés sur le même dissipateur, dissipant chacun $P_k = 60\,\text{W}$ à pleine puissance. Pour chaque IGBT : $R_{jc} = 0{,}30\,\text{K/W}$, $R_{cd} = 0{,}10\,\text{K/W}$; on impose $T_j \leq 125\,^\circ\text{C}$. Air à l'intérieur de l'onduleur : $T_a = 45\,^\circ\text{C}$.
- ▷ Dissipateurs : profilé en convection naturelle, $R_{da} = 0{,}45\,\text{K/W}$; même profilé ventilé, $R_{da} = 0{,}12\,\text{K/W}$ ($0{,}45\,\text{K/W}$ si le ventilateur s'arrête).
- ▷ Murs du local ($40\,\text{m}^2$) : parpaings de 20 cm ($R = 0{,}23\,\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$) doublés de 6 cm de polystyrène ($\lambda = 0{,}032$) ; $R_{si} = 0{,}13$ et $R_{se} = 0{,}04\,\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$. Toiture ($12\,\text{m}^2$) : $U = 0{,}25\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Porte métallique ($2\,\text{m}^2$) : $U = 4{,}0\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.
- ▷ Été : $T_e = 30\,^\circ\text{C}$; consigne : $T_i \leq 35\,^\circ\text{C}$. Capacité thermique du local et de son contenu : $C_{th} = 400\,\text{kJ/K}$.
- ▷ Extracteurs d'air : 600 ; 900 ; 1200 ; $1\,500\,\text{m}^3/\text{h}$. Climatiseurs : 1,5 ; 2,5 ; 3,5 kW frigorifiques.

Partie A – Bilan des pertes

A.1. Calculer les pertes d'un onduleur à pleine puissance, puis la puissance totale P dissipée dans le local.

Partie B – Refroidissement des IGBT

B.1. Les 6 IGBT sont montés sur le même dissipateur. Représenter le schéma thermique équivalent (sources de flux, résistances, température ambiante). Quel flux traverse R_{da} ?

B.2. Montrer que $T_j = T_a + 6\,P_k\,R_{da} + P_k\,(R_{jc} + R_{cd})$, puis calculer la valeur maximale de R_{da}. Quel dissipateur faut-il ?

B.3. Calculer la température du dissipateur et celle des jonctions avec le dissipateur choisi.

B.4. Le ventilateur du dissipateur tombe en panne. Calculer la puissance maximale que peut alors dissiper chaque IGBT et la comparer à 60 W. Que fait l'onduleur ?

Partie C – Ventilation et climatisation du local

C.1. Calculer la résistance surfacique et le coefficient U_m des murs.

C.2. Les murs, la toiture et la porte sont-ils en série ou en parallèle ? Calculer $\sum U\,S$ et la résistance thermique R_{th} du local.

C.3. Calculer la puissance évacuée par les parois en été à 35 °C, puis le débit d'air nécessaire. Choisir un extracteur.

C.4. En période de canicule, l'air extérieur atteint 38 °C. Les parois apportent alors de la chaleur : la puissance frigorifique nécessaire est $P_{froid} = P + \sum U\,S\,(T_e - T_i)$. La calculer pour maintenir 35 °C et choisir un climatiseur.

Partie D – Panne de l'extracteur

D.1. L'extracteur tombe en panne un jour d'été ($T_e = 30\,°\text{C}$), alors que le local est à $35\,°\text{C}$. Calculer la constante de temps τ du local et la température finale qu'il atteindrait si les onduleurs continuaient à fonctionner.

D.2. Partant de T_0, la température évolue selon $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Calculer la durée au bout de laquelle les onduleurs s'arrêtent. Proposer une amélioration de l'installation.

→ corrigé p. 451

Corrigés

Chapitre 12

Conduction, convection, rayonnement

✓ Corrigé de l'exercice 12.1 – Panneaux d'une chambre froide

1. La chaleur va spontanément du chaud vers le froid : de l'extérieur ($25\,°\text{C}$) vers l'intérieur de la chambre ($-20\,°\text{C}$). Elle traverse la mousse solide de proche en proche, sans déplacement de matière : c'est de la **conduction**.

2. Loi de Fourier avec $\Delta T = 25 - (-20) = 45\,\text{K}$ et $e = 0{,}10\,\text{m}$:

$$\Phi = \lambda\, S\, \frac{\Delta T}{e} = 0{,}022 \times 150 \times \frac{45}{0{,}10} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Phi = 1\,485\,\text{W}}$$

Densité de flux : $\varphi = \Phi / S = 1485/150 = 9{,}9\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

3. $R_{th} = \dfrac{e}{\lambda\, S} = \dfrac{0{,}10}{0{,}022 \times 150}$ soit $\boxed{R_{th} \approx 0{,}030\,3\,\text{K/W}}$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{45}{0{,}030\,3} \approx 1\,485\,\text{W} \quad ✓$$

4. $Q = \Phi\,\Delta t = 1{,}485 \times 24 \approx 35{,}6\,\text{kW}\cdot\text{h}$, soit $1485 \times 86400 \approx 128\,\text{MJ}$ par jour.

Énergie électrique : $\dfrac{35{,}6}{2{,}5} \approx 14{,}3\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par jour, soit $14{,}26 \times 365 \approx 5\,200\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par an et un coût de $5203 \times 0{,}20$ soit $\boxed{\text{coût} \approx 1040\ €\ \text{par an}}$

5. Le flux est inversement proportionnel à l'épaisseur : $\Phi' = 1485 \times \dfrac{100}{150} = 990\,\text{W}$.

Économie de chaleur : $495\,\text{W}$ en permanence, soit $\dfrac{0{,}495 \times 24 \times 365}{2{,}5} \approx 1\,734\,\text{kW}\cdot\text{h}$ d'électricité par an : $\boxed{\text{économie} \approx 347\ €\ \text{par an}}$

✓ Corrigé de l'exercice 12.2 – Thermographie d'un tableau général basse tension

1. $T = 95 + 273{,}15 = 368{,}15\,\text{K}$. Loi de Wien : $\lambda_{max} = \dfrac{2898}{368{,}15}$ soit $\boxed{\lambda_{max} \approx 7{,}9\,\mu\text{m}}$
   C'est de l'**infrarouge** (au-delà de 0,8 µm) : l'œil et un appareil photo ordinaire n'y sont pas sensibles, il faut un capteur infrarouge.

2. Loi de Stefan-Boltzmann par mètre carré : $\varphi = \varepsilon\,\sigma\,T^4$.
$$\varphi_{95} = 0{,}95 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 368{,}15^4 \approx 989\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$$
$$\varphi_{45} = 0{,}95 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 318{,}15^4 \approx 552\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$$
   Rapport : $\left(\dfrac{368{,}15}{318{,}15}\right)^4 \approx 1{,}79$. Une différence de 50 K est très visible sur l'image.

3. $P = R\,I^2$: contact correct, $0{,}05 \times 10^{-3} \times 200^2 = 2\,\text{W}$; contact desserré, $0{,}4 \times 10^{-3} \times 200^2 = \boxed{P = 16\,\text{W}}$. Une puissance huit fois plus grande, concentrée dans un tout petit volume : l'échauffement s'emballe (l'oxydation augmente encore la résistance) et peut aller jusqu'à l'incendie du tableau.

4. Le cuivre nu, très peu émissif, rayonne peu : la caméra, réglée sur 0,95, reçoit surtout le rayonnement du local réfléchi par la barre et l'interprète comme celui d'un corps peu chaud. Remèdes : régler l'émissivité de la caméra sur 0,1 (peu précis), ou coller une pastille de ruban noir mat sur la barre et mesurer sur la pastille ; on peut aussi contrôler au thermomètre de contact, hors tension.

5. *Préconisation* : connexion L2 du départ 200 A en échauffement anormal (50 K au-dessus des phases voisines). Intervention à programmer rapidement : consignation, démontage, nettoyage des surfaces de contact, remplacement de la cosse si elle est oxydée, resserrage au couple, puis nouvelle thermographie en charge.

✓ Corrigé de l'exercice 12.3 – Rénovation thermique d'un atelier de maintenance

I- Les murs

1. Résistance du plâtre : $\dfrac{0{,}010}{0{,}25} = 0{,}04\,\text{m}^2\cdot\text{K/W}$; du polystyrène : $\dfrac{0{,}080}{0{,}032} = 2{,}5\,\text{m}^2\cdot\text{K/W}$.

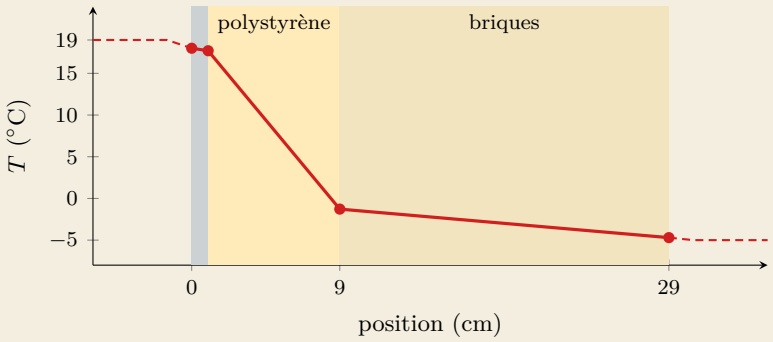
$$R_0 = 0{,}13 + 0{,}04 + 0{,}45 + 0{,}04 = 0{,}66\,\text{m}^2\cdot\text{K/W} \qquad U_0 = \frac{1}{R_0} \approx 1{,}52\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$R = R_0 + 2{,}5 = 3{,}16\,\text{m}^2\cdot\text{K/W} \qquad \boxed{U = \frac{1}{R} \approx 0{,}316\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}}$$

   L'isolant divise les pertes du mur par près de 5.

2. $\varphi = \dfrac{T_i - T_e}{R} = \dfrac{24}{3{,}16} \approx 7{,}59\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. On retranche $R_k\,\varphi$ à chaque couche :
   - face intérieure du plâtre : $19 - 0{,}13 \times 7{,}59 \approx 18{,}0\,^\circ\text{C}$;

- ▷ plâtre / polystyrène : $18{,}01 - 0{,}04 \times 7{,}59 \approx 17{,}7\,°\text{C}$;
- ▷ polystyrène / briques : $17{,}71 - 2{,}5 \times 7{,}59 \approx -1{,}3\,°\text{C}$;
- ▷ face extérieure des briques : $-1{,}28 - 0{,}45 \times 7{,}59 \approx -4{,}7\,°\text{C}$, puis $-5\,°\text{C}$ dans l'air extérieur ✓.



La température chute de 19 K dans le **polystyrène**, couche de plus forte résistance (79 % de R). Les briques sont désormais froides : elles sont du côté extérieur de l'isolant.

II- Les déperditions de l'atelier

3. Murs et fenêtres sont soumis au même écart de température (air intérieur – air extérieur) : ce sont deux chemins **en parallèle** ; leurs flux s'additionnent.

$$\Phi_m = U\,S_m\,\Delta T = 0{,}316 \times 160 \times 24 \approx 1\,215\,\text{W} \qquad \Phi_f = 5{,}8 \times 24 \times 24 \approx 3\,341\,\text{W}$$

$$\boxed{\Phi = \Phi_m + \Phi_f \approx 4{,}56\,\text{kW}}$$

Les fenêtres représentent $\dfrac{3341}{4556} \approx 73\,\%$ des déperditions pour 13 % de la surface : une fois les murs isolés, ce sont elles qu'il faut traiter.

4. Simple vitrage : $\varphi = U\,\Delta T = 5{,}8 \times 24 \approx 139\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, d'où

$$T_{si} = 19 - 0{,}13 \times 139 \quad \text{soit} \quad \boxed{T_{si} \approx 0{,}9\,°\text{C}}$$

La vitre est presque à 0 °C : la vapeur d'eau de l'air de l'atelier s'y condense (température bien inférieure au point de rosée, de l'ordre de 10 °C). Double vitrage : $T_{si} = 19 - 0{,}13 \times 1{,}4 \times 24 \approx 14{,}6\,°\text{C}$: plus de condensation dans les conditions habituelles.

5. Écart-heures de la saison : $11 \times 5500 = 60\,500\,\text{K}\cdot\text{h}$.

$$\text{avant :}\ \sum U\,S = 0{,}316 \times 160 + 5{,}8 \times 24 \approx 189{,}8\,\text{W/K}$$

$$E_1 = 189{,}8 \times 60500 \approx 11\,485\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

$$\text{après :}\ \sum U\,S = 50{,}6 + 1{,}4 \times 24 \approx 84{,}2\,\text{W/K}$$

$$E_2 = 84{,}2 \times 60500 \approx 5\,096\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

Économie : $\Delta E \approx 6\,389\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par an, soit ≈ 1278 € par an. Temps de retour : $\dfrac{12000}{1278} \approx 9{,}4$ ans, auxquels s'ajoute le gain de confort (fin de la condensation).

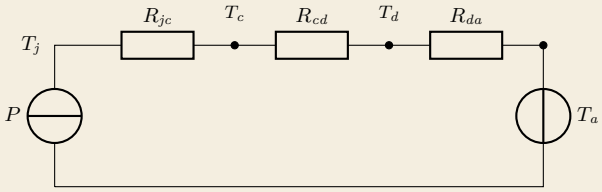
Refroidissement des équipements

✓ Corrigé de l'exercice 12.4 – Dissipateur d'un démarreur progressif

1. $I_{moy} = \dfrac{\sqrt{2}\times 40}{\pi} \approx 18{,}0\,\text{A}$; $I_T = \dfrac{40}{\sqrt{2}} \approx 28{,}3\,\text{A}$.

$P_T = 0{,}85\times 18{,}0 + 0{,}006\times 28{,}3^2 \approx 15{,}3 + 4{,}8 \approx 20{,}1\,\text{W}$ $\quad P = 2\,P_T \approx 40{,}2\,\text{W}$

2. Les pertes P (source de flux) traversent en série R_{jc}, R_{cd} et R_{da} jusqu'à l'air de l'armoire :



$T_j = T_a + P\,(R_{jc} + R_{cd} + R_{da}) \leq 115\,^\circ\text{C}$, d'où

$R_{da} \leq \dfrac{115 - T_a}{P} - R_{jc} - R_{cd} = \dfrac{115-45}{40{,}2} - 0{,}25 - 0{,}10$ soit $R_{da} \leq 1{,}39\,\text{K/W}$

3. DA et DB ont une résistance trop grande. Le plus petit qui convient est DC (1,2 K/W).

$$T_d = 45 + 40{,}2\times 1{,}2 \approx 93{,}3\,^\circ\text{C} \qquad T_c = 93{,}3 + 40{,}2\times 0{,}10 \approx 97{,}3\,^\circ\text{C}$$
$$T_j = 97{,}3 + 40{,}2\times 0{,}25 \approx 107{,}3\,^\circ\text{C} \leq 115\,^\circ\text{C} \quad ✓$$

4. $T_j = 60 + 40{,}2\times 1{,}55 \approx 122\,^\circ\text{C}$: la marge imposée par le bureau d'études est dépassée, mais $T_{j,max} = 125\,^\circ\text{C}$ est respectée de justesse. La panne doit être signalée (alarme de température) et réparée rapidement.

5. $R_{da} = \dfrac{1}{h\,S}$, d'où $S = \dfrac{1}{8\times 1{,}2} \approx 0{,}10\,\text{m}^2$, soit environ $1\,000\,\text{cm}^2$. On l'obtient avec un profilé en aluminium à nombreuses **ailettes** fines, placées **verticalement** pour favoriser la convection naturelle (et une surface noircie, qui rayonne mieux).

6. Les thyristors dissipent environ 40 W par phase, soit 120 W en permanence pour les trois phases : il faut de gros dissipateurs et cette chaleur charge l'armoire. Un contacteur de bypass, fermé à la fin du démarrage, ne présente qu'une résistance de

contact très faible : les pertes deviennent quasi nulles, les dissipateurs peuvent être petits (ils ne travaillent que pendant le démarrage, de courte durée) et la fiabilité augmente.

✓ Corrigé de l'exercice 12.5 – Essai d'échauffement d'un moteur de broyeur

1. $P = P_u\left(\dfrac{1}{\eta}-1\right) = 30\times\left(\dfrac{1}{0{,}92}-1\right)$ soit $\boxed{P \approx 2{,}61\,\text{kW}}$. En régime permanent, la température ne varie plus : toute cette puissance est cédée à l'air ambiant (convection, rayonnement).

2. Ambiante : $T_a = 25\,°\text{C}$ (début de la courbe) ; température finale : $90\,°\text{C}$. Donc $\Delta T_\infty = 65\,\text{K}$ et

$$R_{th} = \frac{\Delta T_\infty}{P} = \frac{65}{2609} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{th} \approx 0{,}024\,9\,\text{K/W}}$$

3. **Méthode des** $63\,\%$: $T = 25+0{,}63\times 65 \approx 66\,°\text{C}$, atteinte à $t \approx 35\,\text{min}$. **Méthode de la tangente** : la tangente à l'origine (pente initiale $\approx 1{,}86\,\text{K/min}$) coupe l'asymptote $T = 90\,°\text{C}$ vers $t \approx 35\,\text{min}$. Donc $\boxed{\tau \approx 35\,\text{min} = 2\,100\,\text{s}}$

$$C_{th} = \frac{\tau}{R_{th}} = \frac{2100}{0{,}024\,9} \approx 84\,\text{kJ/K} \qquad m\,c = 210\times 460 \approx 97\,\text{kJ/K}$$

Les deux valeurs sont du même ordre : la capacité thermique du moteur est bien celle de sa masse métallique (la différence vient du modèle simplifié à une seule constante de temps).

4. $3\tau = 105\,\text{min}$ (environ 1 h 45 min), soit $T \approx 87\,°\text{C}$.

5. Échauffement final sous P' : $\Delta T'_\infty = R_{th}\,P' = 0{,}024\,9\times 4500 \approx 112\,\text{K}$. Partant de $65\,\text{K}$:

$$\Delta T(t) = \Delta T'_\infty - (\Delta T'_\infty - 65)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \Delta T(20\,\text{min}) = 112 - 47\times \mathrm{e}^{-20/35} \approx 85{,}5\,\text{K}$$

Carcasse : $25 + 85{,}5 \approx 110{,}5\,°\text{C}$; point chaud : $\approx \boxed{150{,}5\,°\text{C}} < 155\,°\text{C}$: la classe F est respectée, de justesse.

6. Limite : point chaud à $155\,°\text{C}$, soit une carcasse à $115\,°\text{C}$, $\Delta T = 90\,\text{K}$:

$$t_{max} = \tau\,\ln\left(\frac{\Delta T'_\infty - 65}{\Delta T'_\infty - 90}\right) = 35\times\ln\left(\frac{47{,}1}{22{,}1}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{max} \approx 26\,\text{min}}$$

La protection thermique du moteur (relais thermique, ou mieux sondes CTP dans le bobinage) doit couper l'alimentation avant 25 min environ de bourrage ; en pratique, on détecte aussi le bourrage par la surintensité et on arrête le broyeur bien plus tôt.

✓ Corrigé de l'exercice 12.6 – Armoire d'une ligne d'embouteillage

1. Variateurs : $3 \times 0{,}03 \times 11000 = 990\,\text{W}$, d'où $P = 990 + 20 + 30 + 85$ soit $\boxed{P = 1\,125\,\text{W}}$

2. $S = 1{,}8 \times 2 \times (1{,}2 + 0{,}6) + 1{,}4 \times 1{,}2 \times 0{,}6 = 6{,}48 + 1{,}008 \approx 7{,}49\,\text{m}^2$.

$$R_i = R_e = \frac{1}{h\,S} = \frac{1}{11 \times 7{,}49} \approx 0{,}012\,1\,\text{K/W}$$

$$R_{tole} = \frac{e}{\lambda\,S} = \frac{0{,}002}{50 \times 7{,}49} \approx 5{,}3 \times 10^{-6}\,\text{K/W}$$

$$\boxed{R_{th} = R_i + R_{tole} + R_e \approx 0{,}024\,3\,\text{K/W}}$$

La tôle d'acier, mince et très conductrice, a une résistance négligeable : tout se joue dans les échanges superficiels. $k = \dfrac{1}{R_{th}\,S} \approx 5{,}5\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$: c'est la valeur usuelle pour une armoire en tôle peinte.

B- Ventilation

3. $T_i = T_e + R_{th}\,P = 35 + 0{,}024\,3 \times 1125 \approx \boxed{62\,^\circ\text{C}}$: bien au-delà des 40 °C admis ; les variateurs se mettraient en défaut. Il faut une ventilation forcée.

4. Parois à $T_{i,max}$, puis ventilation :

$$P_{parois} = \frac{40 - 35}{0{,}024\,3} \approx 206\,\text{W} \qquad P_{vent} = 1125 - 206 \approx 919\,\text{W}$$

$$D_v = 3{,}1 \times \frac{919}{5} \quad \text{soit} \quad \boxed{D_v \approx 570\,\text{m}^3/\text{h}}$$

On choisit le modèle immédiatement supérieur : $700\,\text{m}^3/\text{h}$ (le $550\,\text{m}^3/\text{h}$ est insuffisant). En pratique, on tient aussi compte de l'encrassement progressif du filtre, qui réduit le débit.

5. $P = (T_i - T_e)\left(\dfrac{1}{R_{th}} + \dfrac{700}{3{,}1}\right) = (T_i - 35) \times (41{,}2 + 225{,}8)$, d'où

$$T_i - 35 = \frac{1125}{267} \approx 4{,}2\,\text{K} \qquad \boxed{T_i \approx 39{,}2\,^\circ\text{C}} \leq 40\,^\circ\text{C} \quad ✓$$

C- Canicule

6. L'air extérieur (42 °C) est plus chaud que la consigne : la ventilation ferait entrer de l'air trop chaud, et l'armoire ne pourrait pas descendre sous 42 °C. Les parois, elles, apportent de la chaleur :

$$P_{froid} = P + \frac{T_e - T_i}{R_{th}} = 1125 + \frac{2}{0{,}024\,3} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_{froid} \approx 1\,207\,\text{W}}$$

On choisit le climatiseur de 1 500 W.

7. Armoire étanche : les poussières, l'humidité et les projections d'eau du lavage ne pénètrent pas (indice de protection élevé conservé), pas de filtre à changer ; les composants sont mieux protégés de la corrosion.

Méthode Dans un bilan d'armoire, on commence toujours par l'armoire fermée : si $T_i \leq T_{i,max}$, rien à faire ; sinon ventilation si $T_e < T_{i,max}$ (avec une marge de quelques kelvins), climatisation sinon.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 12.A – Poste de transformation d'une zone d'activités

Partie A – Pertes à évacuer

A.1. $\dfrac{S}{S_n} = \dfrac{500}{630} \approx 0{,}794$; $P_j = 0{,}794^2 \times 6{,}6 \approx 4{,}16\,\text{kW}$; puis

$$P_{tr} = P_0 + P_j = 1{,}4 + 4{,}16 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_{tr} \approx 5{,}56\,\text{kW}}$$

A.2. $P = 5{,}56 + 0{,}35$ soit $\boxed{P \approx 5{,}91\,\text{kW}}$

Partie B – Enveloppe et ventilation du poste

B.1. $R = 0{,}13 + \dfrac{0{,}12}{1{,}75} + 0{,}04 \approx 0{,}239\,\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$; $U = \dfrac{1}{R} \approx 4{,}19\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$;

$$R_{th} = \frac{1}{U\,S_p} = \frac{1}{4{,}19 \times 46} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{th} \approx 5{,}19 \times 10^{-3}\,\text{K/W}}$$

B.2. $T_i = T_e + R_{th}\,P = 30 + 5{,}19 \times 10^{-3} \times 5907 \approx 60{,}6\,^\circ\text{C}$: bien au-dessus de $40\,^\circ\text{C}$. Le béton non isolé laisse pourtant bien passer la chaleur, mais pas assez : la ventilation est indispensable.

B.3. $P_{parois} = \dfrac{40 - 30}{5{,}19 \times 10^{-3}} \approx 1\,928\,\text{W}$; $P_{vent} = 5907 - 1928 \approx 3\,979\,\text{W}$;

$$D_v = 3{,}1 \times \frac{3979}{10} \quad \text{soit} \quad \boxed{D_v \approx 1\,234\,\text{m}^3/\text{h}}$$

B.4. Section utile : $\dfrac{D_v}{3600 \times v} = \dfrac{1234}{3600 \times 0{,}5} \approx 0{,}69\,\text{m}^2$, soit $\dfrac{0{,}69}{0{,}4} \approx 1{,}7$, d'où $\boxed{\text{2 grilles en entrée, 2 en sortie}}$. L'air chauffé par le transformateur, moins dense, monte : il sort naturellement par le haut et aspire l'air frais par le bas (effet de cheminée). C'est ce tirage naturel qui fait circuler l'air sans ventilateur.

Partie C – Échauffement du transformateur

C.1. $\Delta T = 100 \times \dfrac{5{,}56}{1{,}4+6{,}6} \approx 69{,}5\,\text{K}$; point chaud :

$$40 + 69{,}5 + 15 \approx \boxed{124{,}5\,^\circ\text{C}} < 155\,^\circ\text{C}$$

Large marge : les déclenchements de l'été dernier venaient de l'air du poste, trop chaud (ventilation insuffisante), et non de la charge.

C.2. $P' = 1{,}4 + 1{,}2^2 \times 6{,}6 \approx 10{,}9\,\text{kW}$; $\Delta T'_\infty = 100 \times \dfrac{10{,}9}{8} \approx 136\,\text{K}$. En régime permanent, le point chaud atteindrait $40 + 136 + 15 \approx 191\,^\circ\text{C} > 155\,^\circ\text{C}$: la surcharge **ne peut pas être permanente**.

C.3. Partant de $\Delta T_0 = 69{,}5\,\text{K}$: $\Delta T(t) = \Delta T'_\infty - (\Delta T'_\infty - \Delta T_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

$\Delta T(45\,\text{min}) = 136{,}3 - 66{,}8 \times \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 104{,}7\,\text{K}$ $\quad T_{pc} \approx 40 + 104{,}7 + 15 \approx 160\,^\circ\text{C}$

Trop chaud. Limite : $T_{pc} = 155\,^\circ\text{C}$, soit $\Delta T = 100\,\text{K}$:

$$t_{max} = \tau\,\ln\left(\frac{136{,}3-69{,}5}{136{,}3-100}\right) = 60 \times \ln\left(\frac{66{,}8}{36{,}3}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{max} \approx 37\,\text{min}}$$

C.4. 175 °C est 20 K au-dessus de la classe F : la durée de vie de l'isolation est divisée par $2^2 = 4$: une isolation prévue pour durer 20 ans n'en durerait plus que 5. Inversement, chaque tranche de 10 K gagnée sur la température du point chaud double environ la durée de vie : c'est tout l'intérêt d'une bonne ventilation du poste.

Partie D – Contrôle par thermographie

D.1. $\lambda_{max} = \dfrac{2898}{110 + 273{,}15} \approx 7{,}6\,\mu\text{m}$: infrarouge. Un échauffement localisé d'une connexion traduit une résistance de contact trop grande (serrage insuffisant, oxydation) : $P = R\,I^2$ y devient important.

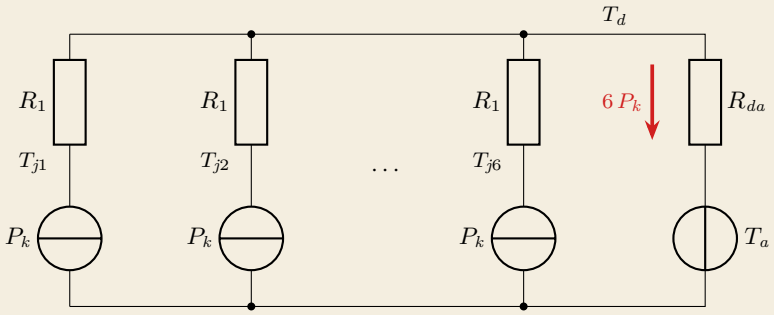
✓ Corrigé du sujet BTS 12.B – Local onduleurs d'une centrale photovoltaïque

Partie A – Bilan des pertes

A.1. Pertes d'un onduleur : $\dfrac{25}{0{,}975} - 25 \approx 0{,}641\,\text{kW}$; $P = 3 \times 641 + 80$ soit $\boxed{P \approx 2{,}0\,\text{kW}}$ (2 003 W). Les onduleurs en produisent l'essentiel (1 923 W) : c'est leur chaleur qu'il faut évacuer du local.

Partie B – Refroidissement des IGBT

B.1. Chaque IGBT est une source de flux P_k suivie de $R_1 = R_{jc} + R_{cd} = 0{,}40\,\text{K/W}$; les six branches arrivent au même dissipateur (température T_d), relié à l'air par R_{da} :



Par la « loi des nœuds » au point T_d, R_{da} est traversée par le flux total $6\,P_k = 360\,\text{W}$.

B.2. $T_d = T_a + 6\,P_k\,R_{da}$, puis, dans la branche d'un IGBT, $T_j = T_d + P_k\,(R_{jc} + R_{cd})$: on obtient la relation demandée. Avec $T_j \leq 125\,^\circ\text{C}$:

$$R_{da} \leq \frac{125 - 45 - 60 \times 0{,}40}{360} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{da} \leq 0{,}156\,\text{K/W}}$$

Le profilé naturel (0,45 K/W) ne convient pas : il faut le **profilé ventilé** (0,12 K/W).

B.3. $T_d = 45 + 360 \times 0{,}12 \approx 88{,}2\,^\circ\text{C}$; $T_j = 88{,}2 + 60 \times 0{,}40$ soit $\boxed{T_j \approx 112\,^\circ\text{C}}$

B.4. Avec $R_{da} = 0{,}45\,\text{K/W}$: $125 = 45 + P_k\,(6 \times 0{,}45 + 0{,}40)$, d'où

$$P_{k,max} = \frac{80}{3{,}1} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_{k,max} \approx 25{,}8\,\text{W}}$$

soit 43 % des 60 W de pleine puissance : l'onduleur doit réduire fortement sa puissance (ou s'arrêter) pour protéger ses IGBT, d'où une perte de production jusqu'à la réparation.

Partie C – Ventilation et climatisation du local

C.1. $R_m = 0{,}13 + 0{,}23 + \dfrac{0{,}06}{0{,}032} + 0{,}04 = 2{,}275\,\text{m}^2\cdot\text{K/W}$; $\boxed{U_m \approx 0{,}44\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}}$

C.2. Ils relient tous l'air intérieur à l'air extérieur : ils sont **en parallèle**.

$$\sum U\,S = 0{,}44 \times 40 + 0{,}25 \times 12 + 4{,}0 \times 2 \approx 17{,}6 + 3 + 8 = 28{,}6\,\text{W/K}$$

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{\sum U\,S} \approx 0{,}035\,\text{K/W}}$$

Remarque : la petite porte métallique laisse passer près de trois fois plus de chaleur que toute la toiture, et près de la moitié de ce que laissent passer les murs.

C.3. $P_{parois} = 28{,}6 \times (35 - 30) \approx 143\,\text{W}$; $P_{vent} = 2003 - 143 \approx 1\,860\,\text{W}$;

$$D_v = 3{,}1 \times \frac{1860}{5} \quad \text{soit} \quad \boxed{D_v \approx 1\,153\,\text{m}^3/\text{h}} \Rightarrow \text{extracteur de } 1\,200\,\text{m}^3/\text{h}$$

Le local est si bien isolé que les parois n'évacuent presque rien : la quasi-totalité des pertes part par la ventilation.

C.4. $P_{froid} = P + \sum U\,S\,(T_e - T_i) = 2003 + 28{,}6 \times 3$ soit $\boxed{P_{froid} \approx 2{,}09\,\text{kW}}$ $\Rightarrow$ climatiseur de 2,5 kW.

Partie D – Panne de l'extracteur

D.1. $\tau = R_{th}\,C_{th} = 0{,}035 \times 400 \times 10^3 \approx 14\,000\,\text{s}$, soit $\boxed{\tau \approx 3{,}9\,\text{h}}$;

$$T_\infty = T_e + R_{th}\,P = 30 + 0{,}035 \times 2003 \approx 100\,^\circ\text{C}$$

D.2. $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\,\text{e}^{-t/\tau}$ avec $T_0 = 35\,^\circ\text{C}$ et $T_\infty \approx 100\,^\circ\text{C}$. Arrêt à 45 °C :

$$t = \tau\,\ln\left(\frac{T_\infty - T_0}{T_\infty - 45}\right) = 13\,995 \times \ln\left(\frac{65{,}1}{55{,}1}\right) \approx 2\,335\,\text{s} \quad \text{soit} \quad \boxed{t \approx 39\,\text{min}}$$

(Les onduleurs commencent même à réduire leur puissance dès que le local dépasse 35 °C.) Améliorations : doubler l'extracteur (deux extracteurs, dont un de secours), surveiller son fonctionnement par l'automate (alarme), ou installer le climatiseur de la question C.4, qui assure aussi le fonctionnement en canicule.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ calculer un flux, une densité de flux et une résistance thermique de conduction ; — ex. 12.1, 12.3
- ☐ exploiter les lois du rayonnement et une image de caméra thermique ; — ex. 12.2, sujet A
- ☐ associer des résistances thermiques en série et en parallèle ; — ex. 12.3, sujet B
- ☐ choisir un dissipateur pour un composant de puissance ; — ex. 12.4, sujet B
- ☐ dimensionner la ventilation ou la climatisation d'une armoire ou d'un local ; — ex. 12.6, sujet B
- ☐ exploiter une courbe d'échauffement et utiliser la constante de temps. — ex. 12.5, sujet A

Notes

CHAPITRE

13

Photométrie et éclairagisme

Grandeurs photométriques, sources, méthode des flux et rénovation d'un éclairage

Dans ce chapitre

- Lumière visible et sensibilité de l'œil
- Flux, intensité, éclairement, luminance
- Loi de l'inverse du carré et loi du cosinus
- Sources : efficacité, température de couleur, IRC
- Normes, méthodes des flux et point par point
- Bilan énergétique d'une rénovation d'éclairage

Objectifs

- ✓ Relier flux, intensité, éclairement et luminance
- ✓ Calculer un éclairement en un point à partir d'une indicatrice
- ✓ Dimensionner un éclairage intérieur par la méthode des flux
- ✓ Chiffrer les économies et la rentabilité d'une rénovation

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 13

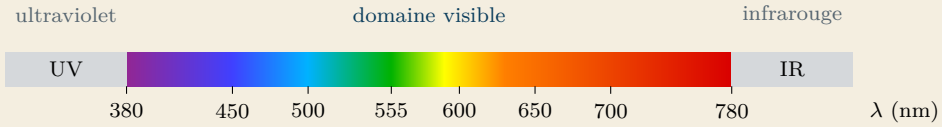
Cours — Chapitre 13

L'éclairage représente une part importante de la consommation d'électricité des bâtiments tertiaires et industriels. L'électrotechnicien doit savoir **combien** de luminaires installer, **où** les placer et **lesquels** choisir pour respecter les exigences de confort visuel, tout en consommant le moins possible. La **photométrie** fournit les grandeurs et les lois ; l'**éclairagisme** les applique au projet.

13.1 La lumière et l'œil

Le spectre visible

La lumière est une **onde électromagnétique**, de même nature que les ondes radio ou les rayons X. Elle est caractérisée par sa longueur d'onde λ. L'œil humain n'est sensible qu'à un domaine étroit, le **spectre visible**.



À retenir · Domaine visible

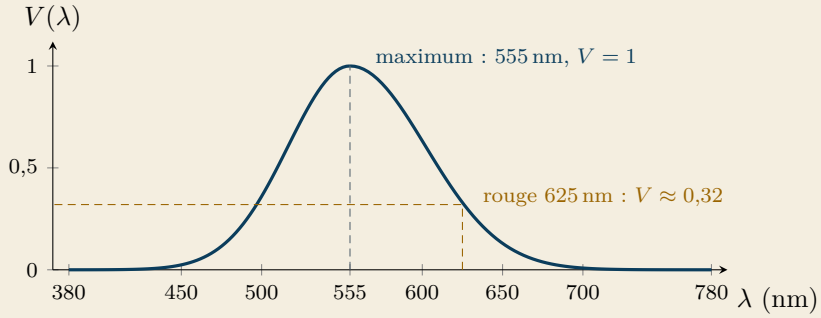
$$380\,\text{nm (violet)} < \lambda < 780\,\text{nm (rouge)}$$

En dessous : ultraviolet (UV), qui provoque les coups de soleil et excite les poudres fluorescentes. Au-dessus : infrarouge (IR), le rayonnement thermique.

Un **spectre continu** (Soleil, filament chauffé) couvre une plage continue de longueurs d'onde ; sa couleur dépend de la répartition de la puissance : un filament peu chauffé paraît rouge-orangé. Une lampe à décharge a un **spectre de raies**.

La sensibilité de l'œil

L'œil n'est pas également sensible à toutes les couleurs. En vision de jour, sa sensibilité relative $V(\lambda)$ est **maximale à** 555 nm (jaune-vert) et devient nulle aux limites du visible.



C'est pourquoi la photométrie ne mesure pas l'énergie rayonnée, mais la lumière **telle que l'œil la perçoit**. Un watt rayonné dans le jaune-vert « éclaire » trois fois plus qu'un watt rayonné dans le rouge à 625 nm.

★ **À retenir · Flux lumineux d'un rayonnement monochromatique**

$$\Phi = 683 \times V(\lambda) \times P_{ray}$$

Φ : flux lumineux (lm) ; $V(\lambda)$: sensibilité relative de l'œil, entre 0 et 1 ; P_{ray} : puissance rayonnée (W). Un watt rayonné à 555 nm produit au maximum 683 lm : c'est la limite théorique de l'efficacité lumineuse.

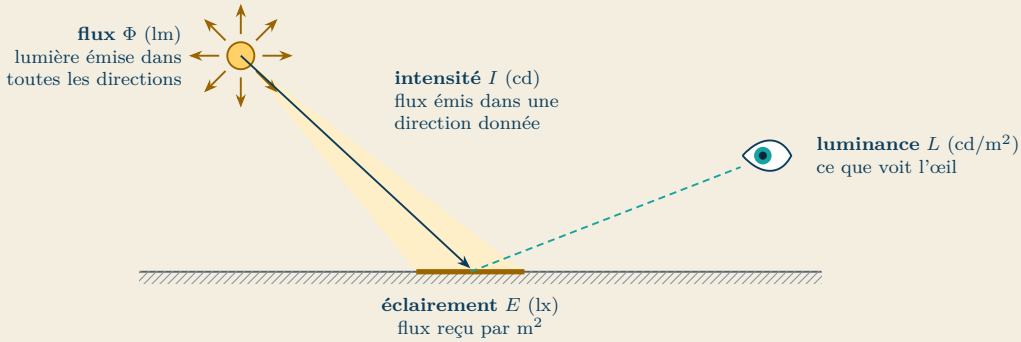
Ex **Exemple : feu de chantier à LED ambre** Le module LED d'un feu de chantier rayonne $P_{ray} = 0{,}5$ W à $\lambda = 590$ nm, où $V = 0{,}757$:

$$\Phi = 683 \times 0{,}757 \times 0{,}5 \approx 259 \text{ lm}$$

Le même rayonnement à 555 nm produirait $683 \times 0{,}5 \approx 342$ lm. C'est pour la même raison que les gilets haute visibilité et la signalisation de sécurité utilisent le jaune-vert.

13.2 Les grandeurs photométriques

Quatre grandeurs décrivent la lumière, de la source jusqu'à l'œil de l'observateur.



Flux lumineux et efficacité lumineuse

D **Définition** Le **flux lumineux** Φ est la quantité de lumière émise par une source dans toutes les directions, pondérée par la sensibilité de l'œil. Unité : le **lumen** (lm). C'est la donnée principale imprimée sur l'emballage d'une lampe ou dans le catalogue d'un luminaire.

Pour comparer les technologies, on rapporte le flux à la puissance électrique absorbée.

À retenir · Efficacité lumineuse

$$\eta = \frac{\Phi}{P}$$

η en lm/W ; Φ en lm ; P : puissance électrique absorbée (W), **appareillage compris** (ballast, driver).

Exemple Une dalle LED de bureau absorbe 29 W et émet 3 600 lm : $\eta = 3600/29 \approx 124$ lm/W. Un luminaire à tube fluorescent de 58 W avec son ballast ferromagnétique (10 W) émet 5 200 lm : $\eta = 5200/68 \approx 76$ lm/W.

Piège classique Comparer des lampes par leur puissance (« équivalent 60 W ») : c'est le **flux** en lumens qui dit combien une lampe éclaire, la puissance dit seulement ce qu'elle consomme. Et ne pas oublier les pertes du ballast ou du driver dans P.

Intensité lumineuse

Définition L'**intensité lumineuse** I caractérise la lumière émise par une source **dans une direction donnée**. Unité : la **candela** (cd), unité de base du Système international ; une bougie a une intensité voisine de 1 cd.

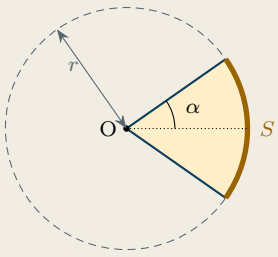
À retenir · Source isotrope Une source qui émet uniformément dans tout l'espace a la même intensité dans toutes les directions :

$$\Phi = 4\pi\, I$$

Une lampe nue de 900 lm a une intensité $I = 900/4\pi \approx 72$ cd ; un spot de même flux, qui le concentre dans un cône étroit, dépasse 2 000 cd dans l'axe.

Angle solide – hors programme

Un **angle solide** Ω est l'équivalent, dans l'espace, d'un angle plan : un cône de sommet O découpe une calotte de surface S sur une sphère de rayon r centrée en O, et $\Omega = S/r^2$ (en stéradians, sr). L'espace entier vaut 4π ; un cône de demi-angle au sommet α vaut $\Omega = 2\pi\,(1-\cos(\alpha))$. L'intensité est le flux émis par unité d'angle solide : $I = \Phi/\Omega$.



Éclairement

D

Définition L'**éclairement** E d'une surface est le flux lumineux qu'elle reçoit par unité de surface. Unité : le **lux** (lx), avec $1\,\text{lx} = 1\,\text{lm/m}^2$. Il se mesure avec un **luxmètre** posé sur le plan de travail, cellule vers le haut.

★

À retenir · Éclairement moyen

$$E = \frac{\Phi}{S}$$

E en lx ; Φ : flux reçu par la surface (lm) ; S : surface éclairée (m^2).

Situation	E (lx)	Situation	E (lx)
nuit de pleine lune	0,2	bureau, salle de classe	300 à 500
rue éclairée	10 à 30	travaux de précision	750 à 1 000
circulation intérieure	100	plein soleil d'été	100 000

✗

Piège classique Confondre lumen et lux. Le **lumen** caractérise la **source** (ce qu'elle émet) ; le **lux** caractérise la **surface éclairée** (ce qu'elle reçoit). Une même lampe de 1 000 lm donne 1 000 lx sur $1\,\text{m}^2$, mais seulement 10 lx si son flux se répartit sur $100\,\text{m}^2$.

Luminance et éblouissement

D

Définition La **luminance** L d'une surface lumineuse (source ou objet éclairé) est l'intensité qu'elle émet par unité de surface **apparente**. Unité : cd/m^2.

C'est la grandeur à laquelle l'œil est sensible : une feuille blanche et une feuille noire posées côte à côte reçoivent le même éclairement, mais n'ont pas la même luminance. Ordres de grandeur : écran d'ordinateur 100 à $300\,\text{cd/m}^2$; dalle LED opale 3 000 à $6\,000\,\text{cd/m}^2$; LED nue, plusieurs millions de cd/m^2.

+

Calculer une luminance – hors programme Vue sous l'angle θ par rapport à sa normale, une surface S qui émet l'intensité I a une luminance $L = I/(S\cos(\theta))$. Pour une surface mate de facteur de réflexion ρ recevant l'éclairement E : $L = \rho\,E/\pi$. Sous 500 lx, une feuille blanche ($\rho = 0{,}8$) a une luminance d'environ $127\,\text{cd/m}^2$, une feuille noire ($\rho = 0{,}05$) seulement $8\,\text{cd/m}^2$.

Une source de forte luminance dans le champ de vision provoque l'**éblouissement** : gêne, fatigue visuelle, baisse de performance. On le limite par des diffuseurs opales, des grilles de défilement et une bonne implantation. La norme fixe un indice d'éblouissement maximal, l'**UGR** : 19 pour un bureau, 22 pour un atelier, 28 pour une circulation.

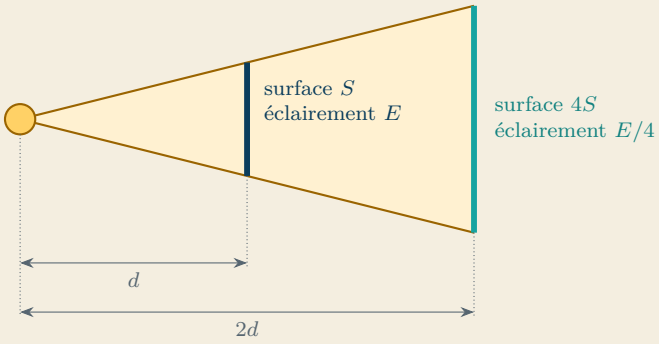
Grandeur	Symb.	Unité	Ce qu'elle décrit
flux lumineux	Φ	lumen (lm)	toute la lumière émise par la source
intensité	I	candela (cd)	lumière émise dans une direction donnée
éclairement	E	lux (lx)	lumière reçue par une surface (lm/m^2)
luminance	L	cd/m^2	« brillance » perçue par l'œil
efficacité	η	lm/W	lumière produite par watt consommé

13.3 Éclairement produit par une source ponctuelle

Une source est considérée comme **ponctuelle** lorsque la distance d'observation est grande devant ses dimensions (au moins cinq fois).

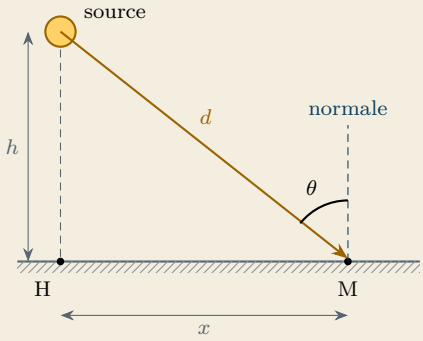
Loi de l'inverse du carré de la distance

Le flux émis dans un cône donné se répartit sur une surface qui croît comme le carré de la distance : à une distance double, le même flux couvre une surface quatre fois plus grande. L'éclairement est donc divisé par quatre.



Loi du cosinus

Si la surface éclairée n'est pas perpendiculaire aux rayons, le même faisceau s'étale sur une surface plus grande : l'éclairement est multiplié par $\cos(\theta)$, où θ est l'angle entre le rayon lumineux et la **normale** à la surface.



À retenir · Éclairement en un point

$$E = \frac{I\cos(\theta)}{d^2}$$

I : intensité de la source en direction du point (cd) ; d : distance source–point (m) ; θ : angle entre le rayon et la normale à la surface.

Pour un plan horizontal situé à la hauteur h sous la source :

$$d = \sqrt{h^2 + x^2} \qquad \text{et} \qquad \cos(\theta) = \frac{h}{d}$$

À la verticale de la source (point H), $\theta = 0$ et

$$E_H = \frac{I}{h^2}$$

Exemple Une lampe isotrope d'intensité $I = 400\,\text{cd}$ est à $h = 3\,\text{m}$ au-dessus d'un établi. On calcule l'éclairement à sa verticale (H), puis en un point M situé à $x = 4\,\text{m}$, pour lequel $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{m}$ et $\cos(\theta) = 3/5 = 0{,}6$:

$$E_H = \frac{400}{3^2} \approx 44{,}4\,\text{lx} \qquad E_M = \frac{400 \times 0{,}6}{5^2} = 9{,}6\,\text{lx}$$

L'éclairement est divisé par plus de 4 : le point est plus loin **et** éclairé en oblique.

Piège classique L'angle θ se mesure par rapport à la **normale** à la surface éclairée, pas par rapport à la surface elle-même. Et la distance d est la distance source–point, pas la hauteur h (sauf à la verticale de la source).

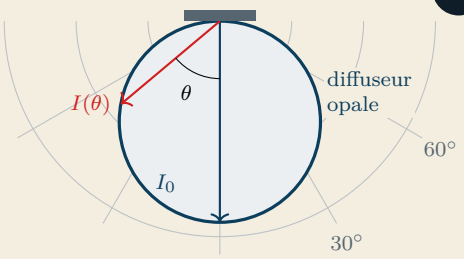
Méthode : éclairement en un point.

1. Repérer h et le décalage horizontal x.
2. Calculer $d = \sqrt{h^2 + x^2}$ et $\cos(\theta) = h/d$.
3. Déterminer l'intensité I émise vers le point (constante, ou lue sur l'indicatrice pour l'angle θ).
4. Calculer $E = I\cos(\theta)/d^2$, puis additionner les contributions s'il y a plusieurs sources.

Indicatrice d'un luminaire

Un luminaire n'est pas isotrope : son réflecteur et son diffuseur dirigent la lumière. La courbe $I(\theta)$ tracée en coordonnées polaires est son **indicatrice** (ou courbe photométrique). Les catalogues la donnent pour un flux de 1 000 lm, en cd/klm.

Un diffuseur opale (dalle, downlight) est une source **lambertienne** : son indicatrice est un cercle tangent au luminaire. Un spot concentre au contraire son flux dans un faisceau étroit autour de l'axe : son indicatrice est un lobe allongé.



À retenir · Source lambertienne

$$I(\theta) = I_0 \cos(\theta)$$

Lecture d'une indicatrice de catalogue : $I = I_{lue} \times \Phi/1000$, avec I_{lue} en cd/klm et Φ flux du luminaire en lm. Pour un point M décalé, on calcule l'intensité émise dans sa direction, $I(\theta)$, puis on applique $E = I(\theta)\cos(\theta)/d^2$: l'angle θ intervient **deux fois**.

Exemple : downlight de bureau Un downlight opale émet 2 000 lm. Son indicatrice donne $I_{lue} = 318{,}3$ cd/klm dans l'axe, d'où $I_0 = 318{,}3 \times 2 \approx 637$ cd. Hauteur utile $h = 2{,}2$ m :

$$\text{à la verticale : } E_A = \frac{637}{2{,}2^2} \approx 132\,\text{lx}$$

À 1,5 m de la verticale : $\tan(\theta) = 1{,}5/2{,}2$, $\theta \approx 34{,}3°$, $\cos(\theta) \approx 0{,}826$, $d = \sqrt{2{,}2^2 + 1{,}5^2} \approx 2{,}66$ m et $I(\theta) = 637 \times 0{,}826 \approx 526$ cd :

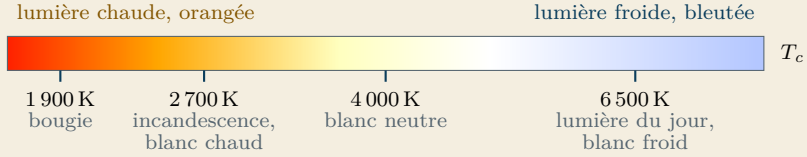
$$E_M = \frac{526 \times 0{,}826}{2{,}66^2} \approx 61\,\text{lx}$$

Deux résultats utiles – hors programme Pour une source lambertienne, le flux total vaut $\Phi = \pi\, I_0$. Sur un plan horizontal situé à la hauteur h, comme $d = h/\cos(\theta)$, on obtient $E = I\cos^3(\theta)/h^2$ pour une source isotrope et $E = I_0\cos^4(\theta)/h^2$ pour une source lambertienne.

13.4 Couleur de la lumière

Température de couleur

Deux lampes « blanches » n'ont pas la même teinte. La **température de couleur** T_c, en kelvins, est la température d'un corps chauffé (corps noir) qui émettrait une lumière de même teinte.



On choisit $T_c = 2\,700$ K à $3\,000$ K pour une ambiance chaleureuse (hôtellerie, habitat), $4\,000$ K pour les bureaux, écoles et ateliers, $5\,000$ K à $6\,500$ K pour les tâches de contrôle visuel.

✗ **Piège classique : le paradoxe des couleurs** Une lumière **bleutée** a une température de couleur **plus élevée** qu'une lumière orangée : un métal chauffé passe du rouge sombre (vers 1 000 K) au blanc puis au bleuté. « Blanc chaud » et « blanc froid » décrivent l'**ambiance ressentie**, pas la température de couleur.

Indice de rendu des couleurs

D **Définition** L'**indice de rendu des couleurs** (IRC, noté R_a) note de 0 à 100 la fidélité avec laquelle une source restitue les couleurs des objets, par comparaison avec une source de référence de même température de couleur.

Incandescence : $R_a = 100$; LED de qualité : 80 à 95 ; sodium haute pression : 20 à 25 (tout paraît orangé). Les bureaux, écoles et ateliers exigent $R_a \geq 80$; le contrôle des couleurs (imprimerie, peinture) $R_a \geq 90$. Un électricien qui repère des conducteurs marron, noir et gris a besoin d'un bon rendu des couleurs !

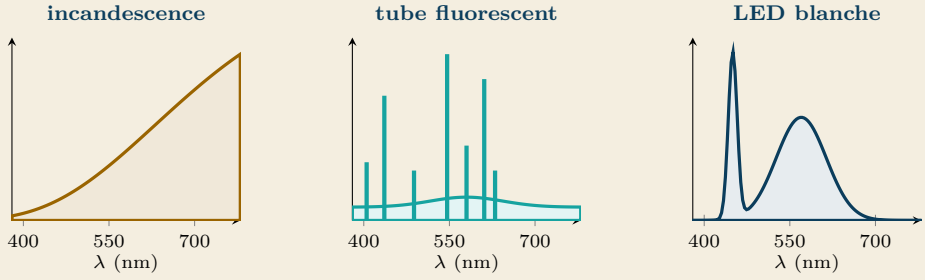
13.5 Les sources lumineuses

Trois familles de sources

Incandescence et halogène. Un filament de tungstène est chauffé par effet Joule (voir § 1.2) vers 2 700 K (3 000 K pour l'halogène). Son spectre est continu, mais plus de 90 % de l'énergie est rayonnée en infrarouge : la lampe chauffe plus qu'elle n'éclaire. Ces lampes sont retirées du marché européen (incandescence depuis 2012, halogène depuis 2018).

Lampes à décharge. Dans un tube fluorescent, une décharge électrique dans la vapeur de mercure émet des UV, que la poudre fluorescente du tube convertit en lumière visible : spectre de raies. Un **ballast** (ferromagnétique ou électronique) limite le courant et assure l'amorçage. Les lampes au sodium haute pression (éclairage public ancien) et aux iodures métalliques (stades, grands halls) appartiennent à la même famille. Elles contiennent du mercure : collecte obligatoire en fin de vie.

Diodes électroluminescentes (LED). Une jonction PN émet de la lumière lorsqu'elle est parcourue par un courant direct. Une LED blanche associe une puce bleue et un luminophore jaune. Elle s'alimente **à courant constant** par un **driver** (convertisseur électronique).



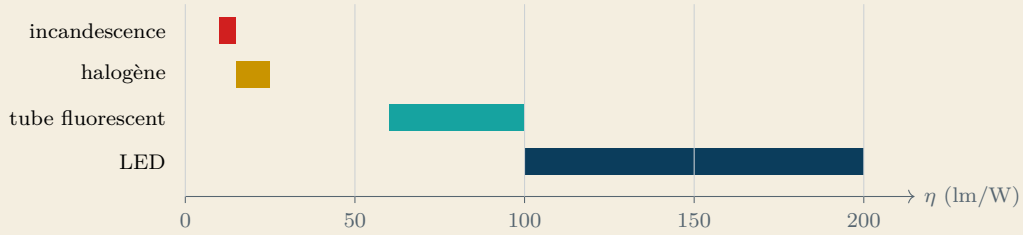
Comparaison des technologies

Technologie	η (lm/W)	Durée de vie (h)	IRC	Allumage
incandescence	10 à 15	1 000	100	instantané
halogène	15 à 25	2 000	100	instantané
tube fluorescent	60 à 100	10 000 à 20 000	80 à 90	rapide
LED	100 à 200	25 000 à 50 000	70 à 95	instantané

✗

Points de vigilance avec les LED

- La durée de vie d'une LED dépend de la **température de sa jonction** (voir § 12.6) : un luminaire mal ventilé vieillit très vite.
- Le driver est une **charge non linéaire** (voir § 5.3) : il absorbe des courants harmoniques (surtout de rang 3, à 150 Hz) qui s'additionnent dans le neutre (voir § 5.5). On choisit des drivers à facteur de puissance élevé ($f_p > 0{,}9$).
- Une LED nue a une luminance énorme : sans diffuseur, elle éblouit.



13.6 Exigences normatives et vérification

La norme NF EN 12464-1

La norme NF EN 12464-1 fixe, pour chaque local et chaque activité, les exigences d'éclairage des lieux de travail intérieurs.

Local ou activité	E_{moy} (lx)	U_0	UGR	R_a
circulations, couloirs	100	0,40	28	40
salle de classe	300	0,60	19	80
bureau : écriture, informatique	500	0,60	19	80
atelier : montage moyen	500	0,60	22	80
atelier : travaux fins, contrôle	750 à 1 000	0,70	19	80

D

Définition E_{moy} est l'**éclairement moyen maintenu** sur la zone de travail : il doit être respecté **pendant toute la durée de vie** de l'installation, malgré la baisse de flux des sources et l'encrassement. $U_0 = E_{min}/E_{moy}$ est l'**uniformité** : un éclairage trop inégal fatigue l'œil, qui s'adapte sans cesse.

Vérification au luxmètre

Pour réceptionner une installation, on découpe le local en n zones de même surface et on mesure l'éclairement au centre de chacune, sur le plan de travail (en général à 0,85 m du sol).

★ **À retenir**

$$E_{moy} = \frac{E_1 + E_2 + \cdots + E_n}{n} \qquad U_0 = \frac{E_{min}}{E_{moy}}$$

Ex **Exemple : réception d'un bureau paysager**

520	560	548	512
575	640	628	568
505	552	540	498

relevés en lx

La somme des 12 relevés vaut 6 646 lx :

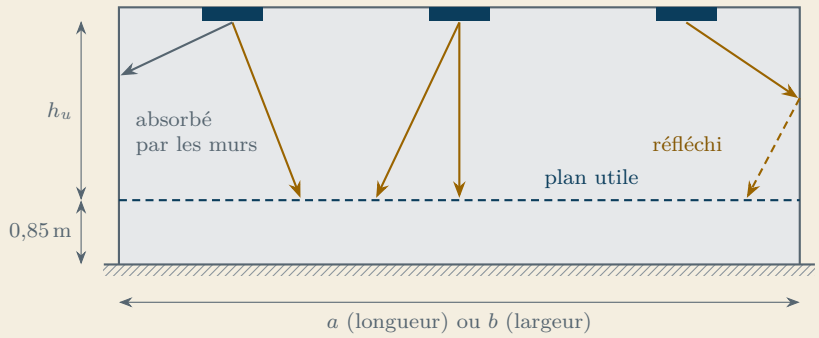
$$E_{moy} = \frac{6646}{12} \approx 554\,\text{lx}$$

$$U_0 = \frac{498}{554} \approx 0{,}90$$

Les exigences du bureau ($\geq$ 500 lx, $U_0 \geq$ 0,60) sont respectées. Les plus faibles valeurs sont, comme toujours, le long des murs.

13.7 La méthode des flux

La **méthode des flux** détermine le **nombre de luminaires** nécessaires pour obtenir un éclairement moyen E_{moy} sur le plan utile d'un local. Elle tient compte de toute la lumière qui arrive sur ce plan, directement ou après réflexion sur les parois.



Les facteurs de la méthode

Indice du local K. Il caractérise la forme du local : un local large et bas renvoie mieux la lumière vers le plan utile qu'un local étroit et haut.

$$K = \frac{a\,b}{h_u\,(a+b)}$$

a, b : longueur et largeur (m) ; h_u : hauteur utile, entre les luminaires et le plan utile (m).

Utilance U (ou facteur d'utilisation). C'est la fraction du flux émis par les luminaires qui atteint le plan utile. Elle se lit dans les tables du fabricant, en fonction de K et des **facteurs de réflexion** du plafond, des murs et du sol (souvent notés 0,7/0,5/0,2 pour un local clair). Valeurs usuelles : 0,4 à 0,8.

K	0,8	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5
U	0,45	0,50	0,55	0,59	0,65	0,69	0,72	0,76	0,78

Exemple de table d'utilance (dalle LED encastrée, réflexions 0,7/0,5/0,2)

Facteur de maintenance M**.** Il tient compte de la baisse de flux des sources avec l'âge, des pannes et de l'encrassement des luminaires et des parois. Il vaut environ 0,8 dans un local propre, 0,6 à 0,7 dans un atelier poussiéreux. On dimensionne l'installation **neuve** pour qu'elle fournisse encore E_{moy} en fin de période de maintenance.

À retenir · Méthode des flux

$$N = \frac{E_{moy} \times S}{\Phi_L \times U \times M}$$

N : nombre de luminaires, **arrondi à l'entier supérieur** ; E_{moy} : éclairement moyen maintenu exigé (lx) ; $S = a\,b$: surface du local (m^2) ; Φ_L : flux d'un luminaire (lm) ; U : utilance ; M : facteur de maintenance.

Piège classique Ne pas confondre l'**utilance** U (fraction du flux utile, méthode des flux) et l'**uniformité** U_0 (rapport E_{min}/E_{moy}). Oublier M conduit à une installation conforme le jour de la réception, puis sous-éclairée au bout de quelques années.

Implantation des luminaires

Les N luminaires sont ensuite répartis régulièrement, en rangées, en rapprochant des murs ceux des rangées extrêmes pour favoriser l'uniformité (à vérifier : $U_0 = E_{min}/E_{moy}$). Dans un bureau ou un atelier, on oriente de préférence les rangées parallèlement aux fenêtres, ce qui permet d'allumer ou de graduer séparément la rangée proche des vitres, et l'on évite de placer un luminaire juste au-dessus d'un écran, pour limiter les reflets.

Méthode en 5 étapes.

1. Relever dans la norme l'éclairement E_{moy} exigé ; choisir le luminaire (Φ_L, T_c, R_a, UGR).
2. Calculer S, h_u et l'indice du local K.
3. Lire l'utilance U dans la table (valeur de K tabulée immédiatement inférieure, par sécurité, ou interpolation).
4. Calculer N et l'arrondir à l'entier supérieur compatible avec une implantation en rangées.
5. Vérifier l'éclairement obtenu $E = N\,\Phi_L\,U\,M/S$, puis implanter les luminaires.

Règles pratiques d'implantation – hors programme Chaque luminaire « couvre » un rectangle identique : les luminaires de bord sont alors à une **demi-distance** des murs. Pour une bonne uniformité, l'espacement ne doit pas dépasser une valeur indiquée par le fabricant, souvent voisine de $1{,}5\,h_u$.

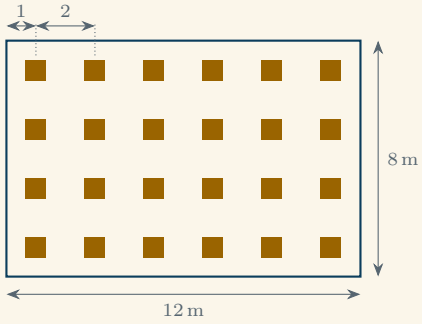
Exemple : bureau d'études de 12 m × 8 m Exigence : $E_{moy} = 500\,\text{lx}$. Dalles LED : $\Phi_L = 4\,000\,\text{lm}$, 32 W. Plafond à 2,85 m, plan utile à 0,85 m : $h_u = 2\,\text{m}$; $M = 0{,}8$. $S = 12 \times 8 = 96\,\text{m}^2$; $K = 96/(2 \times (12+8)) = 2{,}4$; on prend $K = 2$ dans la table : $U = 0{,}65$.

$$N = \frac{500 \times 96}{4000 \times 0{,}65 \times 0{,}8} \approx 23{,}1 \quad \Rightarrow \quad N = 24 \text{ dalles}$$

Implantation : 4 rangées de 6 dalles, espacées de 2 m dans les deux directions, à 1 m des murs.

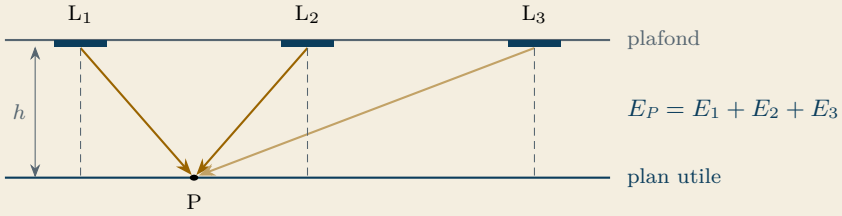
$$E = \frac{24 \times 4000 \times 0{,}65 \times 0{,}8}{96} = 520\,\text{lx}$$

Puissance installée : $24 \times 32 = 768\,\text{W}$.



13.8 La méthode point par point

La méthode des flux donne un éclairement **moyen**. Pour connaître l'éclairement en un point précis (poste de travail, coin d'un local, éclairage extérieur sans parois réfléchissantes), on utilise la **méthode point par point** : on additionne les éclairements produits en ce point par chaque luminaire.



Méthode point par point. Pour chaque luminaire k : calculer la distance d_k et l'angle θ_k, lire l'intensité $I_k(\theta_k)$ sur l'indicatrice, calculer l'éclairement $E_k = I_k(\theta_k)\cos(\theta_k)/d_k^2$. Les éclairements produits par les différents luminaires **s'additionnent** : $E_P = E_1 + E_2 + \ldots$

Cette méthode néglige la lumière réfléchie par les parois : elle sous-estime l'éclairement à l'intérieur ; en extérieur, elle convient si la photométrie est connue et sans obstacle. Elle sert surtout à vérifier l'**uniformité**, en comparant un point situé sous un luminaire et un point situé entre deux luminaires.

Exemple : deux downlights espacés de 3 m On reprend le downlight précédent ($I_0 = 637\,\text{cd}$, lambertien, $h = 2{,}2\,\text{m}$). Au point milieu, à 1,5 m de chacun : $E = 2 \times 61 \approx 123\,\text{lx}$.
Sous l'un des downlights, il apporte 132 lx ; l'autre est vu sous $\theta = \arctan(3/2{,}2) \approx 53{,}7°$ ($\cos(\theta) \approx 0{,}591$), à $d \approx 3{,}72\,\text{m}$, avec $I(\theta) = 637 \times 0{,}591 \approx 377\,\text{cd}$:

$$E_2 = \frac{377 \times 0{,}591}{3{,}72^2} \approx 16\,\text{lx}, \quad \text{soit au total } 148\,\text{lx}.$$

Rapport $123/148 \approx 0{,}83$: l'éclairement est assez uniforme ; un espacement plus grand creuserait l'éclairement entre les luminaires.

13.9 Bilan énergétique d'une rénovation d'éclairage

Rénover un éclairage ancien permet souvent de diviser la consommation par deux, avec un retour sur investissement de quelques années. On agit sur trois leviers : la **technologie** des sources (LED), la **gestion** de l'allumage (détection de présence, horloges, allumage par zones) et la **gradation** selon la lumière du jour (protocoles DALI ou 1–10 V).

À retenir · Énergie consommée

$$E_e = P \times \Delta t$$

E_e : énergie consommée (kW · h) avec P en kW et Δt (durée annuelle d'utilisation) en h.

Indicateurs économiques – hors programme Le **temps de retour sur investissement** vaut t_r = investissement/économie annuelle (en années). Pour comparer des installations, on utilise aussi la **puissance installée par unité de surface** P/S (W/m²) : de l'ordre de 10 à 15 W/m² pour un éclairage fluorescent ancien, 4 à 8 W/m² en LED.

Méthode : comparer deux installations.

1. Vérifier d'abord que la nouvelle installation respecte la norme (méthode des flux) : économiser sur un éclairage insuffisant n'a pas de sens.
2. Calculer la puissance absorbée par luminaire, **appareillage compris**, puis la puissance totale.
3. Calculer l'énergie annuelle de chaque installation, en tenant compte de la gestion (détection, gradation).
4. En déduire l'économie annuelle en kW · h et en euros, puis le temps de retour.

Ex **Exemple : rénovation d'un atelier de maintenance** Avant : 30 luminaires de 2 tubes fluorescents de 58 W, chaque tube ayant un ballast ferromagnétique de 11 W ; 3 000 h par an. Après : 30 luminaires LED de 70 W, avec détection de présence qui réduit la durée d'allumage de 20 %. Électricité : 0,20 €/kW · h ; coût posé : 230 € par luminaire.

$$P_{avant} = 30 \times 2 \times (58 + 11) = 4\,140\,\text{W} \qquad P_{apres} = 30 \times 70 = 2\,100\,\text{W}$$

$$E_{e,avant} = 4{,}14 \times 3000 = 12\,420\,\text{kW} \cdot \text{h} \qquad E_{e,apres} = 2{,}1 \times 3000 \times 0{,}8 = 5\,040\,\text{kW} \cdot \text{h}$$

Économie : 7 380 kW · h par an (59 % de moins), soit $7380 \times 0{,}20 \approx 1476$ € par an. Investissement : $30 \times 230 = 6900$ €, d'où $t_r = 6900/1476 \approx 4{,}7$ ans.

✗ **Piège classique** Mélanger W et kW dans le calcul de l'énergie, ou oublier les pertes des ballasts ferromagnétiques (souvent 15 % à 20 % de la puissance du tube), ce qui fausse le gain annoncé.

Ex **Exemple : gradation dans le bureau d'études** Les 24 dalles du bureau d'études étudié plus haut (768 W) fonctionnent 2 500 h par an : $0{,}768 \times 2500 = 1\,920$ kW · h. Des capteurs de lumière du jour (protocole DALI) réduisent la consommation de 35 %, soit 672 kW · h et environ 134 € par an à 0,20 €/kW · h. Pour un surcoût de 1200 €, le retour dépasse 8 ans : la gradation est surtout rentable dans les grands locaux très vitrés.

✗ **Piège classique** La gradation et la détection réduisent l'**énergie**, pas la **puissance** à prévoir : câbles et protections doivent toujours supporter le fonctionnement à pleine puissance.

Qualité de l'énergie. Les drivers de LED absorbent un courant non sinusoïdal. Pour une même puissance active, un facteur de puissance faible augmente le courant en ligne $I = P/(V\,f_p)$ (d'après $P = V\,I\,f_p$ vu au chapitre 1, V : tension simple, 230 V), donc les pertes et l'échauffement des câbles. Sur un réseau triphasé avec neutre, les harmoniques de rang 3 des trois phases s'ajoutent dans le neutre, qui peut être plus chargé que les phases.

En ligne : simulateurs de la loi de l'éclairement, de l'indicatrice d'un luminaire et de la méthode des flux ; comparateur de consommation de deux installations.

Ex **Exemple : une rangée de 12 dalles LED de 40 W** Avec des drivers de qualité ($f_p = 0{,}95$) : $I = 12 \times 40/(230 \times 0{,}95) \approx 2{,}2$ A. Avec des drivers bas de gamme ($f_p = 0{,}5$) : $I = 12 \times 40/(230 \times 0{,}5) \approx 4{,}2$ A, presque le double pour la même lumière ; les pertes Joule dans le câble, proportionnelles à I^2, sont multipliées par 3,6.

L'essentiel

Chapitre 13

Photométrie et éclairagisme

Domaine visible	$380\,\text{nm} < \lambda < 780\,\text{nm}$
Sensibilité maximale de l'œil	$\lambda = 555\,\text{nm} \qquad V(\lambda) = 1$
Flux d'un rayonnement	$\Phi = 683 \times V(\lambda) \times P_{ray}$
Efficacité lumineuse	$\eta = \dfrac{\Phi}{P} \quad (\text{lm/W})$
Efficacité des sources (lm/W)	incand. 10 à 15 fluo 60 à 100 LED 100 à 200
Source isotrope	$\Phi = 4\pi\, I \quad (I \text{ en cd})$
Source lambertienne	$I(\theta) = I_0 \cos(\theta)$
Indicatrice en cd/klm	$I = I_{lue} \times \dfrac{\Phi}{1000}$
Éclairement moyen	$E = \dfrac{\Phi}{S} \qquad 1\,\text{lx} = 1\,\text{lm/m}^2$
Éclairement en un point	$E = \dfrac{I\cos(\theta)}{d^2}$
Luminance, éblouissement	L en cd/m^2 bureau : UGR ≤ 19
Température de couleur	2 700 K chaud 4 000 K neutre 6 500 K froid
Indice de rendu des couleurs	$0 \leq R_a \leq 100$ bureau : $R_a \geq 80$
Éclairement moyen mesuré	$E_{moy} = \dfrac{E_1 + E_2 + \cdots + E_n}{n}$
Uniformité	$U_0 = \dfrac{E_{min}}{E_{moy}}$
Bureau (NF EN 12464-1)	$E_{moy} \geq 500\,\text{lx} \qquad U_0 \geq 0{,}60$
Indice du local	$K = \dfrac{a\,b}{h_u\,(a+b)}$
Méthode des flux	$N = \dfrac{E_{moy} \times S}{\Phi_L \times U \times M}$
Utilance, maintenance	$U \approx 0{,}4$ à $0{,}8 \qquad M \approx 0{,}8$
Énergie consommée	$E_e = P \times \Delta t \quad (\text{kW}\cdot\text{h})$

Exercices

Chapitre 13

Grandeurs photométriques et sources

Exercice 13.1 – Feux tricolores à LED ★☆☆

Une métropole remplace les optiques de ses feux tricolores. Chaque optique ancienne contenait une lampe halogène de 70 W placée derrière un filtre coloré ; elle est remplacée par un module LED qui émet directement la bonne couleur. Le service voirie veut comparer les deux solutions et chiffrer l'économie réalisée sur un carrefour équipé de 16 feux.

Données

- Module rouge : puissance absorbée 10 W, puissance rayonnée 1,6 W à 625 nm, où $V = 0{,}321$.
- Module vert : puissance absorbée 12 W, puissance rayonnée 1,2 W à 505 nm, où $V = 0{,}407$.
- Module orange : puissance absorbée 10 W.
- Lampe halogène : flux 1 100 lm ; le filtre rouge ne laisse passer que 18 % de ce flux.
- Sur une année, chaque feu est rouge 50 % du temps, vert 45 % et orange 5 %, 24 h sur 24. Prix de l'énergie : 0,18 €/kW · h.

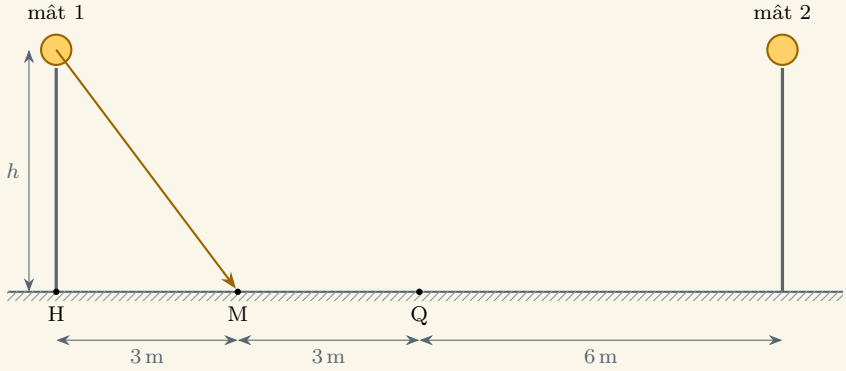
1. Calculer le flux lumineux émis par le module rouge, puis par le module vert.
2. Calculer l'efficacité lumineuse de chaque module.
3. Calculer le flux rouge réellement émis par l'ancienne optique halogène, puis son efficacité lumineuse « utile ». Conclure.
4. Pourquoi un même watt rayonné produit-il un flux plus faible dans le rouge que dans le jaune-vert ?
5. Calculer la puissance moyenne absorbée par un feu à LED, puis l'énergie consommée en un an par un feu ancien et par un feu à LED.
6. En déduire l'économie annuelle pour le carrefour, en kW · h puis en euros.

→ corrigé p. 480

Exercice 13.2 – Parking poids lourds d'un transporteur ★☆☆

Un transporteur routier éclaire le parking de ses semi-remorques par des lanternes à globe opale montées sur des mâts. Son assureur exige un éclairement d'au moins 10 lx en tout point de la zone, pour que les caméras de vidéosurveillance soient exploitables la nuit. Le technicien doit vérifier si l'espacement prévu entre les mâts convient.

Chaque lanterne est assimilée à une source ponctuelle isotrope de flux $\Phi = 6\,000\,\text{lm}$, placée à $h = 4\,\text{m}$ au-dessus du sol. On néglige toute réflexion. Les éclairements produits en un même point par plusieurs lanternes s'additionnent.



1. Calculer l'intensité lumineuse I d'une lanterne.
2. Calculer l'éclairement E_H au pied du mât 1 (point H).
3. Calculer la distance d entre la lanterne 1 et le point M, la valeur de $\cos(\theta)$, puis l'éclairement produit en M par la lanterne 1.
4. Calculer l'éclairement produit par la lanterne 1 au point Q, situé à 6 m du mât. Avec une seule lanterne, l'exigence de l'assureur serait-elle respectée en Q ?
5. Le mât 2 est placé à 12 m du mât 1. Calculer l'éclairement total en Q, à mi-distance des deux mâts. Conclure.
6. À quelle hauteur faudrait-il placer la lanterne pour obtenir 50 lx au pied du mât ? Quel inconvénient cela aurait-il pour le reste du parking ?

→ corrigé p. 481

Exercice 13.3 – Poste de contrôle d'aspect ★★☆

Une entreprise de traitement de surface chrome des pièces pour l'automobile. Au poste de contrôle final, un opérateur examine chaque pièce à l'œil nu pour détecter rayures et piqûres. Les défauts échappent de plus en plus souvent au contrôle : le responsable qualité soupçonne un éclairage insuffisant. Le cahier des charges du poste impose $E \geq 1\,000\,\text{lx}$ sur la table, une température de couleur d'au moins 5 000 K et $R_a \geq 90$.

Données

- Éclairage actuel : une dalle LED opale (source lambertienne) de flux 3 400 lm, $T_c = 4\,000\,\text{K}$, $R_a = 82$, située 2 m au-dessus du centre de la table.
- Spot proposé : flux $\Phi = 1\,500\,\text{lm}$, émis uniformément dans un cône de demi-angle $\alpha = 18°$; puissance 17 W ; $T_c = 5\,000\,\text{K}$; $R_a = 92$. Il est fixé 1,6 m au-dessus du centre de la table, axe vertical.

▷ Formules utiles : pour une source lambertienne, $\Phi = \pi I_0$; pour un flux Φ émis uniformément dans un cône de demi-angle α, $I = \Phi/\Omega$ avec $\Omega = 2\pi\,(1 - \cos(\alpha))$ (angle solide, en sr).

I- Éclairage actuel

1. Calculer l'intensité I_0 de la dalle dans l'axe, puis l'éclairement au centre de la table.

2. Le poste est-il conforme ? Donner deux raisons.

II- Spot proposé

3. Calculer l'angle solide Ω du faisceau, puis l'intensité I du spot.

4. Calculer l'éclairement au centre de la table.

5. Calculer le rayon de la tache lumineuse sur la table et l'éclairement au bord de cette tache. L'exigence est-elle respectée sur toute la tache ?

6. Calculer l'éclairement moyen Φ/S sur la tache et le comparer aux valeurs précédentes.

7. Calculer l'efficacité lumineuse du spot.

8. On veut éclairer une table plus grande en remontant le spot. Jusqu'à quelle hauteur l'éclairement dans l'axe reste-t-il d'au moins 1 000 lx ? Quel est alors le diamètre de la tache ?

→ corrigé p. 482

Projet d'éclairage

Exercice 13.4 – Allée d'un entrepôt logistique ★★☆

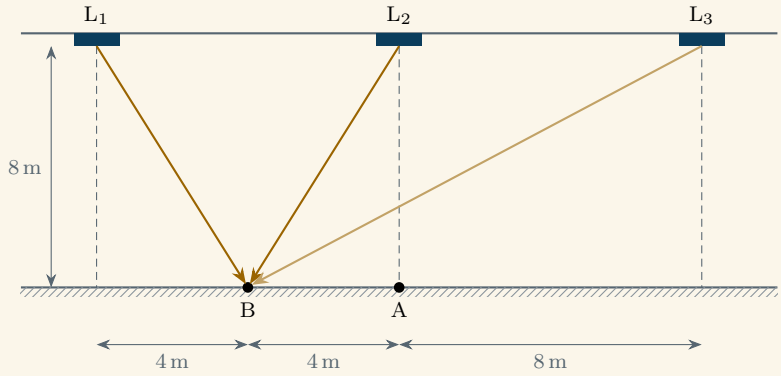
Une plateforme logistique équipe une allée de préparation de commandes de luminaires LED suspendus (*high bay*). Les préparateurs lisent des étiquettes sur des colis posés au sol et sur les rayonnages : le client exige au moins 150 lx au sol en tout point de l'allée, et un rapport $E_{min}/E_{max} \geq 0{,}7$. Les luminaires sont alignés dans l'axe de l'allée, à $h = 8$ m du sol, espacés de 8 m. On néglige la lumière réfléchie (rayonnages sombres).

Données

▷ Luminaire : $\Phi_L = 20\,000$ lm ; puissance 150 W. Les éclairements produits par plusieurs luminaires s'additionnent.

▷ Indicatrice du catalogue (intensité en cd/klm, symétrique autour de l'axe vertical) ; on retiendra la valeur de l'angle tabulé le plus proche de l'angle calculé :

θ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
I (cd/klm)	414	411	404	392	375	354	329	301
θ	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	
I (cd/klm)	270	238	204	170	137	104	74	



1. Calculer l'efficacité lumineuse du luminaire.
2. Calculer l'intensité dans l'axe d'un luminaire, puis l'éclairement qu'il produit à sa verticale.
3. Au point A, situé sous L_2, calculer l'éclairement produit par L_1 (et par L_3, symétrique), puis l'éclairement total E_A. On néglige les luminaires plus éloignés.
4. Au point B, situé à mi-distance de L_1 et L_2, calculer les angles sous lesquels B est vu depuis L_1, L_2 et L_3, puis l'éclairement total E_B.
5. Les exigences du client sont-elles satisfaites ? Pourquoi le résultat réel sera-t-il un peu supérieur ?

→ corrigé p. 483

Exercice 13.5 – Bureau d'études d'un fabricant de pompes ★★☆

Un fabricant de pompes industrielles réaménage le plateau de son bureau d'études : 12 postes de dessin assisté par ordinateur, dans un local de 15 m × 9 m. Le technicien de l'entreprise générale d'électricité doit dimensionner l'éclairage, puis réceptionner l'installation au luxmètre.

Données

▷ Exigences (NF EN 12464-1, bureau) : $E_{moy} \geq 500$ lx (éclairement maintenu) ; $U_0 \geq 0{,}60$; UGR ≤ 19 ; $R_a \geq 80$.

▷ Plafond suspendu à 3,0 m du sol ; plan de travail à 0,80 m. Dalles encastrées dans le plafond.

- ▷ Dalle LED : $\Phi_L = 4\,300\,\text{lm}$; $34\,\text{W}$; $T_c = 4\,000\,\text{K}$; $R_a = 83$; UGR < 19. Facteur de maintenance : $M = 0{,}8$. Le fabricant préconise un espacement d'au plus $1{,}5\,h_u$, les dalles de bord étant à une demi-distance des murs.
- ▷ Utilance (réflexions 0,7/0,5/0,2) ; on prendra la valeur de K tabulée immédiatement inférieure :

K	1	1,5	2	2,5	3	4
U	0,48	0,57	0,63	0,67	0,70	0,74

I- Dimensionnement

1. Calculer la surface S, la hauteur utile h_u et l'indice du local K. En déduire l'utilance U.

2. Par la méthode des flux, calculer le nombre N de dalles nécessaires.

3. Proposer une implantation en rangées régulières (nombre de rangées, de dalles par rangée, espacements, distances aux murs) et vérifier le critère d'espacement $\leq 1{,}5\,h_u$.

4. Calculer l'éclairement moyen maintenu obtenu, la puissance installée P et la puissance par mètre carré P/S.

II- Réception de l'installation neuve

On découpe le local en 15 zones de même surface ; relevés au luxmètre (en lx) :

598	655	672	660	601
640	702	715	698	636
585	642	660	648	592

5. Calculer l'éclairement moyen mesuré et l'uniformité U_0.

6. L'installation étant neuve, l'éclairement maintenu vaudra $M \times E_{moy}$. Conclure sur la conformité, en examinant toutes les exigences de la norme.

7. Avec une installation neuve ($M = 1$), déduire des mesures l'utilance réelle du local. Commenter.

→ corrigé p. 484

Exercice 13.6 – Rénovation d'un hall de conditionnement ★★★

Une laiterie conditionne ses yaourts dans un hall de $40\,\text{m} \times 20\,\text{m}$, éclairé depuis vingt ans par des réglettes fluorescentes étanches. Les opérateurs se plaignent de zones sombres le long des lignes, les tubes sont changés sans cesse et l'éclairage pèse lourd dans la facture. La direction demande à son technicien de maintenance un diagnostic, puis une étude de rénovation en LED avec son bilan économique.

Données

- ▷ Exigences du cahier des charges : $E_{moy} \geq 300\,\text{lx}$ maintenu ; $U_0 \geq 0{,}60$;

$R_a \geq 80$; luminaires étanches IP65 au moins (lavage au jet).

- ▷ Hauteur utile : $h_u = 5\,\text{m}$. Ambiance humide et lavages fréquents : $M = 0{,}7$.
- ▷ Installation actuelle : 60 réglettes de 2 tubes de 58 W (5 200 lm par tube neuf), chaque tube ayant un ballast ferromagnétique de 10 W. Relevé au luxmètre : $E_{moy} = 290\,\text{lx}$, $E_{min} = 170\,\text{lx}$. Remplacement des 120 tubes tous les deux ans, pour un coût total de 15 € par tube (fourniture et main-d'œuvre).
- ▷ Luminaire LED proposé : 62 W ; 9 300 lm ; $R_a = 84$; IP66 ; driver $f_p = 0{,}96$; coût posé : 310 €. Aucun entretien pendant sa durée de vie. Espacement préconisé : au plus $1{,}5\,h_u$, luminaires de bord à une demi-distance des murs.
- ▷ Utilance, valable pour les réglettes actuelles comme pour le luminaire LED (on prendra la valeur de K tabulée immédiatement inférieure) :

K	1,5	2	2,5	3	4	5
U	0,58	0,66	0,71	0,74	0,78	0,80

- ▷ Fonctionnement : 5 000 h par an. Prix de l'énergie : 0,17 €/kW · h. Une gestion par zones avec détection de présence réduirait de 25 % l'énergie consommée par l'éclairage LED. Temps de retour sur investissement : $t_r =$ investissement/économie annuelle.

A- Diagnostic de l'installation actuelle

1. Calculer la surface du hall, l'indice du local K et l'utilance U.

2. L'installation actuelle est-elle conforme ? Justifier par le calcul.

3. Calculer la puissance absorbée par une réglette, la puissance installée P, la puissance par mètre carré P/S et l'efficacité lumineuse d'une réglette.

4. Calculer l'éclairement que la méthode des flux prévoyait avec $M = 0{,}7$ et des tubes neufs, puis le facteur de maintenance réel M_r qui correspond à l'éclairement mesuré. Proposer deux causes de l'écart.

B- Dimensionnement de la solution LED

5. Calculer le nombre N de luminaires LED nécessaires.

6. On les répartit en 4 rangées identiques. Proposer l'implantation et vérifier l'espacement ($\leq 1{,}5\,h_u$).

7. Calculer l'éclairement moyen maintenu obtenu.

C- Bilan économique

8. Calculer la puissance installée en LED et l'énergie annuelle consommée par chaque installation, gestion comprise pour la solution LED.

9. Calculer l'économie annuelle d'énergie (en kW · h, en pourcentage et en euros), puis l'économie annuelle d'entretien.

10. Calculer le temps de retour sur investissement.

D- Raccordement

11. Les luminaires d'une rangée sont alimentés par un même circuit monophasé 230 V. Calculer le courant absorbé par un luminaire, puis par un circuit.

12. Les quatre circuits sont répartis sur les phases d'un tableau triphasé avec neutre. Pourquoi faut-il surveiller l'échauffement du conducteur neutre ?

→ corrigé p. 485

Sujets de type BTS

Chapitre 13

Sujet BTS 13.A – Éclairage d'un gymnase intercommunal

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une communauté de communes rénove l'éclairage de son gymnase, qui accueille les entraînements des clubs et des compétitions régionales de handball et de basket-ball. Les projecteurs actuels, à iodures métalliques, mettent plusieurs minutes à se rallumer après une microcoupure, ce qui interrompt les matchs. Le bureau d'études propose des luminaires LED ; on vérifie le dimensionnement, l'éclairement en un point du terrain et l'intérêt économique.

Données

- Salle : $a = 44\,\text{m}$, $b = 24\,\text{m}$; hauteur utile (luminaires–sol) $h_u = 9\,\text{m}$.
- Exigences (compétitions régionales) : $E_{moy} \geq 300\,\text{lx}$ maintenu au sol ; $U_0 \geq 0{,}7$; $R_a \geq 60$.
- Installation actuelle : 24 projecteurs à iodures métalliques, lampe de 400 W et ballast de 30 W, flux 32 000 lm ; facteur de puissance 0,85.
- Luminaire LED proposé : 200 W ; $\Phi_L = 30\,000\,\text{lm}$; $R_a = 80$; driver à $f_p = 0{,}95$; coût posé 650 €. Facteur de maintenance : $M = 0{,}8$. Espacement préconisé par le fabricant : au plus $1{,}5\,h_u$.
- Utilance (on prendra la valeur de K tabulée immédiatement inférieure) :

K	1	1,5	2	2,5	3	4
U	0,52	0,62	0,68	0,72	0,75	0,79

- Indicatrice du luminaire LED (cd/klm) ; on retiendra l'angle tabulé le plus proche :

θ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
I (cd/klm)	330	328	323	315	304	290	274	255	233

- Utilisation : 1 800 h par an. La gradation (60 % du flux pour les entraînements) réduit de 30 % l'énergie de l'installation LED. Prix de l'énergie : 0,19 €/kW · h. Temps de retour : t_r = investissement/économie annuelle.

▷ Alimentation : réseau triphasé 230 V/400 V avec neutre ; les luminaires sont branchés entre phase et neutre, 8 par phase.

Partie A – Sources

A.1. Calculer l'efficacité lumineuse d'un projecteur à iodures métalliques, ballast compris, puis celle du luminaire LED.

A.2. Citer deux avantages des LED pour cette application, en lien avec le problème rencontré par le club.

Partie B – Dimensionnement par la méthode des flux

B.1. Calculer la surface S et l'indice du local K. En déduire l'utilance U.

B.2. Calculer le nombre minimal de luminaires LED. On en installe 24, en 3 rangées de 8 : justifier ce choix.

B.3. Calculer les espacements entre luminaires et vérifier qu'ils ne dépassent pas $1{,}5\,h_u$.

B.4. Calculer l'éclairement moyen maintenu obtenu avec 24 luminaires.

Partie C – Éclairement entre quatre luminaires

On étudie un point C du terrain situé au centre d'un rectangle formé par quatre luminaires voisins de deux rangées (côtés 5,5 m et 8 m). Les éclairements produits par plusieurs luminaires s'additionnent.

C.1. Calculer la distance horizontale entre C et chacun des quatre luminaires, puis l'angle θ et la distance d.

C.2. Calculer l'éclairement direct produit en C par ces quatre luminaires (installation neuve).

C.3. Comparer au résultat de la partie B et expliquer l'écart.

Partie D – Bilan énergétique

D.1. Calculer la puissance installée et l'énergie annuelle consommée par chaque installation.

D.2. Calculer l'économie annuelle en euros et le temps de retour sur investissement.

Partie E – Alimentation

E.1. Calculer le courant dans un conducteur de phase avant et après rénovation.

E.2. Les drivers de LED absorbent un courant riche en harmonique de rang 3. Expliquer pourquoi le courant dans le neutre n'est pas nul alors que les trois phases sont également chargées.

→ corrigé p. 486

Sujet BTS 13.B – Atelier d'assemblage de cartes électroniques

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une PME sous-traitante assemble et contrôle des cartes électroniques pour l'aéronautique. Lors d'un audit, le client a relevé un éclairage insuffisant dans l'atelier d'assemblage et aux postes de contrôle optique. L'entreprise demande à son technicien de vérifier l'existant, de dimensionner une nouvelle installation et d'en évaluer le coût de fonctionnement.

Données

- Atelier : $a = 18\,\text{m}$, $b = 10\,\text{m}$; luminaires suspendus à $h_u = 2{,}4\,\text{m}$ au-dessus des plans de travail.
- Exigences (assemblage fin) : $E_{moy} \geq 750\,\text{lx}$ maintenu ; $U_0 \geq 0{,}70$; UGR ≤ 19 ; $R_a \geq 80$. Postes de contrôle optique : $E \geq 2\,000\,\text{lx}$ sur la carte, $R_a \geq 90$.
- Installation actuelle : 36 luminaires de 4 tubes fluorescents de 18 W, avec un ballast électronique de 6 W par luminaire.
- Luminaire LED proposé : $42\,\text{W}$; $\Phi_L = 6\,000\,\text{lm}$; $T_c = 4\,000\,\text{K}$; $R_a = 85$; UGR < 19 ; coût posé 190 €. Facteur de maintenance : $M = 0{,}8$. Espacement préconisé : au plus $1{,}5\,h_u$. Utilance : $U = 0{,}70$ pour $K = 2{,}5$ (valeur de K tabulée immédiatement inférieure à celle de l'atelier).
- Spot de poste de contrôle : $7\,\text{W}$; $\Phi = 600\,\text{lm}$ émis uniformément dans un cône de demi-angle $25°$; $T_c = 5\,000\,\text{K}$; $R_a = 95$; diamètre de sa face de sortie 5 cm. Formules utiles : $I = \Phi/\Omega$ avec $\Omega = 2\pi\,(1 - \cos(\alpha))$ pour un cône de demi-angle α ; luminance d'une surface S vue de face : $L = I/S$.
- Utilisation : 2 200 h par an ; une gradation en fonction de la lumière du jour réduirait de 25 % l'énergie de l'installation LED. Prix de l'énergie : 0,16 €/kW · h. Temps de retour : $t_r =$ investissement/économie annuelle.

Partie A – Vérification de l'existant

Relevés au luxmètre au centre de 12 zones de même surface (en lx) :

612	668	671	618
655	712	705	640
598	650	662	590

A.1. Calculer l'éclairement moyen E_{moy} et l'uniformité U_0.

A.2. L'atelier est-il conforme ? Conclure sur le constat de l'auditeur.

A.3. Calculer la puissance installée actuelle.

A.4. Les luminaires actuels ont huit ans et n'ont jamais été nettoyés. Proposer deux causes de l'insuffisance d'éclairement, et expliquer pourquoi un simple remplacement des tubes ne suffirait pas à rendre l'atelier conforme dans la durée.

Partie B – Nouvelle installation

B.1. Calculer la surface S et l'indice du local K ; vérifier que l'utilance indiquée convient.

B.2. Calculer le nombre minimal de luminaires LED, puis proposer une implantation régulière de 42 luminaires en 6 rangées. Vérifier le critère d'espacement $\leq 1{,}5\,h_u$.

B.3. Calculer l'éclairement moyen maintenu obtenu.

B.4. Le luminaire proposé respecte-t-il les autres exigences ? Que signifie « 4 000 K » ?

Partie C – Poste de contrôle optique

C.1. Calculer l'angle solide du faisceau du spot, puis son intensité lumineuse I.

C.2. Le spot est placé à 60 cm au-dessus de la carte, axe vertical. Calculer l'éclairement au centre de la carte et le diamètre de la zone éclairée. Le poste est-il conforme ?

C.3. Calculer la luminance de la face de sortie du spot (considérée comme un disque vu de face). Quelle précaution d'installation faut-il prendre ?

Partie D – Bilan énergétique

D.1. Calculer l'énergie annuelle consommée par l'installation actuelle et par l'installation LED avec gradation.

D.2. Calculer l'économie annuelle en euros et le temps de retour sur investissement. La rénovation se justifie-t-elle d'abord par les économies ? Rédiger une conclusion pour la direction.

→ corrigé p. 488

Corrigés

Chapitre 13

Grandeurs photométriques et sources

✓ Corrigé de l'exercice 13.1 – Feux tricolores à LED

1. Le flux est la puissance rayonnée pondérée par la sensibilité de l'œil : $\Phi = 683 \times V(\lambda) \times P_{ray}$.

$$\Phi_{rouge} = 683 \times 0{,}321 \times 1{,}6 \quad \text{soit} \quad \boxed{\Phi_{rouge} \approx 351\,\text{lm}}$$

$$\Phi_{vert} = 683 \times 0{,}407 \times 1{,}2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\Phi_{vert} \approx 334\,\text{lm}}$$

2. $\eta = \dfrac{\Phi}{P}$: $\quad \eta_{rouge} = \dfrac{351}{10}$ soit $\boxed{\eta_{rouge} \approx 35\,\text{lm/W}}$

$\eta_{vert} = \dfrac{334}{12}$ soit $\boxed{\eta_{vert} \approx 28\,\text{lm/W}}$

Ces valeurs sont bien plus faibles que celles des LED blanches d'éclairage (100 à 200 lm/W) : la lumière est émise loin de 555 nm, là où l'œil est peu sensible.

3. Flux rouge sortant du filtre : $0{,}18 \times 1100 = 198\,\text{lm}$, d'où une efficacité utile

$$\eta_{halogene} = \frac{198}{70} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_{halogene} \approx 2{,}8\,\text{lm/W}}$$

Le module LED rouge émet presque deux fois plus de lumière rouge en consommant 7 fois moins : il est environ 12 fois plus efficace. Le filtre absorbe 82 % du flux de la lampe, qui est elle-même peu efficace.

4. La sensibilité de l'œil $V(\lambda)$ vaut 1 à 555 nm (jaune-vert) et seulement 0,321 à 625 nm : un même watt rayonné dans le rouge n'est « vu » qu'à 32 %.

5. Puissance moyenne d'un feu à LED (une seule optique allumée à la fois) :

$$P_{moy} = 0{,}50 \times 10 + 0{,}45 \times 12 + 0{,}05 \times 10 = 10{,}9\,\text{W}$$

Sur un an ($\Delta t = 24 \times 365 = 8\,760\,\text{h}$) :

$$E_{e,ancien} = 0{,}070 \times 8760 = 613{,}2\,\text{kW}\cdot\text{h} \qquad E_{e,LED} = 0{,}010\,9 \times 8760 \approx 95{,}5\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

6. Économie par feu : $613{,}2 - 95{,}5 \approx 517{,}7\,\text{kW}\cdot\text{h}$; pour 16 feux :

$$\Delta E_e = 16 \times 517{,}7 \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta E_e \approx 8\,280\,\text{kW}\cdot\text{h par an}}$$

soit $8283 \times 0{,}18 \approx$ $\boxed{1\,490\ €\text{ par an}}$,

sans compter le remplacement des lampes halogènes (2 000 h de durée de vie, soit environ deux changements par an pour chaque optique rouge ou verte).

✓ Corrigé de l'exercice 13.2 – Parking poids lourds d'un transporteur

1. Source isotrope : $\Phi = 4\pi I$, d'où

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{6000}{4\pi} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 477\,\text{cd}}$$

2. Au pied du mât, $\theta = 0$ et $d = h$: $E_H = \dfrac{I}{h^2} = \dfrac{477}{4^2}$ soit $\boxed{E_H \approx 29{,}8\,\text{lx}}$

3. Triangle rectangle (Pythagore) : $d = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,\text{m}$; $\cos(\theta) = \dfrac{h}{d} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

$$E_M = \frac{I\cos(\theta)}{d^2} = \frac{477 \times 0{,}8}{5^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_M \approx 15{,}3\,\text{lx}}$$

4. $d = \sqrt{4^2 + 6^2} \approx 7{,}21\,\text{m}$; $\cos(\theta) = \dfrac{4}{7{,}21} \approx 0{,}555$:

$$E_{Q,1} = \frac{477 \times 0{,}555}{7{,}21^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_{Q,1} \approx 5{,}1\,\text{lx}}$$

Avec une seule lanterne, $5{,}1\,\text{lx} < 10\,\text{lx}$: l'exigence ne serait pas respectée.

5. Q est à 6 m de chaque mât : par symétrie, chaque lanterne y apporte 5,09 lx, et les éclairements s'additionnent :

$$E_Q = 2 \times 5{,}09 \quad \text{soit} \quad \boxed{E_Q \approx 10{,}2\,\text{lx}} \geq 10\,\text{lx}$$

Q est le point le moins éclairé entre les deux mâts : l'espacement de 12 m convient, mais sans aucune marge. Le vieillissement des lampes et l'encrassement des globes feront passer l'éclairement sous 10 lx : il est prudent de rapprocher les mâts (10 m par exemple).

6. $E_H = \dfrac{I}{h^2}$ donne $h = \sqrt{\dfrac{I}{E_H}} = \sqrt{\dfrac{477}{50}}$ soit $\boxed{h \approx 3{,}1\,\text{m}}$

En abaissant la lanterne, on concentre la lumière au pied du mât, mais l'éclairement diminue plus vite quand on s'en éloigne ($\cos(\theta)$ plus faible pour un même x) : les points intermédiaires comme Q seraient encore moins éclairés. Une hauteur de 3 m expose aussi la lanterne aux chocs des camions.

✓ Corrigé de l'exercice 13.3 – Poste de contrôle d'aspect

I- Éclairage actuel

1. Source lambertienne : $\Phi = \pi\, I_0$, d'où $I_0 = \dfrac{3400}{\pi}$ soit $\boxed{I_0 \approx 1\,082\,\text{cd}}$

$$E = \frac{I_0}{h^2} = \frac{1082}{2^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 271\,\text{lx}}$$

2. Le poste n'est pas conforme : l'éclairement est près de 4 fois trop faible ($271\,\text{lx} < 1\,000\,\text{lx}$), et la dalle ne convient pas au contrôle des couleurs et des reflets ($T_c = 4\,000\,\text{K} < 5\,000\,\text{K}$; $R_a = 82 < 90$).

II- Spot proposé

3. $\Omega = 2\pi(1 - \cos(\alpha)) = 2\pi(1 - \cos(18°))$ soit $\boxed{\Omega \approx 0{,}308\,\text{sr}}$

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{1500}{0{,}307\,5} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 4\,880\,\text{cd}}$$

4. Dans l'axe : $E_0 = \dfrac{I}{d^2} = \dfrac{4878}{1{,}6^2}$ soit $\boxed{E_0 \approx 1\,905\,\text{lx}}$

5. Rayon de la tache : $r = 1{,}6 \times \tan(18°)$ soit $\boxed{r \approx 0{,}52\,\text{m}}$ (diamètre 1,04 m).

Au bord, le point est vu sous $\theta = 18°$, à la distance $d = 1{,}6/\cos(18°) \approx 1{,}682\,\text{m}$; l'intensité y vaut encore I (flux uniforme dans le cône) :

$$E_{bord} = \frac{I\cos(\theta)}{d^2} = \frac{4878 \times 0{,}951}{1{,}682^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_{bord} \approx 1\,640\,\text{lx}}$$

L'éclairement varie de 1 905 lx à 1 640 lx : l'exigence de 1 000 lx est respectée sur toute la tache, avec une bonne uniformité ($1640/1905 \approx 0{,}86$).

6. $S = \pi r^2 \approx 0{,}849\,\text{m}^2$ et $E_{moy} = 1500/0{,}849 \approx 1\,767\,\text{lx}$: valeur comprise entre l'éclairement au bord et celui au centre, ce qui est cohérent.

7. $\eta = \dfrac{1500}{17}$ soit $\boxed{\eta \approx 88\,\text{lm/W}}$

8. Dans l'axe, $E_0 = I/d^2 \geq 1000$ impose $d \leq \sqrt{4878/1000}$, soit $\boxed{d_{max} \approx 2{,}2\,\text{m}}$.

La tache a alors un diamètre $2 \times 2{,}21 \times \tan(18°) \approx 1{,}44\,\text{m}$; attention, l'éclairement au bord de la tache est alors inférieur à 1 000 lx (environ 860 lx).

Méthode Plus le cône est étroit, plus l'intensité est grande pour un même flux : c'est le principe du spot. Au bord de la tache, on applique la loi $E = I\cos(\theta)/d^2$ avec la distance réelle d, et non la hauteur.

Projet d'éclairage

✓ Corrigé de l'exercice 13.4 – Allée d'un entrepôt logistique

1. $\eta = \dfrac{20\,000}{150}$ soit $\boxed{\eta \approx 133\,\text{lm/W}}$

2. Le luminaire émet 20 klm : $I_0 = 414 \times 20$ soit $\boxed{I_0 = 8\,280\,\text{cd}}$

et $E = I_0/h^2 = 8280/64 \approx 129{,}4\,\text{lx}$.

3. Pour L_1 vu depuis A : $x = 8\,\text{m} = h$, donc $\theta = 45°$, $d = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31\,\text{m}$; $I = 238 \times 20 = 4\,760\,\text{cd}$.

$$E_1 = \frac{4760 \times \cos(45°)}{11{,}31^2} \approx 26{,}3\,\text{lx}$$

L_3 apporte la même contribution, d'où

$$E_A = 129{,}4 + 2 \times 26{,}3 \quad \text{soit} \quad \boxed{E_A \approx 182\,\text{lx}}$$

4. Depuis L_1 et L_2 : $\tan(\theta) = 4/8$, $\theta \approx 26{,}6°$ (valeur tabulée retenue : 25°, $I = 354 \times 20 = 7\,080\,\text{cd}$) ; $d = \sqrt{8^2 + 4^2} \approx 8{,}94\,\text{m}$, $\cos(\theta) \approx 0{,}894$:

$$E_1 = E_2 = \frac{7080 \times 0{,}894}{80} \approx 79{,}2\,\text{lx}$$

Depuis L_3 ($x = 12\,\text{m}$) : $\tan(\theta) = 1{,}5$, $\theta \approx 56{,}3°$ (retenu : 55°, $I = 170 \times 20 = 3\,400\,\text{cd}$) ; $d = \sqrt{8^2 + 12^2} \approx 14{,}4\,\text{m}$, $\cos(\theta) \approx 0{,}555$:

$$E_3 = \frac{3400 \times 0{,}555}{208} \approx 9{,}1\,\text{lx} \qquad E_B = 2 \times 79{,}2 + 9{,}1 \quad \text{soit} \quad \boxed{E_B \approx 167\,\text{lx}}$$

5. $E_{min} = 167\,\text{lx} \geq 150\,\text{lx}$ et $E_{min}/E_{max} = 167/182 \approx 0{,}92 \geq 0{,}7$: les exigences sont satisfaites. Le résultat réel sera un peu supérieur car on a négligé les luminaires plus éloignés (de 1 à 3 lx chacun) et la lumière réfléchie par le sol et les rayonnages.

Méthode Méthode point par point : pour chaque luminaire, calculer la distance horizontale x, puis $\tan(\theta) = x/h$, $d = \sqrt{h^2 + x^2}$, lire $I(\theta)$ et calculer $I\cos(\theta)/d^2$; additionner enfin les contributions. Un tableau à une ligne par luminaire évite les oublis.

✓ Corrigé de l'exercice 13.5 – Bureau d'études d'un fabricant de pompes

I- Dimensionnement

1. $S = 15 \times 9 = 135\,\text{m}^2$; $h_u = 3{,}0 - 0{,}80 = 2{,}2\,\text{m}$ (dalles encastrées).

$$K = \frac{a\,b}{h_u(a+b)} = \frac{135}{2{,}2 \times 24} \approx 2{,}56 \quad \Rightarrow \quad K = 2{,}5 \text{ dans la table, } \boxed{U = 0{,}67}$$

2. Méthode des flux :

$$N = \frac{E_{moy}\,S}{\Phi_L\,U\,M} = \frac{500 \times 135}{4300 \times 0{,}67 \times 0{,}8} \approx 29{,}3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 30 \text{ dalles}}$$

3. $30 = 5 \times 6$: **5 rangées de 6 dalles**. Le long des 15 m : espacement $15/6 = 2{,}5\,\text{m}$, dalles extrêmes à 1,25 m des murs ; le long des 9 m : espacement $9/5 = 1{,}8\,\text{m}$, rangées extrêmes à 0,9 m des murs. Les deux espacements sont inférieurs à $1{,}5 \times 2{,}2 = 3{,}3\,\text{m}$ ✓.

4. Avec 30 dalles :

$$E = \frac{30 \times 4300 \times 0{,}67 \times 0{,}8}{135} \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 512\,\text{lx}} \geq 500\,\text{lx}$$

$P = 30 \times 34 = 1\,020\,\text{W}$ et $P/S = 1020/135 \approx 7{,}6\,\text{W/m}^2$: valeur typique d'un éclairage LED performant.

II- Réception de l'installation neuve

5. Somme des 15 relevés : 9 704 lx.

$$E_{moy} = \frac{9704}{15} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_{moy} \approx 647\,\text{lx}} \qquad U_0 = \frac{585}{647} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_0 \approx 0{,}90}$$

6. Éclairement maintenu : $0{,}8 \times 647 \approx 518\,\text{lx} \geq 500\,\text{lx}$ ✓ ; $U_0 = 0{,}90 \geq 0{,}60$ ✓ ; UGR < 19 ✓ ; $R_a = 83 \geq 80$ ✓. L'installation est **conforme**, et le restera pendant toute la période de maintenance.

7. Avec $M = 1$: $U = \dfrac{E_{moy}\,S}{N\,\Phi_L} = \dfrac{647 \times 135}{30 \times 4300}$ soit $\boxed{U \approx 0{,}68}$

C'est très proche de la valeur de la table (0,67), qui était prise par défaut pour $K = 2{,}5$ alors que $K = 2{,}56$: le dimensionnement est validé.

✓ Corrigé de l'exercice 13.6 – Rénovation d'un hall de conditionnement

A- Diagnostic de l'installation actuelle

1. $S = 40 \times 20 = 800\,\text{m}^2$;

$K = 800/(5 \times 60) \approx 2{,}67 \quad \Rightarrow \quad K = 2{,}5$ dans la table : $\boxed{U = 0{,}71}$

2. $U_0 = E_{min}/E_{moy} = 170/290 \approx 0{,}59$. Ni l'éclairement ($290\,\text{lx} < 300\,\text{lx}$) ni l'uniformité ($0{,}59 < 0{,}60$) ne sont conformes : les plaintes des opérateurs sont justifiées.

3. $P_{regl} = 2 \times (58 + 10) = 136\,\text{W}$; $P_{tot} = 60 \times 136 = 8\,160\,\text{W}$; $\dfrac{8160}{800} = 10{,}2\,\text{W/m}^2$.

$$\eta = \frac{2 \times 5200}{136} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta \approx 76\,\text{lm/W}}$$

4. Tubes neufs, $M = 0{,}7$:

$$E_{prevu} = \frac{60 \times 10\,400 \times 0{,}71 \times 0{,}7}{800} \approx 388\,\text{lx}$$

$$M_r = \frac{E_{mesure}\,S}{N\,\Phi_L\,U} = \frac{290 \times 800}{60 \times 10\,400 \times 0{,}71} \quad \text{soit} \quad \boxed{M_r \approx 0{,}52}$$

Causes possibles : tubes en fin de vie ou hors service, vasques étanches jaunies et encrassées, parois salies (réflexion plus faible).

B- Dimensionnement de la solution LED

5. Méthode des flux :

$$N = \frac{300 \times 800}{9300 \times 0{,}71 \times 0{,}7} \approx 51{,}9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 52 \text{ luminaires}}$$

6. $52 = 4 \times 13$: 4 rangées de 13 luminaires. Le long des 40 m : espacement $40/13 \approx 3{,}08\,\text{m}$ (1,54 m aux murs) ; entre rangées : $20/4 = 5\,\text{m}$ (2,5 m aux murs). $5\,\text{m} \leq 1{,}5 \times 5 = 7{,}5\,\text{m}$ ✓.

7. Avec 52 luminaires : $E = \dfrac{52 \times 9300 \times 0{,}71 \times 0{,}7}{800}$ soit $\boxed{E \approx 300\,\text{lx}}$.

L'exigence est atteinte, de justesse : c'est normal, la méthode des flux conduit au nombre minimal de luminaires.

C- Bilan économique

8. $P_{LED} = 52 \times 62 = 3\,224\,\text{W}$ (4,0 W/m² contre 10,2 W/m²).

$E_{e,fluo} = 8{,}16 \times 5000 = 40\,800\,\text{kW}\cdot\text{h}$ $\quad$ $E_{e,LED} = 3{,}224 \times 5000 \times 0{,}75 = 12\,090\,\text{kW}\cdot\text{h}$

9. $\Delta E_e = 40\,800 - 12\,090$ soit $\boxed{\Delta E_e = 28\,710\,\text{kW}\cdot\text{h par an}}$,

c'est-à-dire 70 % de moins. En euros : $28\,710 \times 0{,}17 \approx \boxed{4\,881\ \text{€ par an}}$.

Entretien évité : $120 \times 15/2 = 900$ € par an.

10. Investissement : $52 \times 310 = 16\,120$ € ; économie totale : $4881 + 900 = 5781$ € par an.

$$t_r = \frac{16\,120}{5781} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_r \approx 2{,}8\ \text{ans}}$$

La rénovation est très rentable, **et** elle rend l'éclairage conforme.

D- Raccordement

11. $I_1 = \dfrac{P}{V\,f_p} = \dfrac{62}{230 \times 0{,}96} \approx 0{,}281\,\text{A}$; pour un circuit de 13 luminaires : $\boxed{I \approx 3{,}65\,\text{A}}$

12. Les drivers absorbent un courant non sinusoïdal, riche en harmonique de rang 3 (150 Hz). Les harmoniques de rang 3 des trois phases sont en phase entre eux : au lieu de s'annuler comme les courants fondamentaux, ils **s'additionnent dans le neutre**. Le courant de neutre peut alors approcher, voire dépasser, le courant de phase : il faut dimensionner et protéger le neutre en conséquence.

Méthode Dans un bilan de rénovation, on compte toutes les économies : énergie (puissance, durée, gestion) **et** entretien. Et on vérifie toujours la conformité photométrique avant de calculer la rentabilité.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 13.A – Éclairage d'un gymnase intercommunal

Partie A – Sources

A.1. Iodures métalliques : $\eta = \dfrac{32\,000}{400 + 30}$ soit $\boxed{\eta \approx 74\,\text{lm/W}}$;

LED : $\eta = \dfrac{30\,000}{200}$ soit $\boxed{\eta = 150\,\text{lm/W}}$

A.2. Les LED s'allument et se rallument **instantanément**, même à chaud : une microcoupure n'interrompt plus le match. Elles sont deux fois plus efficaces, durent beaucoup plus longtemps (moins d'interventions en hauteur) et peuvent être **graduées** (niveau réduit pour les entraînements), ce qui est impossible avec une lampe à décharge.

Partie B – Dimensionnement par la méthode des flux

B.1. $S = 44 \times 24 = 1\,056\,\text{m}^2$;

$K = 1056/(9 \times (44+24)) \approx 1{,}73 \quad \Rightarrow \quad K = 1{,}5$: $\boxed{U = 0{,}62}$

B.2. Méthode des flux :

$$N = \frac{300 \times 1056}{30\,000 \times 0{,}62 \times 0{,}8} \approx 21{,}3 \quad \Rightarrow \quad N_{min} = 22$$

On installe 24 luminaires : $24 = 3 \times 8$ permet une implantation régulière en 3 rangées (meilleure uniformité, exigée à 0,7), et une répartition équilibrée de 8 luminaires sur chacune des trois phases.

B.3. Le long des 44 m : $44/8 = 5{,}5$ m (2,75 m aux murs) ; entre rangées : $24/3 = 8$ m (4 m aux murs). Les deux valeurs sont inférieures à $1{,}5 \times 9 = 13{,}5$ m ✓.

B.4. Avec 24 luminaires :

$$E = \frac{24 \times 30\,000 \times 0{,}62 \times 0{,}8}{1056} \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 338\,\text{lx}} \geq 300\,\text{lx}$$

Partie C – Éclairement entre quatre luminaires

C.1. C est à $5{,}5/2 = 2{,}75$ m et $8/2 = 4$ m de chaque luminaire selon les deux directions :

$$x = \sqrt{2{,}75^2 + 4^2} \approx 4{,}85\,\text{m}$$

$$\tan(\theta) = \frac{4{,}85}{9} \;\Rightarrow\; \theta \approx 28{,}3^\circ \qquad d = \sqrt{9^2 + 4{,}85^2} \approx 10{,}2\,\text{m}$$

C.2. Angle tabulé le plus proche : 30°, d'où $I = 274 \times 30 = 8\,220$ cd ; $\cos(\theta) = 9/10{,}23 \approx 0{,}880$.

$$E_C = 4 \times \frac{8220 \times 0{,}880}{10{,}23^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_C \approx 277\,\text{lx}}$$

C.3. La méthode des flux donne 338 lx **maintenus**, soit $338/0{,}8 \approx 423$ lx pour une installation neuve. Le calcul point par point ne compte que l'éclairement direct des quatre luminaires les plus proches : il néglige les autres luminaires et toute la lumière réfléchie par les murs et le plafond, prises en compte par l'utilance. L'écart est donc normal.

Partie D – Bilan énergétique

D.1. $P_{avant} = 24 \times 430 = 10\,320$ W ; $\quad P_{LED} = 24 \times 200 = 4\,800$ W.

$E_{e,avant} = 10{,}32 \times 1800 \approx 18\,576$ kW·h $\qquad E_{e,LED} = 4{,}8 \times 1800 \times 0{,}7 = 6\,048$ kW·h

D.2. Économie : $18\,576 - 6048 = 12\,528$ kW · h, soit $12\,528 \times 0{,}19 \approx$ $\boxed{2\,380\ €\ \text{par an}}$.

Investissement : $24 \times 650 = 15\,600$ €.

$$t_r = \frac{15\,600}{2380} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_r \approx 6{,}6\ \text{ans}}$$

Partie E – Alimentation

E.1. 8 luminaires par phase, sous $V = 230\,\text{V}$: $I = \dfrac{8\,P}{V\,f_p}$.

$$I_{avant} = \frac{8 \times 430}{230 \times 0{,}85} \approx 17{,}6\,\text{A} \qquad \boxed{I_{LED} = \frac{8 \times 200}{230 \times 0{,}95} \approx 7{,}3\,\text{A}}$$

E.2. Les courants fondamentaux des trois phases, équilibrés et déphasés de 120°, ont une somme nulle. Les harmoniques de rang 3, eux, sont **en phase** d'une phase à l'autre (un décalage de 120° sur le fondamental correspond à $3 \times 120° = 360°$ sur l'harmonique 3) : ils s'additionnent dans le neutre, qui transporte trois fois le courant harmonique de rang 3 d'une phase.

✓ Corrigé du sujet BTS 13.B – Atelier d'assemblage de cartes électroniques

Partie A – Vérification de l'existant

A.1. Somme des 12 relevés : $7\,781\,\text{lx}$.

$$E_{moy} = \frac{7781}{12} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_{moy} \approx 648\,\text{lx}} \qquad U_0 = \frac{590}{648} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_0 \approx 0{,}91}$$

A.2. L'uniformité est bonne, mais $648\,\text{lx} < 750\,\text{lx}$, et il s'agit d'une installation qui vieillira encore : l'atelier n'est **pas conforme**. Le constat de l'auditeur est justifié.

A.3. $P_{lum} = 4 \times 18 + 6 = 78\,\text{W}$ et $\boxed{P_{avant} = 36 \times 78 = 2\,808\,\text{W}}$

A.4. Baisse du flux des tubes vieillissants et encrassement des luminaires (et des parois) : le facteur de maintenance réel est faible. Même avec des tubes neufs, l'éclairement remonterait temporairement mais retomberait sous $750\,\text{lx}$: l'installation n'a pas été dimensionnée avec une marge de maintenance suffisante pour l'exigence d'assemblage fin.

Partie B – Nouvelle installation

B.1. $S = 18 \times 10 = 180\,\text{m}^2$; $K = 180/(2{,}4 \times 28) \approx 2{,}68$: la valeur tabulée immédiatement inférieure est bien 2,5, donc $U = 0{,}70$ convient.

B.2. Méthode des flux :

$$N = \frac{750 \times 180}{6000 \times 0{,}70 \times 0{,}8} \approx 40{,}2 \quad \Rightarrow \quad N_{min} = 41$$

Implantation de 42 luminaires : **6 rangées de 7**. Le long des 18 m : $18/7 \approx 2{,}57\,\text{m}$ ($1{,}29\,\text{m}$ aux murs) ; entre rangées : $10/6 \approx 1{,}67\,\text{m}$ ($0{,}83\,\text{m}$ aux murs). Les deux espacements sont inférieurs à $1{,}5 \times 2{,}4 = 3{,}6\,\text{m}$ ✓.

B.3. Avec 42 luminaires :

$$E = \frac{42 \times 6000 \times 0{,}70 \times 0{,}8}{180} \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 784\,\text{lx}} \geq 750\,\text{lx}$$

B.4. UGR < 19 et $R_a = 85 \geq 80$ ✓. « 4 000 K » : température de couleur d'un blanc **neutre**, adapté au travail de précision.

Partie C – Poste de contrôle optique

C.1. $\Omega = 2\pi(1 - \cos(25°))$ soit $\boxed{\Omega \approx 0{,}589\,\text{sr}}$; $I = 600/0{,}589$ soit $\boxed{I \approx 1\,019\,\text{cd}}$

C.2. $E = I/d^2 = 1019/0{,}6^2$ soit $\boxed{E \approx 2\,830\,\text{lx}} \geq 2\,000\,\text{lx}$. Diamètre de la zone éclairée : $2 \times 0{,}6 \times \tan(25°) \approx 0{,}56\,\text{m}$, suffisant pour une carte électronique. Avec $R_a = 95 \geq 90$ et $T_c = 5\,000\,\text{K}$, le poste est **conforme**.

C.3. Surface de la face de sortie : $S = \pi \times 0{,}025^2 \approx 1{,}96 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$.

$$L = I/S = 1019/(1{,}96 \times 10^{-3}) \quad \text{soit} \quad \boxed{L \approx 5{,}2 \times 10^5\,\text{cd/m}^2}$$

C'est de l'ordre de 100 fois la luminance d'une dalle opale (3 000 à 6 000 cd/m²) : le spot ne doit jamais être dans le champ de vision de l'opérateur (placé au-dessus de la tête, orienté vers la carte).

Partie D – Bilan énergétique

D.1. $E_{e,avant} = 2{,}808 \times 2200 \approx 6\,178\,\text{kW}\cdot\text{h}$; $P_{LED} = 42 \times 42 = 1\,764\,\text{W}$ et $E_{e,LED} = 1{,}764 \times 2200 \times 0{,}75 \approx 2\,911\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

D.2. Économie : $6178 - 2911 = 3\,267\,\text{kW}\cdot\text{h}$ par an (53 %),

soit $3267 \times 0{,}16 \approx \boxed{523\ €\text{ par an}}$. Investissement : $42 \times 190 = 7980$ €.

$$t_r = 7980/523 \quad \text{soit} \quad \boxed{t_r \approx 15\ \text{ans}}$$

Conclusion : la nouvelle installation rend l'atelier conforme (784 lx maintenus au lieu de 648 lx) en consommant deux fois moins. Le retour est long (peu d'heures de fonctionnement, ballasts déjà électroniques) : la rénovation se justifie d'abord par la **conformité** exigée par le client.

Bilan du chapitre : je sais...

☐ relier flux, intensité, éclairement, luminance et efficacité ;	ex. 13.1 à 13.3
☐ calculer un éclairement en un point (indicatrice) ;	ex. 13.2 à 13.4
☐ additionner les contributions de plusieurs luminaires (point par point) ;	ex. 13.4, sujet A
☐ choisir une source : efficacité, température de couleur, IRC ;	ex. 13.3, sujet B
☐ vérifier une installation au luxmètre (E_{moy}, U_0) ;	ex. 13.5, sujet B
☐ dimensionner un éclairage par la méthode des flux ;	ex. 13.5, 13.6
☐ chiffrer les économies d'une rénovation.	ex. 13.6, sujets A, B

Notes

CHAPITRE

14

Chaîne de mesure

Capteurs, conditionnement, transmission et numérisation

Dans ce chapitre

- Architecture d'une chaîne de mesure
- Caractéristiques d'un capteur
- Capteurs de température, force, pression, position, vitesse
- Conditionnement du signal (pont, amplification, filtrage : formules données)
- Boucle de courant 4–20 mA et bus de terrain
- Conversion analogique-numérique, Shannon

Objectifs

- ✓ Identifier les maillons d'une chaîne et la nature des signaux
- ✓ Exploiter les caractéristiques statiques et dynamiques d'un capteur
- ✓ Exploiter une boucle 4–20 mA et un conditionnement à partir des relations fournies
- ✓ Choisir un CAN et une fréquence d'échantillonnage

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 14

Cours

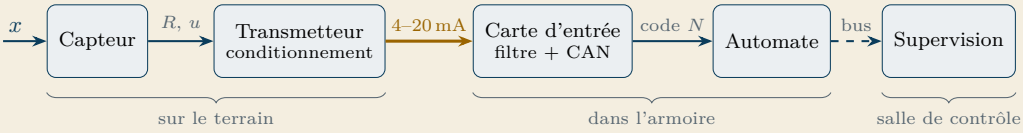
Chapitre 14

14.1 Architecture d'une chaîne de mesure

Un automate ne « voit » le procédé qu'il commande qu'à travers ses capteurs : une température, une pression, un niveau, une vitesse doivent être transformés en une information électrique, transportée jusqu'à l'armoire, puis traduite en nombre. Une seule erreur sur ce trajet, et la régulation travaille sur une valeur fausse.

D

Définition Une **chaîne de mesure** est l'ensemble des appareils qui prélèvent une grandeur physique x sur le procédé (le **mesurande** : température, pression, débit, niveau, effort, position…) et la transforment en une information exploitable par l'automate et la supervision.

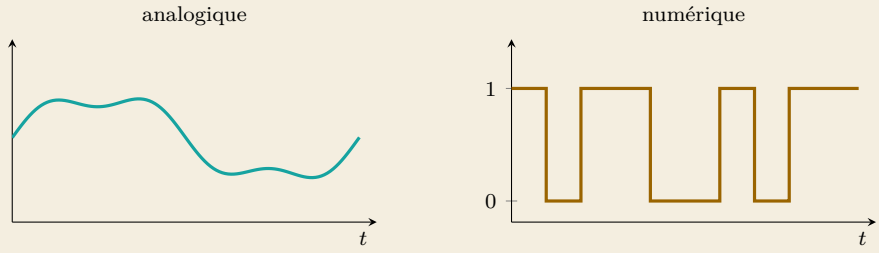


- Le **capteur** est en contact avec le procédé : il transforme la grandeur physique en grandeur électrique (résistance, tension, charge, fréquence). Son signal est faible, propre à chaque modèle et non normalisé.
- Le **transmetteur** conditionne ce signal (alimentation du capteur, amplification, linéarisation, filtrage) et le convertit en un signal **normalisé**, transmissible à distance : le plus souvent un courant 4–20 mA.
- La **carte d'entrée** de l'automate filtre le signal reçu et le **numérise** grâce à un convertisseur analogique-numérique (CAN).
- L'**automate** met la valeur à l'échelle (en °C, en bar…), l'utilise pour commander ou réguler, et la transmet par un bus à la **supervision**, qui l'affiche, l'enregistre et gère les alarmes.

Signal analogique et signal numérique

D

Définition Un signal **analogique** peut prendre **toutes les valeurs** d'un intervalle, de façon continue : l'information est contenue dans la **valeur** du signal (exemple : courant 4–20 mA).
Un signal **numérique** ne prend qu'un **nombre fini** de valeurs, codées en binaire (0 ou 1) : l'information est contenue dans la **suite de bits** (exemple : trame d'un bus de terrain).



Un signal analogique transmet la mesure sans délai de codage, mais toute perturbation qui s'y ajoute devient une erreur de mesure. Un signal numérique est insensible aux petites perturbations (seuls les niveaux 0 et 1 comptent) et permet de transporter plusieurs mesures et des diagnostics sur un même câble.

Ex

Exemple : la température d'un four de cuisson industriel Une sonde Pt100 (capteur) voit sa résistance passer de 100 Ω à 177 Ω quand le four chauffe de 0 °C à 200 °C. Le transmetteur, vissé sur la tête de la sonde, convertit cette résistance en un courant de 4 mA à 20 mA, transporté sur 120 m jusqu'à l'armoire. La carte d'entrée convertit le courant en un code de 0 à 16 383, que l'automate traduit en degrés Celsius pour réguler les brûleurs et alimenter la supervision.

14.2 Les capteurs

Capteurs actifs et capteurs passifs

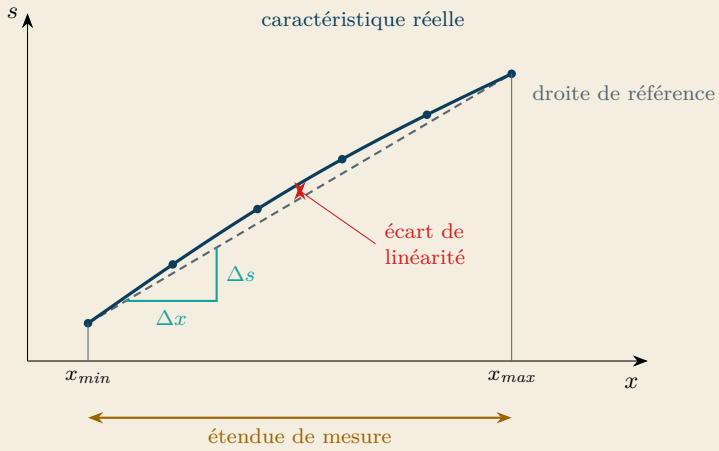
+

Capteurs actifs et passifs – hors programme Un capteur **actif** produit lui-même un signal électrique (tension, charge, courant) à partir de l'énergie du phénomène mesuré : il fonctionne comme un **générateur**.
Un capteur **passif** est une **impédance** (le plus souvent une résistance) qui varie avec la grandeur mesurée : il faut l'**alimenter** pour obtenir un signal.

Capteurs actifs (générateurs)	**Capteurs passifs** (impédances)
thermocouple : tension liée à la température	sonde Pt100, thermistance CTN : résistance
capteur piézoélectrique : charge liée à la force	jauge de déformation : résistance
génératrice tachymétrique : tension liée à la vitesse	potentiomètre : résistance liée à la position
cellule photovoltaïque : courant lié à l'éclairement	capteur capacitif, inductif : C ou L

Caractéristique statique

On relève, en régime établi, le signal de sortie s du capteur pour différentes valeurs connues de x : c'est l'**étalonnage**. La courbe $s = f(x)$ est la **caractéristique statique** du capteur.



L'**étendue de mesure** $[x_{min}\,;x_{max}]$ est l'intervalle dans lequel le constructeur garantit les performances du capteur ; c'est aussi la plage sur laquelle on règle le transmetteur.

+ **Sensibilité et linéarité** – hors programme **Sensibilité** S : variation du signal de sortie provoquée par une variation unitaire du mesurande (pente de la caractéristique). Un capteur est **linéaire** si sa caractéristique est une droite ; sa sensibilité est alors la même dans toute l'étendue de mesure.

$$S = \frac{\Delta s}{\Delta x} \qquad \text{capteur linéaire : } s = s_0 + S\,(x - x_{min})$$

$$e_L = \frac{\text{écart maximal à la droite de référence}}{s_{max} - s_{min}} \times 100\,\%$$

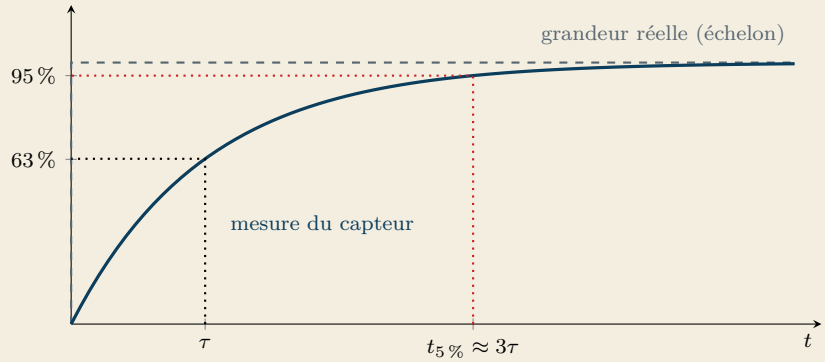
S s'exprime en unité de sortie par unité de mesurande : Ω/°C, mV/bar… L'écart de linéarité e_L s'exprime en % de l'étendue de sortie.

La **résolution** est la plus petite variation du mesurande qui produit une variation détectable de la sortie ; la **précision** (ou classe) indique l'erreur maximale garantie, en général en % de l'étendue de mesure. Un capteur peut être très sensible et pourtant peu précis.

Ex **Exemple** Un capteur de pression 0 bar à 10 bar délivre 0 mV à 0 bar et 100 mV à 10 bar : $S = (100-0)/(10-0) = 10$ mV/bar. Lors de l'étalonnage, le plus grand écart entre les points relevés et la droite vaut 0,25 mV : $e_L = 0{,}25/100 \times 100\,\% = 0{,}25\,\%$.

Comportement dynamique : temps de réponse

Un capteur ne réagit pas instantanément. Quand le mesurande varie brusquement (un **échelon**), la mesure rejoint la nouvelle valeur au bout d'un certain temps. Pour la plupart des capteurs, en particulier les capteurs de température, l'évolution est celle d'un **système du premier ordre** (voir § 15.4).



★ **À retenir · Temps de réponse**

$$t_{5\,\%} \approx 3\,\tau$$

τ : **constante de temps**, durée pour parcourir 63 % de la variation ; $t_{5\,\%}$: **temps de réponse à** 5 %, au-delà duquel la mesure reste à moins de 5 % de la valeur finale.

La constante de temps augmente avec la masse de l'élément sensible, avec une protection (gaine, doigt de gant) et avec un mauvais contact thermique (air immobile plutôt que liquide agité). On choisit un capteur dont le temps de réponse est **petit devant la durée des variations** à suivre.

\+ **Expression de la mesure** – hors programme Pour un capteur du premier ordre soumis à un échelon : $x_m(t) = x_f + (x_i - x_f)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, avec x_i et x_f les valeurs initiale et finale. À $t = \tau$, il reste $\mathrm{e}^{-1} \approx 37\,\%$ de l'écart ; à $t = 3\tau$, $\mathrm{e}^{-3} \approx 5\,\%$.

Ex **Exemple** Une sonde de température gainée a une constante de temps $\tau = 12\,\mathrm{s}$: son temps de réponse vaut $t_{5\,\%} \approx 3 \times 12 = 36\,\mathrm{s}$. Elle convient pour surveiller un bain dont la température évolue en plusieurs minutes, pas pour détecter un coup de chaleur de quelques secondes.

✗ **Piège classique** Relever une mesure juste après avoir plongé la sonde : au bout d'un temps égal à τ, il reste encore 37 % de l'écart à parcourir. Il faut attendre au moins $3\,\tau$ (et $5\,\tau$ pour 99 %).

14.3 Capteurs usuels

Température : la sonde Pt100

La sonde **Pt100** est un fil (ou une couche mince) de platine dont la résistance vaut 100 Ω à 0 °C et augmente avec la température. C'est un capteur **passif**, précis et stable, utilisable de −200 °C à 600 °C environ.

Sonde Pt100 – hors programme

$$R = R_0\,(1 + a\,\theta) \qquad R_0 = 100\,\Omega \qquad a = 3{,}85 \times 10^{-3}/°\text{C}$$

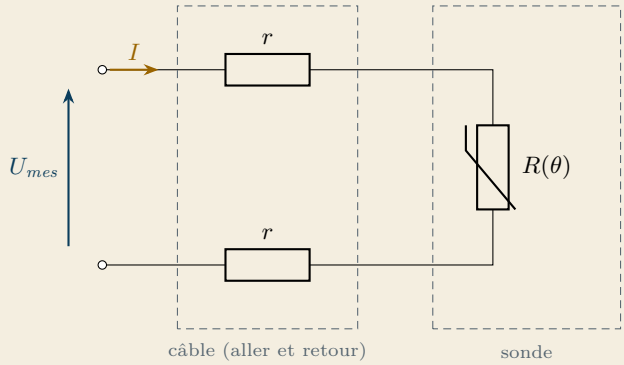
θ en °C.

Chaque degré fait varier la résistance de $R_0\,a = 0{,}385\,\Omega$ (la Pt1000, avec $R_0 = 1\,000\,\Omega$, varie dix fois plus).

Exemple À $\theta = 85\,°\text{C}$: $R = 100 \times (1 + 3{,}85 \times 10^{-3} \times 85) \approx 132{,}7\,\Omega$. Inversement, une résistance mesurée de 119,25 Ω correspond à $\theta = (R/R_0 - 1)/a = 0{,}192\,5/3{,}85 \times 10^{-3} = 50\,°\text{C}$.

Montage 2 fils. La résistance des fils de liaison s'ajoute à celle de la sonde : l'appareil mesure $R + 2r$ et croit la température plus élevée qu'elle n'est.

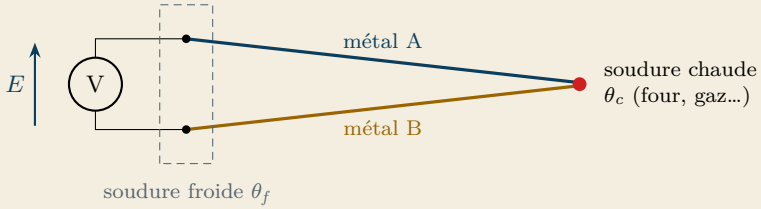
Piège classique Raccorder une Pt100 en 2 fils sur une grande longueur : 1 Ω de câble fausse la mesure de près de 2,6 °C. On utilise un montage **3 fils** (le troisième fil permet de compenser la résistance de la ligne), **4 fils** (le courant et la mesure de tension passent par des fils distincts), ou un transmetteur placé en tête de sonde.



L'appareil injecte I et mesure $U_{mes} = (R + 2r)\,I$: il voit $R + 2r$. Avec $2r = 0{,}385\,\Omega$, l'erreur vaut déjà +1 °C.

Température : le thermocouple

Deux fils de métaux différents A et B, soudés à une extrémité, constituent un **thermocouple**. Quand la soudure de mesure (**soudure chaude**, à θ_c) et les extrémités libres (**soudure froide**, à θ_f) ne sont pas à la même température, une f.é.m. apparaît (effet Seebeck) : c'est un capteur **actif**.



Thermocouple – hors programme

$$E \approx s_{TC}\,(\theta_c - \theta_f)$$

s_{TC} : sensibilité (pouvoir thermoélectrique), de l'ordre de 41 µV/°C pour le type K (nickel-chrome / nickel-aluminium), utilisable jusqu'à 1 200 °C environ.

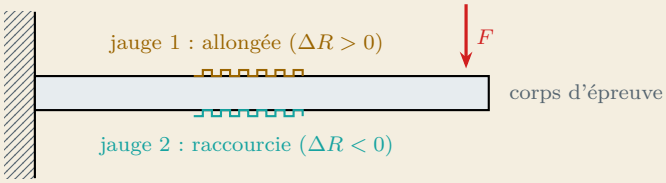
Le thermocouple mesure un **écart** de température. L'appareil de mesure doit donc connaître θ_f : un petit capteur placé sur son bornier la mesure et le transmetteur ajoute $s_{TC}\theta_f$ au signal reçu. C'est la **compensation de soudure froide**. Le raccordement se fait avec un câble de compensation de même nature que le thermocouple.

Exemple Type K, four à $\theta_c = 900\,°C$, bornier dans une armoire à $\theta_f = 30\,°C$: $E = 41 \times 10^{-6} \times (900 - 30) \approx 35{,}7\,mV$, quelques dizaines de millivolts seulement : le signal doit être amplifié.

	Pt100	**Thermocouple K**	**Thermistance CTN**
type	passif	actif	passif
plage	−200 °C à 600 °C	−200 °C à 1 200 °C	−50 °C à 150 °C
linéarité	très bonne	bonne	mauvaise
atouts	précise, stable	hautes températures, robuste, rapide	très sensible, peu coûteuse

Force et pression : jauges de déformation

Une **jauge de déformation** est un fil résistif très fin, en zigzag, collé sur une pièce métallique (le **corps d'épreuve**). Quand la pièce se déforme sous l'effet d'une force, la jauge s'allonge ou se raccourcit avec elle et sa résistance varie.



Jauge de déformation, cellule de charge – hors programme

$$\frac{\Delta R}{R_0} = K\,\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

K : facteur de jauge (2 environ pour les jauges métalliques) ; ε : déformation relative,

sans unité, souvent exprimée en µm/m ; R_0 : résistance au repos (120 Ω ou 350 Ω). Cellule de charge de sensibilité S_n (en mV/V), de portée m_{max}, alimentée sous E : $U_{mes} = S_n\, E\, m/m_{max}$.

Les déformations restent très petites (moins de 10^{-3}) : ΔR ne dépasse pas quelques dixièmes d'ohm. On place donc les jauges dans un **pont de Wheatstone** (paragraphe 14.4). Les **cellules de charge** (pesage) et la plupart des **capteurs de pression** (jauges collées sur une membrane) fonctionnent ainsi ; leur sensibilité est donnée en mV/V : tension de sortie à la charge nominale, par volt d'alimentation du pont.

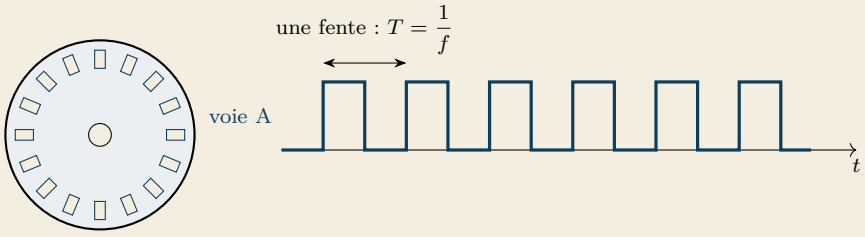
Exemple : mesurer un niveau avec un capteur de pression Au fond d'une cuve à l'air libre, la pression relative vaut $p = \rho\, g\, h$ (chapitre 9) : elle est proportionnelle à la hauteur de liquide. Pour de l'eau ($\rho = 1\,000\,\text{kg/m}^3$) et $h = 3\,\text{m}$: $p = 1000 \times 9{,}81 \times 3 \approx 29{,}4\,\text{kPa} \approx 0{,}29\,\text{bar}$.

Les capteurs **piézoélectriques** (quartz, céramique) sont **actifs** : ils produisent une charge électrique proportionnelle à la force. Ils ne mesurent que des efforts **variables** (chocs, vibrations) : on les retrouve dans les accéléromètres de surveillance des machines tournantes.

Position et vitesse

Position. Un **potentiomètre** dont le curseur suit la pièce mobile donne une tension $U = x\, E$, proportionnelle à la position (x entre 0 et 1). Les **détecteurs de proximité** (inductifs pour les métaux, capacitifs pour tous matériaux, photoélectriques) sont des capteurs **tout ou rien** : ils signalent seulement la présence ou l'absence d'un objet.

Codeur incrémental. Un disque comportant N fentes tourne avec l'arbre ; une diode et un phototransistor délivrent une impulsion à chaque fente. L'automate compte les impulsions (position) ou mesure leur fréquence (vitesse). Une seconde voie B, décalée d'un quart de période, indique le sens de rotation.



disque à N fentes

Génératrice tachymétrique. Petite machine à courant continu (voir § 6.2) à aimants entraînée par l'arbre : elle délivre une f.é.m. proportionnelle à la vitesse (capteur **actif**). Ses balais s'usent et sa tension présente une ondulation, qu'il faut filtrer.

Codeur et génératrice – hors programme

$$\text{Codeur : } f = \frac{N\,n}{60} \qquad \text{Génératrice : } E = k\,n$$

f en Hz ; n en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$; N : nombre de points (impulsions) par tour ; k : constante de la génératrice (en $\text{V}/(\text{tr}\cdot\text{min}^{-1})$, souvent donnée pour $1\,000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$). Résolution angulaire du codeur : $360°/N$.

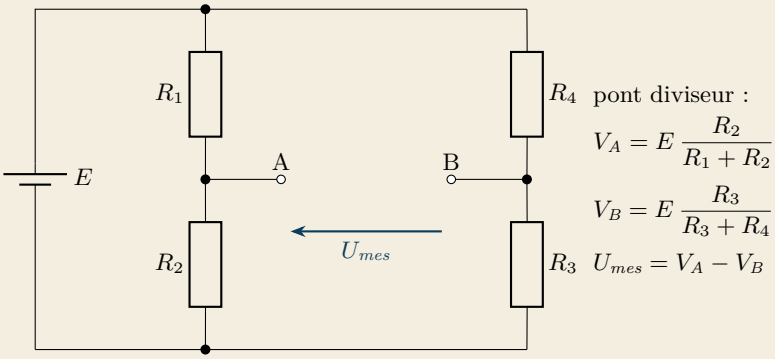
Exemple Codeur de 500 points sur un arbre tournant à $1\,200\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$: $f = 500 \times 1200/60 = 10\,\text{kHz}$; résolution : $360/500 = 0{,}72°$. Une génératrice de 10 V pour $1\,000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ délivre au même régime $E = 0{,}01 \times 1200 = 12\,\text{V}$.

14.4 Conditionnement du signal

Le signal brut d'un capteur est rarement exploitable tel quel : une variation de résistance doit être convertie en tension, quelques millivolts doivent être amplifiés, les parasites doivent être éliminés. C'est le rôle du **conditionneur**, en général intégré au transmetteur.

Le pont de Wheatstone

Pour mesurer une petite variation de résistance, on place le capteur dans un pont de quatre résistances alimenté par une tension continue E. On mesure la tension U_{mes} entre les milieux A et B des deux branches.



pont diviseur :

$$V_A = E\,\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_B = E\,\frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$U_{mes} = V_A - V_B$$

Pont de Wheatstone – hors programme

$$U_{mes} = E\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right) \qquad \text{équilibre } (U_{mes} = 0) \ : \ R_1\,R_3 = R_2\,R_4$$

Toutes les résistances valent R_0 au repos ; une seule varie ($R_2 = R_0 + \Delta R$, **quart de pont**) :

$$U_{mes} \approx E\,\frac{\Delta R}{4\,R_0} \quad \text{si } \Delta R \ll R_0$$

Pont complet (quatre jauges, $R_2 = R_4 = R_0 + \Delta R$, $R_1 = R_3 = R_0 - \Delta R$) : $U_{mes} = E\,\Delta R/R_0$, exactement.

Démonstration (quart de pont).

$$U_{mes} = E\left(\frac{R_0+\Delta R}{2R_0+\Delta R} - \frac{1}{2}\right) = E\,\frac{\Delta R}{2\,(2R_0+\Delta R)}$$

qui vaut $E\,\Delta R/(4R_0)$ lorsque ΔR est négligeable devant $2R_0$.

Le pont présente deux avantages : à l'équilibre, la tension mesurée est **nulle**, on peut donc l'amplifier fortement ; et toute variation qui affecte de la même façon deux résistances voisines (la température pour des jauges identiques, par exemple) se **compense**.

Exemple : jauge en quart de pont Jauge $R_0 = 350\,\Omega$, $K = 2$, déformation $\varepsilon = 500\,\mu\text{m/m}$; pont alimenté sous $E = 10\,\text{V}$:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 2 \times 500 \times 10^{-6} = 1 \times 10^{-3} \qquad \Delta R = 0{,}35\,\Omega$$

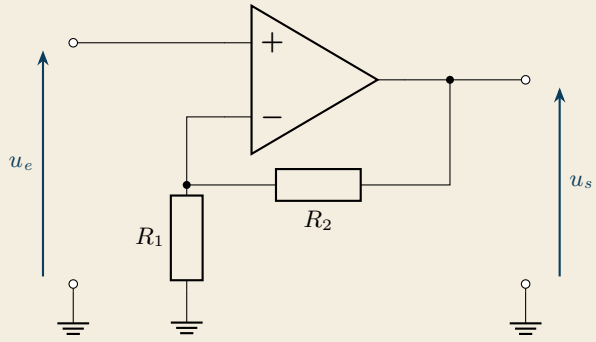
$$U_{mes} \approx 10 \times \frac{1 \times 10^{-3}}{4} = 2{,}5\,\text{mV}$$

Avec quatre jauges en pont complet, on obtiendrait 10 mV : quatre fois plus de signal.

Piège classique L'approximation $E\,\Delta R/(4R_0)$ n'est valable que pour de petites variations. Pour une Pt100 entre 0 °C et 100 °C, $\Delta R/R_0$ atteint 0,385 : il faut utiliser la formule exacte, et la tension n'est plus proportionnelle à la température.

Amplification

Les tensions issues d'un pont ou d'un thermocouple valent quelques millivolts, alors que les cartes d'entrée attendent 0 V à 10 V. On les amplifie avec un montage à amplificateur opérationnel (AOP). Pour un pont, la tension utile est la **différence** $V_A - V_B$ entre deux points qui ne sont pas reliés à la masse. On utilise alors un **amplificateur d'instrumentation** (trois AOP dans un même boîtier), dont le gain est réglé par une seule résistance externe. Il rejette les tensions communes aux deux entrées, en particulier les parasites captés de la même façon par les deux fils.



Amplificateur non inverseur (AOP idéal) – hors programme

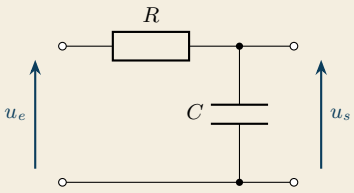
$$u_s = G\,u_e \qquad\qquad G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

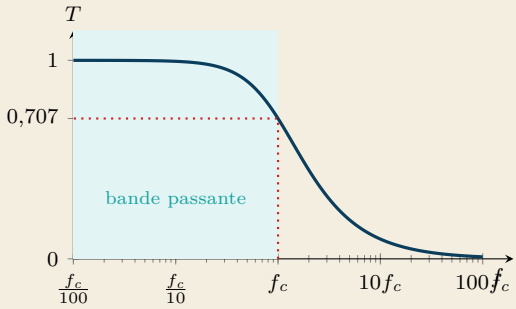
Amplificateur d'instrumentation : $u_s = G\,(V_A - V_B)$.

Exemple : mettre à l'échelle un thermocouple On veut 10 V en sortie pour 1 000 °C (soudure froide compensée) avec un type K : $u_e = 41 \times 10^{-6} \times 1000 = 41$ mV, d'où $G = 10/0{,}041 \approx 244$. Avec $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$: $R_2 = (G-1)\,R_1 \approx 243\,\text{k}\Omega$.

Filtrage

Le signal de mesure varie lentement, mais il est souvent pollué par des composantes rapides : parasites à 50 Hz captés par les câbles, ondulation d'une génératrice tachymétrique, bruit des variateurs. Un **filtre passe-bas** (voir § 15.6) laisse passer le signal utile et atténue ces composantes ; placé avant un CAN, il évite aussi le repliement de spectre (paragraphe 14.6).





Filtre passe-bas du premier ordre (RC) – hors programme

$$T(p) = \frac{u_s(p)}{u_e(p)} = \frac{1}{1 + RC\,p} \qquad\qquad f_c = \frac{1}{2\pi\,RC}$$

$$\text{En sinusoïdal : } T = |\underline{T}(j\omega)| = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}} \qquad T \approx \frac{f_c}{f} \text{ si } f \gg f_c$$

f_c : fréquence de coupure ($T = 0{,}707$) ; en continu, $T = 1$: la valeur moyenne du signal passe intégralement.

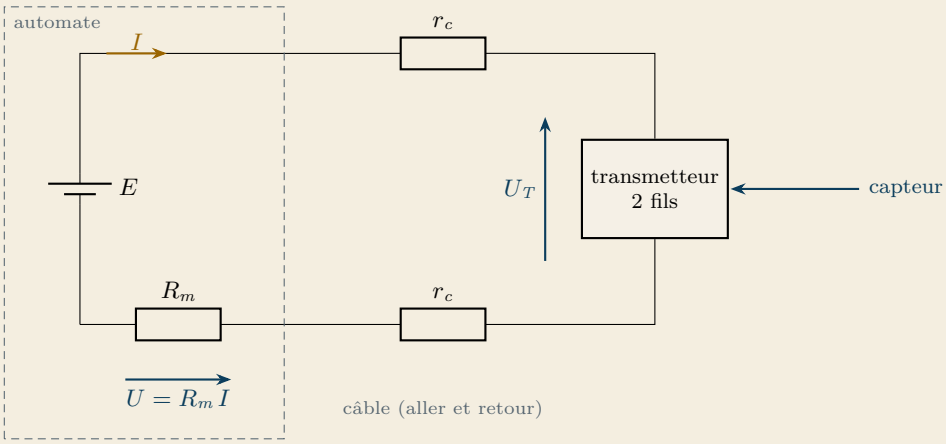
Exemple Pour éliminer les parasites à 50 Hz d'une mesure de température, on choisit $R = 100\,\text{k}\Omega$ et $C = 1\,\mu\text{F}$: $f_c = 1/(2\pi \times 10^5 \times 10^{-6}) \approx 1{,}6$ Hz. À 50 Hz, $T \approx 1{,}6/50 \approx 0{,}032$: le parasite est divisé par 30 environ.

✗ **Piège classique** Un filtre ralentit la mesure : sa constante de temps $\tau = RC$ s'ajoute à celle du capteur. Avec l'exemple précédent, $\tau = 0{,}1\,\text{s}$ et $t_{5\,\%} \approx 0{,}3\,\text{s}$: sans importance pour une température, rédhibitoire pour une boucle de vitesse rapide. On ne choisit pas f_c plus basse que nécessaire.

14.5 Transmission de la mesure

La boucle de courant 4–20 mA

Le transmetteur est réglé sur une **étendue de mesure** $[x_{min}\,;x_{max}]$. Il impose dans la boucle un courant qui varie linéairement de 4 mA (début d'échelle) à 20 mA (fin d'échelle). Une alimentation continue, en général 24 V, fait circuler ce courant ; le transmetteur **2 fils** s'alimente sur la boucle elle-même. L'automate mesure le courant grâce à une résistance de mesure R_m, souvent 250 Ω.



Le transmetteur **2 fils** est le plus courant : les deux mêmes conducteurs transportent son alimentation et la mesure. Un transmetteur **4 fils**, alimenté séparément (souvent en 230 V), est réservé aux appareils gourmands en énergie, comme les débitmètres électromagnétiques ; il impose alors lui-même le courant de boucle (sortie dite « active »).

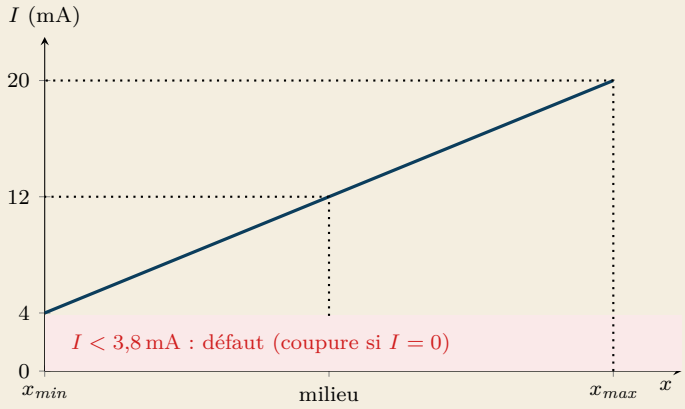
★ **À retenir · Boucle 4–20 mA**

$$I = 4 + 16\,\frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \qquad x = x_{min} + \frac{I - 4}{16}\,(x_{max} - x_{min})$$

$$U = R_m\,I \qquad (R_m = 250\,\Omega\ :\ U \text{ de } 1\,\text{V à } 5\,\text{V})$$

I en mA dans les deux premières relations, en ampères dans $U = R_m\,I$; 16 mA représentent toute l'étendue de mesure.

Alimentation du transmetteur – hors programme La loi des mailles (voir § 1.1) appliquée à la boucle donne la tension aux bornes du transmetteur : $U_T = E - (R_m + 2\,r_c)\,I$. Elle doit rester supérieure à la tension minimale $U_{T,min}$ exigée par le constructeur (10 V à 12 V typiquement), à vérifier au courant maximal : c'est ce qui limite la longueur du câble.



Pourquoi un courant ? Dans une boucle, le courant est le **même en tout point** : il ne dépend ni de la longueur ni de la résistance du câble (tant que le transmetteur reste correctement alimenté), et il est peu sensible aux parasites. Une tension 0 V à 10 V, au contraire, est diminuée par la chute de tension dans les fils.

Pourquoi 4 mA ? C'est le **zéro vivant** : le début d'échelle correspond à 4 mA et non à 0 mA. Un courant nul signale donc une **coupure** de la boucle, et non une mesure nulle ; de plus, les 4 mA suffisent à alimenter un transmetteur 2 fils. En dehors de la plage 3,8 mA à 20,5 mA, la mesure est déclarée **en défaut**.

Exemple : transmetteur de niveau 0 m à 5 m Pour $h = 3{,}2$ m :

$$I = 4 + 16 \times \frac{3{,}2}{5} = 14{,}24\,\text{mA} \qquad \text{et} \qquad U = 250 \times 14{,}24 \times 10^{-3} = 3{,}56\,\text{V}.$$

L'automate lit $I = 8$ mA :

$$h = \frac{8-4}{16} \times 5 = 1{,}25\,\text{m}.$$

Boucle alimentée sous $E = 24$ V par un câble de résistance $2\,r_c = 20\,\Omega$: à 20,5 mA,

$$U_T = 24 - (250 + 20) \times 0{,}020\,5 \approx 18{,}5\,\text{V},$$

largement au-dessus des 12 V exigés.

Piège classique Écrire $U = 250 \times 14{,}24 = 3\,560$ V : dans $U = R_m\,I$, le courant doit être en ampères. Autre erreur classique : oublier x_{min} quand l'étendue ne commence pas à zéro (-50 °C à 150 °C : $x - x_{min} = x + 50$).

Signaux normalisés et bus de terrain

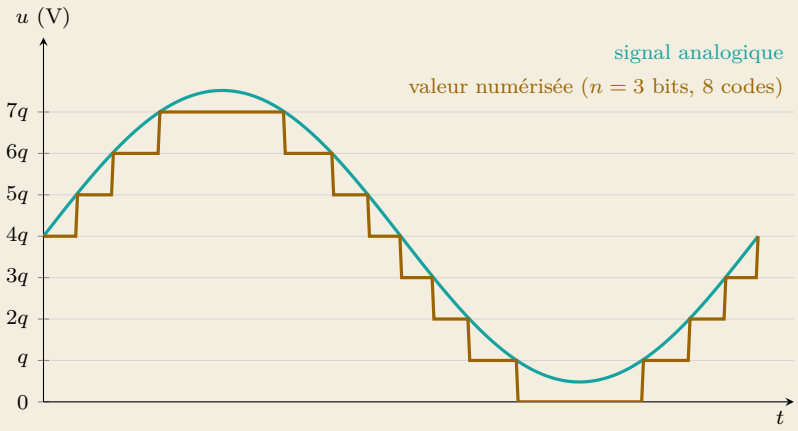
Signal	Nature	À retenir
4–20 mA	analogique (courant)	le plus répandu, zéro vivant, longues distances
0–20 mA	analogique (courant)	pas de détection de coupure
0–10 V	analogique (tension)	simple, sensible à la longueur des câbles
HART	numérique superposé au 4–20 mA	paramétrage et diagnostic à distance sur les mêmes fils
Modbus, Profibus, Profinet, IO-Link	numérique (bus de terrain)	plusieurs mesures et diagnostics sur un seul câble

14.6 Conversion analogique-numérique

Quantification : le CAN

D

Définition Le **convertisseur analogique-numérique** (CAN) associe à chaque tension d'entrée U, comprise dans sa **pleine échelle** PE, un **code** entier N écrit sur n bits. Il existe 2^n codes, de 0 à $2^n - 1$. Le **quantum** q (ou résolution) est la plus petite variation de tension que le CAN distingue.



★

À retenir · CAN

$$q = \frac{PE}{2^n} \qquad N = \text{partie entière de } \frac{U}{q}, \text{ au plus } 2^n - 1$$

2^n codes, de 0 à $2^n - 1$: pour $U = \text{PE}$, le code sature à $2^n - 1$. Erreur de quantification (troncature) : au plus un quantum ; plus n est grand, plus la mesure est fine.

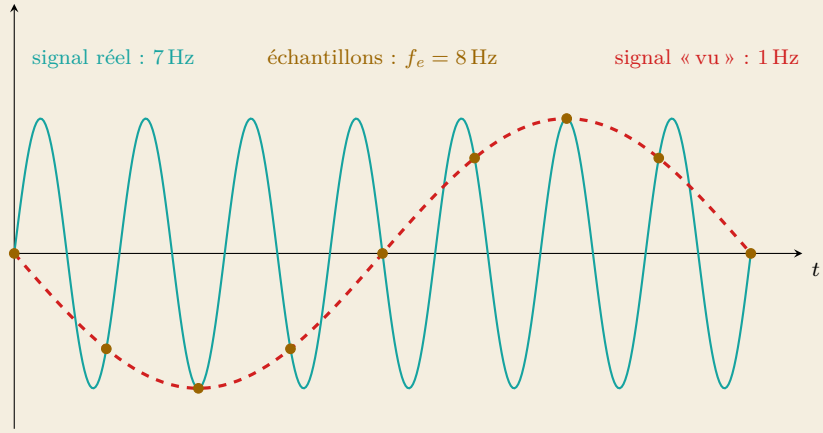
Intervalle d'un code, résolution sur le mesurande – hors programme Le code N correspond aux tensions telles que $N\,q \leq U < (N+1)\,q$. Ramenée au mesurande, la résolution vaut $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/(\text{nombre de codes utilisés})$.

Exemple CAN 12 bits, $PE = 10\,\text{V}$: $2^{12} = 4\,096$ codes, $q = 10/4096 \approx 2{,}44\,\text{mV}$. Pour $U = 6{,}30\,\text{V}$: $U/q \approx 2\,580{,}5$, donc $N = 2\,580$. Un transmetteur 0 °C à 400 °C délivrant 0 V à 10 V est alors lu avec une résolution de $400/4096 \approx 0{,}1\,°\text{C}$.

Piège classique Avec une boucle 4–20 mA lue sur une résistance de 250 Ω par un CAN 0 V à 5 V, les codes compris entre 0 V et 1 V (0 mA à 4 mA) ne servent qu'à détecter les défauts : seuls 80 % des codes décrivent l'étendue de mesure.

Échantillonnage et critère de Shannon

Le CAN ne mesure pas en continu : il prélève un **échantillon** du signal à intervalles réguliers, toutes les T_e secondes. Si les échantillons sont trop espacés, ils ne décrivent plus le signal réel.



À retenir · Critère de Shannon

$$f_e = \frac{1}{T_e} \qquad f_e > 2\,f_{max}$$

f_e : fréquence d'échantillonnage ; f_{max} : plus haute fréquence contenue dans le signal (son spectre). Sinon, une composante de fréquence f comprise entre $f_e/2$ et f_e apparaît à la fréquence $f_r = |f_e - f|$: c'est le **repliement de spectre**.

Sur la figure, un signal de 7 Hz échantillonné à 8 Hz donne les mêmes échantillons qu'un signal de $8 - 7 = 1\,\text{Hz}$: l'automate « voit » une oscillation lente qui n'existe pas. Rien ne permet de s'en apercevoir après coup. On place donc avant le CAN un **filtre passe-bas anti-repliement**, qui élimine les composantes supérieures à $f_e/2$, et l'on choisit en pratique f_e entre 2,5 et 10 fois f_{max}.

Ex

Exemple : surveillance vibratoire d'un ventilateur Le spectre des vibrations utiles s'étend jusqu'à $f_{max} = 2\,\text{kHz}$: il faut $f_e > 4\,\text{kHz}$; on choisit $f_e = 5{,}12\,\text{kHz}$ (2,56 fois f_{max}, valeur courante). Avec $f_e = 3\,\text{kHz}$, la raie de 2 kHz apparaîtrait à $3 - 2 = 1\,\text{kHz}$ et fausserait le diagnostic.

En ligne : simulateurs de la réponse d'un capteur, de la quantification d'un CAN et du repliement de spectre : faites varier τ, n, f et f_e.

14.7 Une chaîne complète : le pesage industriel

Ex

Exemple : pesage d'une cuve de mélange Une cuve est posée sur une cellule de charge de portée 2 000 kg et de sensibilité 2 mV/V, alimentée sous $E = 10\,\text{V}$; l'amplificateur d'instrumentation a un gain $G = 500$; le CAN de la carte d'entrée a $n = 16$ bits et $PE = 10\,\text{V}$.

- Signal à pleine charge : $U_{mes} = 2 \times 10^{-3} \times 10 = 20\,\text{mV}$; sensibilité : $S = 20/2000 = 0{,}01\,\text{mV/kg} = 10\,\mu\text{V/kg}$.
- Pour $m = 1\,250\,\text{kg}$: $U_{mes} = 12{,}5\,\text{mV}$, puis $u_s = 500 \times 12{,}5 \times 10^{-3} = 6{,}25\,\text{V}$.
- $q = 10/65\,536 \approx 0{,}153\,\text{mV}$, $N =$ partie entière de $6{,}25/1{,}526 \times 10^{-4} = 40\,960$.
- Résolution en masse : $2000/65\,536 \approx 0{,}03\,\text{kg} = 30\,\text{g}$, bien meilleure que la précision de la cellule (0,05 %, soit 1 kg) : c'est le capteur qui limite la qualité de la mesure, pas le CAN.

Dépanner une chaîne de mesure.

1. Comparer la valeur affichée à une mesure de référence (thermomètre étalon, manomètre…).
2. Remonter la chaîne maillon par maillon, en partant de l'automate : code N et mise à l'échelle, puis courant de boucle (pince milliampèremétrique), puis signal du capteur (résistance, tension).
3. Calculer à chaque étape la valeur attendue avec les relations du chapitre : le maillon défaillant est le premier dont la sortie ne correspond plus à son entrée.
4. Penser aux défauts caractéristiques : courant nul (coupure), courant hors plage (capteur ou transmetteur en défaut), décalage constant (résistance de ligne, soudure froide), mesure lente (gaine encrassée), oscillation fictive (repliement).

L'essentiel

Chapitre 14

Chaîne de mesure

Chaîne de mesure	capteur → transmetteur → CAN → automate
Signal analogique	toutes les valeurs d'un intervalle
Signal numérique	nombre fini de codes binaires (0 ou 1)
Constante de temps	τ : 63 % de la variation
Temps de réponse à 5 %	$t_{5\,\%} \approx 3\,\tau$
Boucle 4–20 mA	$I = 4 + 16\,\dfrac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$ (mA)
Lecture de la mesure	$x = x_{min} + \dfrac{I - 4}{16}\,(x_{max} - x_{min})$
Résistance de mesure	$U = R_m\,I$ (I en A) $\quad R_m = 250\,\Omega$: 1 V à 5 V
Zéro vivant	$I = 0$: coupure $\quad I \notin [3{,}8\,;20{,}5]$ mA : défaut
Signaux normalisés	4–20 mA, 0–10 V, HART, bus de terrain
Codes d'un CAN n bits	2^n codes, de 0 à $2^n - 1$
Quantum	$q = \dfrac{PE}{2^n}$
Code de sortie	$N =$ partie entière de $\dfrac{U}{q}$
Fréquence d'échantillonnage	$f_e = \dfrac{1}{T_e}$
Critère de Shannon	$f_e > 2\,f_{max}$
Repliement de spectre	$f_e \leq 2 f_{max}$: raie fictive à $\lvert f_e - f \rvert$

Exercices

Chapitre 14

Capteurs et conditionnement

Exercice 14.1 – Sonde Pt100 d'une chambre froide ★☆☆

Une plateforme logistique de produits surgelés stocke ses palettes dans une chambre froide maintenue à $-25\,°\text{C}$. La température est mesurée par une sonde Pt100 raccordée en 2 fils au régulateur du groupe frigorifique, installé dans le local technique à 25 m de la sonde. Lors d'un audit qualité, un thermomètre étalon indique $-25\,°\text{C}$ alors que le régulateur affiche une température nettement plus élevée. Le technicien de maintenance doit comprendre l'origine de cet écart.

Données

- Sonde Pt100 : $R = R_0\,(1 + a\,\theta)$, avec $R_0 = 100\,\Omega$ et $a = 3{,}85 \times 10^{-3}\,/°\text{C}$.
- Câble : deux conducteurs en cuivre de section $s = 0{,}5\,\text{mm}^2$, longueur $L = 25\,\text{m}$, résistivité $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m}$; résistance d'un conducteur : $r = \rho\,\dfrac{L}{s}$.
- Le régulateur mesure la résistance qu'il voit entre ses bornes et la convertit en température comme si la sonde était branchée directement.
- Sensibilité d'un capteur : $S = \dfrac{\Delta R}{\Delta \theta}$ (variation de la sortie pour une variation unitaire du mesurande).
- Un capteur **actif** produit lui-même un signal électrique (générateur) ; un capteur **passif** est une impédance qui varie avec la grandeur mesurée et doit être alimenté.

1. La sonde Pt100 est-elle un capteur actif ou passif ? Justifier.
2. Calculer la résistance de la sonde à $-25\,°\text{C}$ et à $0\,°\text{C}$.
3. Calculer la sensibilité S de la sonde. Cette sensibilité dépend-elle de la température ? Que peut-on en conclure ?
4. Calculer la résistance r d'un conducteur du câble, puis la résistance R_{mes} vue par le régulateur lorsque la chambre est à $-25\,°\text{C}$.
5. En déduire la température affichée par le régulateur et l'erreur de mesure.
6. Proposer deux solutions pour supprimer cette erreur.

→ corrigé p. 517

Exercice 14.2 – Thermocouple d'un four de trempe ★★☆

Un sous-traitant automobile durcit des pignons de boîte de vitesses dans un four de trempe chauffé à $850\,°\text{C}$. La température est mesurée par un thermocouple de type K, dont le câble de compensation aboutit au bornier d'une carte d'acquisition, dans

une armoire où règne 30 °C. Après le remplacement de cette carte, la supervision affiche 820 °C alors qu'un thermocouple étalon introduit dans le four indique 850 °C. On vous demande d'analyser la chaîne de mesure avant de remettre le four en production.

Données

- Thermocouple de type K : $E \approx s_{TC}\,(\theta_c - \theta_f)$ avec $s_{TC} = 41\,\mu\text{V/°C}$ (supposée constante).
- La tension (soudure froide compensée) est amplifiée par un amplificateur non inverseur ($G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$) ; on souhaite 10 V en sortie pour 1 200 °C.
- Thermocouple placé dans une gaine céramique : constante de temps $\tau = 20\,\text{s}$.
- Un capteur **actif** produit lui-même un signal électrique (générateur) ; un capteur **passif** est une impédance qui varie avec la grandeur mesurée et doit être alimenté.

1. Le thermocouple est-il un capteur actif ou passif ? La sonde Pt100 de l'atelier est donnée par sa notice jusqu'à 600 °C : convient-elle pour ce four ?

2. Calculer la f.é.m. E délivrée par le thermocouple lorsque le four est à 850 °C.

3. Le nouveau module a été configuré sans compensation de soudure froide : il considère que $\theta_f = 0\,°\text{C}$. Calculer la température qu'il affiche et l'erreur commise. Expliquer le principe de la compensation de soudure froide.

4. Une fois la compensation activée, la tension à amplifier vaut $s_{TC}\,\theta_c$. Calculer le gain G nécessaire, puis la résistance R_2 si $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$.

5. On retient $G = 203$. Calculer la tension de sortie de l'amplificateur pour 850 °C.

6. Calculer le temps de réponse à 5 % du thermocouple gainé. Le cycle de chauffe durant 2 h, ce temps de réponse est-il gênant ?

→ corrigé p. 518

Exercice 14.3 – Pesage d'une trémie de dosage ★★☆

Une usine d'aliments pour animaux prépare ses recettes en pesant successivement chaque matière première dans une trémie. La trémie est suspendue à trois cellules de charge identiques, à jauges de déformation montées en pont complet. Les signaux des trois cellules sont regroupés dans une boîte de jonction, qui délivre la moyenne de leurs tensions : tout se passe comme si une seule cellule, de portée triple, portait la trémie. Le responsable de production veut connaître la sensibilité et la linéarité de cette balance avant de l'utiliser pour des additifs dosés au kilogramme près.

Données

- Chaque cellule : portée $m_{max} = 500\,\text{kg}$, sensibilité nominale $S_n = 2\,\text{mV/V}$, jauges de résistance $R_0 = 350\,\Omega$ et de facteur $K = 2{,}1$; alimentation du pont $E = 10\,\text{V}$.
- Masse de la trémie vide : 240 kg.

▷ Jauge : $\dfrac{\Delta R}{R_0} = K\,\varepsilon$ (ε : déformation relative). Pont complet : $U_{mes} = E\,\dfrac{\Delta R}{R_0}$; quart de pont : $U_{mes} \approx E\,\dfrac{\Delta R}{4R_0}$. La sensibilité nominale S_n est la tension de sortie à la portée, par volt d'alimentation.

▷ Sensibilité : $S = \dfrac{\Delta U_{mes}}{\Delta m}$; écart de linéarité :

$$e_L = \frac{\text{écart maximal à la droite}}{U_{max} - U_{min}} \times 100\,\%$$

▷ Étalonnage de l'ensemble avec des masses étalons (trémie comprise) :

m (kg)	0	300	600	900	1200	1500
U_{mes} (mV)	0,00	4,02	8,05	12,06	16,03	20,00

I- La cellule de charge

1. Calculer la tension délivrée par une cellule à sa charge nominale. En déduire $\dfrac{\Delta R}{R_0}$ (pont complet), puis la déformation ε des jauges, en µm/m.

2. Quelle tension obtiendrait-on, pour la même déformation, avec une seule jauge montée en quart de pont ? Conclure.

II- La balance

3. Calculer la portée de l'ensemble et sa sensibilité S en µV/kg.

4. On verse 600 kg de blé dans la trémie. Calculer la tension U_{mes} délivrée.

5. À l'aide du tableau d'étalonnage, calculer l'écart entre chaque point et la droite idéale passant par $(0\,;0)$ et $(1500\,;20{,}00)$. En déduire l'écart de linéarité e_L de la balance.

6. La tension est amplifiée pour obtenir 10 V à pleine charge, puis numérisée par un CAN 16 bits de pleine échelle 10 V. Calculer le gain de l'amplificateur et la plus petite variation de masse détectable. La balance permet-elle de doser au kilogramme près ? (Comparer cette résolution à l'écart de linéarité exprimé en kilogrammes.)

→ corrigé p. 519

Transmission et numérisation

Exercice 14.4 – Pression d'un réseau d'air comprimé ★☆☆

Dans une usine de menuiserie industrielle, un réseau d'air comprimé alimente les vérins des machines d'usinage. La pression est surveillée par un transmetteur 2 fils, réglé sur l'étendue de mesure 0 bar à 16 bar et raccordé à une entrée 4–20 mA

de l'automate, qui lit le courant sur une résistance de mesure $R_m = 250\,\Omega$. L'automate doit démarrer un second compresseur si la pression descend sous 5,5 bar. Le technicien doit programmer et vérifier cette chaîne.

1. Quels courants le transmetteur impose-t-il à 0 bar et à 16 bar ?
2. Calculer le courant I dans la boucle et la tension U aux bornes de R_m pour une pression de 7 bar.
3. L'automate mesure $U = 3{,}80\,\text{V}$. Calculer le courant de boucle, puis la pression dans le réseau.
4. Calculer le seuil de courant à programmer pour démarrer le second compresseur.
5. L'automate relève successivement $I = 0\,\text{mA}$, puis $I = 3{,}2\,\text{mA}$. Interpréter ces deux valeurs.
6. La boucle est alimentée sous $E = 24\,\text{V}$; le câble mesure 120 m, chaque conducteur ayant une résistance de $26\,\Omega/\text{km}$; le transmetteur exige au moins 10,5 V à ses bornes. La tension aux bornes du transmetteur vaut $U_T = E - (R_m + 2\,r_c)\,I$ (r_c : résistance d'un conducteur). Vérifier qu'il est correctement alimenté au courant maximal de 20,5 mA, puis calculer la longueur de câble maximale.

→ corrigé p. 520

Exercice 14.5 – Débit d'une station de chloration ★★☆

Une station de production d'eau potable injecte du chlore dans l'eau traitée. Le débit d'eau, mesuré par un débitmètre électromagnétique, sert à calculer la quantité de chlore à injecter. Le transmetteur du débitmètre délivre une tension 0 V à 10 V pour un débit de $0\,\text{m}^3/\text{h}$ à $40\,\text{m}^3/\text{h}$, numérisée par la carte d'entrée de l'automate. L'eau est poussée par une pompe à pistons qui donne au débit de petites pulsations. L'exploitant constate que la valeur lue par l'automate fluctue à quelques hertz, à des fréquences sans rapport avec les coups de la pompe, alors que le débit moyen est stable : on vous demande d'étudier la numérisation.

Données

- Carte d'entrée : CAN 14 bits, pleine échelle $PE = 10\,\text{V}$; la carte prélève un échantillon toutes les $T_e = 50\,\text{ms}$.
- Le code N correspond aux tensions d'entrée telles que $N\,q \leq U < (N+1)\,q$.
- La pompe effectue 180 coups par minute ; les pulsations de débit contiennent des composantes à la fréquence des coups et à ses multiples, jusqu'à l'harmonique de rang 5.

I- Quantification

1. Combien de codes le CAN peut-il fournir ? Calculer son quantum q.
2. Calculer la tension délivrée par le transmetteur et le code N obtenu pour un débit de $26{,}5\,\text{m}^3/\text{h}$.

3. L'automate reçoit le code $N = 4\,096$. Dans quel intervalle se trouve la tension d'entrée ? En déduire le débit.

4. Calculer la résolution de la mesure de débit, en L/h. Comparer avec celle qu'offrait l'ancienne carte, équipée d'un CAN 10 bits.

5. Quel nombre minimal de bits faudrait-il pour obtenir une résolution d'au plus 1 L/h ?

II- Échantillonnage

6. Calculer la fréquence d'échantillonnage f_e et la fréquence fondamentale f_1 des pulsations. Déterminer la plus haute fréquence f_{max} du signal.

7. Le critère de Shannon est-il respecté ? Calculer la fréquence à laquelle apparaissent, après échantillonnage, les harmoniques de rang 4 et 5. Expliquer l'oscillation observée par l'exploitant.

8. Proposer deux remèdes.

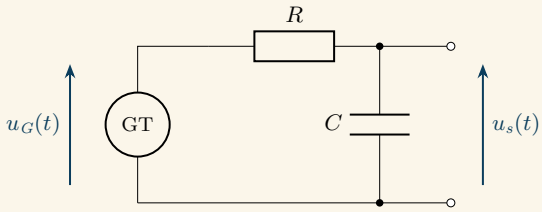
→ corrigé p. 521

Exercice 14.6 – Mesure de vitesse d'une enrouleuse de film ★★★

Une ligne d'extrusion fabrique du film plastique d'emballage, enroulé en bobines par une enrouleuse entraînée par un moteur. La régulation de la tension du film impose de connaître précisément la vitesse du moteur. Celle-ci est aujourd'hui mesurée par une génératrice tachymétrique dont le signal, filtré, est lu par l'automate. Lors de la rénovation de la ligne, le bureau d'études propose de la remplacer par un codeur incrémental. On vous demande de comparer les deux solutions.

Données

- Vitesse nominale du moteur : $n = 1\,500\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
- Génératrice tachymétrique : $k = 6\,\text{V}$ pour $1\,000\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$; sa tension présente une ondulation de fréquence $f_o = \dfrac{12\,n}{60}$ (n en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$), d'amplitude 0,5 V.
- Filtre passe-bas RC placé avant l'entrée de l'automate : $R = 10\,\text{k}\Omega$, $C = 4{,}7\,\mu\text{F}$.
- Codeur incrémental : $N = 1024$ points par tour ; l'automate compte les impulsions pendant $\Delta t = 10\,\text{ms}$.
- Relations utiles : génératrice $E = k\,n$; filtre RC $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC}$, transmittance $T = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}}$, constante de temps $\tau = RC$; codeur $f = \dfrac{N\,n}{60}$ (n en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$), résolution angulaire $\dfrac{360°}{N}$.
- Un capteur **actif** produit lui-même un signal électrique (générateur) ; un capteur **passif** est une impédance qui varie avec la grandeur mesurée et doit être alimenté.



A- Génératrice tachymétrique

1. La génératrice est-elle un capteur actif ou passif ? Calculer sa f.é.m. à $1\,500\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ et à $900\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

2. Calculer la fréquence de l'ondulation à $1\,500\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

3. Calculer la fréquence de coupure f_c du filtre. Montrer que la valeur moyenne de la tension (la mesure de vitesse) n'est pas modifiée par le filtre.

4. Calculer la transmittance T du filtre pour l'ondulation, puis l'amplitude de l'ondulation résiduelle à sa sortie. Exprimer cette amplitude en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

5. Calculer la constante de temps du filtre et son temps de réponse à 5 %. Quel inconvénient le filtre présente-t-il pour une régulation de vitesse ?

B- Codeur incrémental

6. Calculer la fréquence des impulsions du codeur à $1\,500\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

7. Calculer le nombre d'impulsions comptées pendant 10 ms à cette vitesse. En déduire la variation de vitesse qui correspond à une impulsion de plus ou de moins (résolution de la mesure de vitesse).

8. Calculer la résolution angulaire du codeur, puis celle obtenue en exploitant les fronts montants et descendants des deux voies A et B (comptage par 4).

9. Un second codeur identique est entraîné par un rouleau de mesure de 500 mm de périmètre, sur lequel passe le film. Calculer la longueur de film correspondant à une impulsion, puis la longueur enroulée lorsque l'automate a compté 1 000 000 impulsions.

C- Conclusion

10. La carte de comptage de l'automate accepte des impulsions jusqu'à 50 kHz. Vérifier qu'elle convient à la vitesse nominale, puis calculer la vitesse maximale mesurable avec ce codeur.

11. La vitesse doit aussi être transmise à la supervision. Donner deux avantages d'une transmission par bus de terrain plutôt que par une boucle 4–20 mA.

12. Rédiger en quelques lignes une comparaison des deux solutions pour le bureau d'études.

→ corrigé p. 522

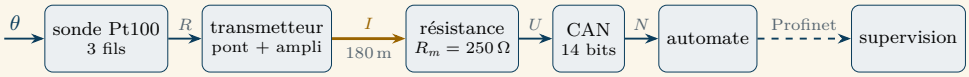
Sujets de type BTS

Chapitre 14

Sujet BTS 14.A – Tunnel de pasteurisation d'une brasserie

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure 15

Une brasserie artisanale en pleine croissance s'équipe d'un tunnel de pasteurisation : les bouteilles remplies avancent sur un convoyeur et sont arrosées d'eau chaude, de façon à porter la bière à 62 °C pendant le temps nécessaire à la destruction des levures. Si la température de la zone de pasteurisation descend sous 60 °C, le lot doit être bloqué. La température de l'eau de cette zone est mesurée par la chaîne ci-dessous ; on vous demande d'en vérifier chaque maillon.



Données

- Sonde Pt100 : $R = R_0\,(1 + a\,\theta)$, $R_0 = 100\,\Omega$, $a = 3{,}85 \times 10^{-3}\,/^\circ\text{C}$; sensibilité $S = \Delta R/\Delta\theta$; placée dans un doigt de gant, sa constante de temps vaut $\tau = 15\,\text{s}$. Une bouteille reste 10 min dans la zone de pasteurisation.
- Transmetteur : la sonde est le bras R_2 d'un pont de Wheatstone ($R_1 = R_3 = R_4 = 100\,\Omega$), alimenté sous $E_p = 0{,}5\,\text{V}$; $U_{mes} = E_p\left(\dfrac{R_2}{R_1+R_2} - \dfrac{R_3}{R_3+R_4}\right)$. Sortie 4–20 mA pour 0 °C à 100 °C ; tension minimale à ses bornes : 12 V.
- Boucle : alimentation 24 V dans l'armoire ; câble de 180 m à deux conducteurs de 36 Ω/km chacun ; résistance de mesure $R_m = 250\,\Omega$.
- Carte d'entrée : CAN 14 bits, pleine échelle $PE = 5\,\text{V}$, appliqué à la tension aux bornes de R_m.
- Tension aux bornes du transmetteur : $U_T = E - (R_m + 2\,r_c)\,I$ (r_c : résistance d'un conducteur).
- Un capteur **actif** produit lui-même un signal électrique (générateur) ; un capteur **passif** est une impédance qui varie avec la grandeur mesurée et doit être alimenté.

Partie A – Architecture

A.1. Préciser le rôle du capteur, du transmetteur et de la carte d'entrée de l'automate.

A.2. Pour chacune des liaisons transmettant R, I, N et l'information de supervision, indiquer si le signal est analogique ou numérique.

Partie B – Capteur

B.1. La sonde Pt100 est-elle un capteur actif ou passif ? Calculer sa résistance à 62 °C et sa sensibilité.

B.2. Calculer le temps de réponse à 5 % de la sonde. Est-il compatible avec la durée de passage d'une bouteille ?

B.3. Si la sonde était raccordée en 2 fils, la résistance de la ligne qui la relie au transmetteur (1,2 Ω aller et retour) s'ajouterait à la sienne. Calculer l'erreur de température correspondante. Pourquoi le montage 3 fils, qui compense cette résistance, est-il indispensable ici ?

Partie C – Pont de Wheatstone

C.1. Montrer que le pont est équilibré à 0 °C.

C.2. Calculer la tension U_{mes} à 50 °C, 62 °C et 100 °C.

C.3. La tension U_{mes} est-elle proportionnelle à la température ? Pourquoi l'approximation $U_{mes} \approx E_p \dfrac{\Delta R}{4R_0}$ ne convient-elle pas ici ? Quelle fonction le transmetteur doit-il donc assurer, en plus de l'amplification ?

Partie D – Boucle 4–20 mA

D.1. Calculer le courant I et la tension U aux bornes de R_m lorsque l'eau est à 62 °C.

D.2. Calculer le seuil de courant correspondant à la température minimale de 60 °C.

D.3. Dessiner le schéma de la boucle. Calculer la tension aux bornes du transmetteur pour le courant maximal de 20,5 mA et conclure. Calculer la longueur de câble maximale possible.

D.4. Un matin, la supervision affiche un courant nul. Peut-on en conclure que l'eau est à −25 °C ? Justifier l'intérêt du « zéro vivant ».

Partie E – Numérisation

E.1. Calculer le quantum du CAN, puis le code N obtenu lorsque l'eau est à 62 °C.

E.2. À quelle variation de courant, puis de température, correspond un quantum ? Conclure.

E.3. L'automate reçoit le code $N = 12\,000$. Remonter la chaîne jusqu'à la température de l'eau.

→ corrigé p. 523

Sujet BTS 14.B – Surveillance d'une éolienne terrestre

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Un exploitant de parc éolien renouvelle le système de surveillance de ses machines. Dans chaque nacelle, à 80 m de hauteur, un module d'acquisition reçoit les signaux

de plusieurs capteurs : vitesse du vent, vitesse du rotor, température du roulement principal, vibrations du multiplicateur. Les mesures sont transmises au pied de la tour, puis au centre de contrôle, par un réseau Profinet sur fibre optique. Le technicien doit valider les réglages proposés par l'intégrateur.

Données

- Anémomètre à coupelles : il délivre des impulsions de fréquence $f_a = 1{,}25\,v$ (f_a en Hz, v en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). Le module compte les impulsions pendant une fenêtre de durée Δt.
- Rotor : une roue phonique de 36 dents est fixée sur l'arbre lent ; un détecteur inductif délivre une impulsion au passage de chaque dent. Vitesse nominale du rotor : $16\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$. Fréquence des impulsions : $f = N\,n/60$ (N : nombre de dents ; n en $\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$).
- Roulement principal : thermocouple de type K, $E \approx s_{TC}\,(\theta_c - \theta_f)$ avec $s_{TC} = 41\,\mu\mathrm{V/°C}$; la soudure froide est le bornier du module, dont la température θ_f est mesurée par une sonde interne. Alarme à 90 °C.
- Multiplicateur : accéléromètre piézoélectrique de sensibilité 100 mV/g (g : accélération de la pesanteur) ; le spectre utile des vibrations s'étend jusqu'à $f_{max} = 4\,\mathrm{kHz}$.
- Voie vibratoire du module : filtre passe-bas RC ($R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 22\,\mathrm{nF}$), CAN 16 bits de pleine échelle 10 V (−5 V à 5 V), fréquence d'échantillonnage proposée $f_e = 6\,\mathrm{kHz}$.
- Filtre RC : $f_c = 1/(2\pi RC)$ et transmittance $T = 1/\sqrt{1 + (f/f_c)^2}$.
- Un capteur **actif** produit lui-même un signal électrique (générateur) ; un capteur **passif** est une impédance qui varie avec la grandeur mesurée et doit être alimenté.

Partie A – Vitesse du vent

A.1. Le module compte 15 impulsions en 1 s. Calculer la vitesse du vent.

A.2. Quelle variation de vitesse du vent correspond à une impulsion de plus ou de moins avec une fenêtre de 1 s ? Même question avec une fenêtre de 10 s. Quel est l'inconvénient d'une fenêtre longue ?

Partie B – Vitesse du rotor

B.1. Le détecteur inductif délivre-t-il un signal analogique ou un signal tout ou rien ? Calculer la fréquence des impulsions à la vitesse nominale.

B.2. Pour obtenir une mesure rapide, le module mesure la durée T entre deux dents successives. Il relève $T = 125\,\mathrm{ms}$: calculer la vitesse du rotor.

Partie C – Température du roulement

C.1. Le thermocouple est-il un capteur actif ou passif ? Le module mesure $E = 2{,}05\,\mathrm{mV}$ alors que $\theta_f = 35\,°\mathrm{C}$: calculer la température du roulement.

C.2. Calculer la f.é.m. correspondant au seuil d'alarme lorsque $\theta_f = 35\,°\text{C}$. En hiver, la nacelle descend à $\theta_f = 5\,°\text{C}$: quelle température du roulement correspondrait à la même f.é.m. ? Conclure sur la nécessité de la compensation de soudure froide.

Partie D – Vibrations du multiplicateur

D.1. Calculer la tension délivrée par l'accéléromètre pour une vibration d'amplitude 0,8 g.

D.2. La fréquence d'échantillonnage proposée respecte-t-elle le critère de Shannon ? À quelle fréquence apparaîtrait, après échantillonnage, une raie de 4 kHz ? Quelle conséquence pour le diagnostic ?

D.3. Les analyseurs de vibrations utilisent souvent $f_e = 2{,}56\,f_{max}$. Calculer cette fréquence et vérifier le critère de Shannon.

D.4. Calculer la fréquence de coupure du filtre RC et sa transmittance à 4 kHz, puis à 10 kHz. Ce filtre suffit-il à éliminer une composante parasite de 10 kHz, qui se replierait avec $f_e = 10{,}24\,\text{kHz}$? Que proposer ?

D.5. Calculer le quantum du CAN et la plus petite variation d'accélération mesurable.

Partie E – Transmission

E.1. Donner deux avantages d'une transmission numérique par bus de terrain sur fibre optique, par rapport à des boucles 4–20 mA descendant chacune les 80 m de la tour.

→ corrigé p. 525

Corrigés

Capteurs et conditionnement

✓ Corrigé de l'exercice 14.1 – Sonde Pt100 d'une chambre froide

1. La Pt100 est un capteur **passif** : c'est une résistance qui varie avec la température. Elle ne produit aucun signal seule ; le régulateur doit y faire circuler un courant pour mesurer sa résistance.

2. $R(-25\,°\text{C}) = 100 \times (1 + 3{,}85 \times 10^{-3} \times (-25)) = 100 \times (1 - 0{,}096\,25)$
soit $\boxed{R \approx 90{,}38\,\Omega}$

$R(0\,°\text{C}) = R_0$ soit $\boxed{R = 100\,\Omega}$

3. $S = \Delta R/\Delta\theta = R_0\, a = 100 \times 3{,}85 \times 10^{-3}$ soit $\boxed{S = 0{,}385\,\Omega/°\text{C}}$

S ne dépend pas de θ : la caractéristique $R = f(\theta)$ est une droite, la sonde est **linéaire**. Chaque degré correspond à la même variation de résistance, sur toute l'étendue de mesure.

4. Résistance d'un conducteur : $r = \rho\, L/s = 1{,}7\times10^{-8}\times25/0{,}5\times10^{-6}$ soit $\boxed{r = 0{,}85\,\Omega}$

En 2 fils, les deux conducteurs sont en série avec la sonde :

$$R_{mes} = R + 2\,r = 90{,}375 + 1{,}70 \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{mes} \approx 92{,}08\,\Omega}$$

5. Le régulateur inverse la relation de la sonde :

$$\theta_{aff} = \frac{R_{mes}/R_0 - 1}{a} = \frac{0{,}920\,75 - 1}{3{,}85 \times 10^{-3}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta_{aff} \approx -20{,}6\,°\text{C}}$$

Erreur : $\theta_{aff} - \theta = -20{,}6 - (-25) \approx 4{,}4\,°\text{C}$. Autre calcul : $2r/S = 1{,}70/0{,}385 \approx 4{,}4\,°\text{C}$. Le régulateur croit la chambre plus chaude qu'elle n'est : il fait travailler le groupe frigorifique pour rien.

6.
- ▷ Raccorder la sonde en **3 fils** (le régulateur mesure la résistance d'un conducteur et la retranche) ou en **4 fils** (le courant et la mesure de tension empruntent des conducteurs différents) ;
- ▷ installer un **transmetteur 4–20 mA en tête de sonde** : le courant transmis ne dépend plus de la résistance du câble.

(Augmenter la section du câble réduit l'erreur sans la supprimer.)

✓ Corrigé de l'exercice 14.2 – Thermocouple d'un four de trempe

1. Le thermocouple est un capteur **actif** : il produit lui-même une f.é.m. (effet Seebeck). La Pt100 disponible est limitée à 600 °C par sa notice : elle ne convient pas à 850 °C ; le thermocouple convient (type K jusqu'à 1 200 °C).

2. $E = s_{TC}\,(\theta_c - \theta_f) = 41 \times 10^{-6} \times (850 - 30)$ soit $\boxed{E \approx 33{,}6\,\text{mV}}$

3. Sans compensation, le module calcule

$$\theta_{aff} = \frac{E}{s_{TC}} = \frac{33{,}62 \times 10^{-3}}{41 \times 10^{-6}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta_{aff} = 820\,°\text{C}}$$

L'erreur vaut $820 - 850 = -30\,°\text{C}$: exactement l'opposé de la température de la soudure froide. C'est l'écart constaté par le contrôle. Si l'on remettait le four en production, le régulateur, qui le croit trop froid, le chaufferait jusqu'à 880 °C pour afficher 850 °C : les pièces seraient surchauffées.

Compensation de soudure froide : un capteur (Pt100, CTN) mesure la température θ_f du bornier ; le module ajoute $s_{TC}\theta_f$ à la f.é.m. reçue et obtient $s_{TC}\theta_c$, comme si la soudure froide était à 0 °C.

4. À 1 200 °C : $u_e = 41 \times 10^{-6} \times 1200 = 49{,}2\,\text{mV}$, d'où

$$G = \frac{10}{0{,}049\,2} \quad \text{soit} \quad \boxed{G \approx 203}$$

$$R_2 = (G-1)\,R_1 = 202{,}25 \times 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{R_2 \approx 202\,\text{k}\Omega}$$

5. $u_s = G\,s_{TC}\,\theta_c = 203 \times 41 \times 10^{-6} \times 850$ soit $\boxed{u_s \approx 7{,}07\,\text{V}}$

6. $t_{5\,\%} \approx 3\,\tau = 3 \times 20$ soit $\boxed{t_{5\,\%} \approx 60\,\text{s}}$

Une minute de retard est négligeable devant un cycle de chauffe de deux heures : la gaine, indispensable pour protéger le thermocouple de l'atmosphère du four, ne gêne pas la mesure.

Méthode Un thermocouple mesure toujours un écart de température. Une erreur égale à la température ambiante de l'armoire signe presque toujours une compensation de soudure froide absente ou mal câblée (câble de compensation inversé, bornier à une autre température que la sonde interne).

✓ Corrigé de l'exercice 14.3 – Pesage d'une trémie de dosage

I- La cellule de charge

1. À la charge nominale : $U_n = S_n\,E = 2 \times 10^{-3} \times 10$ soit $\boxed{U_n = 20\,\text{mV}}$

En pont complet, $U_{mes} = E\,\Delta R/R_0$, d'où $\Delta R/R_0 = 0{,}020/10 = 2 \times 10^{-3}$ (soit $\Delta R = 0{,}7\,\Omega$), puis

$$\varepsilon = \frac{\Delta R/R_0}{K} = \frac{2 \times 10^{-3}}{2{,}1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\varepsilon \approx 952 \times 10^{-6} = 952\,\mu\text{m/m}}$$

2. En quart de pont : $U_{mes} \approx E\,\Delta R/(4R_0) = 10 \times 2 \times 10^{-3}/4 = 5\,\text{mV}$ (formule exacte : 4,995 mV). Le pont complet donne un signal **quatre fois plus grand**, parfaitement linéaire, et compense les effets de la température sur les jauges : c'est le montage de toutes les cellules de charge.

II- La balance

3. Portée : $3 \times 500 = 1\,500\,\text{kg}$ pour 20 mV :

$$S = \frac{20 \times 10^{-3}}{1500} \quad \text{soit} \quad \boxed{S \approx 13{,}3\,\mu\text{V/kg}}$$

4. La cellule porte aussi la trémie : $m = 600 + 240 = 840\,\text{kg}$.

$$U_{mes} = S\,m = 13{,}33 \times 10^{-6} \times 840 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{mes} = 11{,}2\,\text{mV}}$$

5. Droite idéale : $U_{id} = (20/1500)\,m$.

m (kg)	0	300	600	900	1200	1500
U_{id} (mV)	0,00	4,00	8,00	12,00	16,00	20,00
écart (mV)	0	0,02	0,05	0,06	0,03	0

$$e_L = \frac{0{,}06}{20} \times 100\,\% \quad \text{soit} \quad \boxed{e_L = 0{,}3\,\%}$$

6. $G = 10/0{,}020$ soit $\boxed{G = 500}$

Le CAN a $2^{16} = 65\,536$ codes pour 1 500 kg : $\Delta m = 1500/65\,536$ soit $\boxed{\Delta m \approx 23\,\text{g}}$

La résolution est largement suffisante. Mais l'écart de linéarité vaut $0{,}003 \times 1500 = 4{,}5$ kg : une pesée absolue peut être fausse de plusieurs kilogrammes. Pour doser au kilogramme près, l'automate doit corriger la mesure avec le tableau d'étalonnage (linéarisation par segments) ; on peut aussi peser l'additif par différence (tare juste avant l'ajout), l'erreur de linéarité variant très peu sur quelques kilogrammes.

Transmission et numérisation

✓ Corrigé de l'exercice 14.4 – Pression d'un réseau d'air comprimé

1. Début d'échelle : $\boxed{I = 4\,\text{mA}}$ à 0 bar ; fin d'échelle : $\boxed{I = 20\,\text{mA}}$ à 16 bar.

2. $I = 4 + 16 \times (7-0)/(16-0)$ soit $\boxed{I = 11\,\text{mA}}$;

$U = R_m I = 250 \times 11 \times 10^{-3}$ soit $\boxed{U = 2{,}75\,\text{V}}$

3. $I = U/R_m = 3{,}80/250 = 15{,}2$ mA, puis

$$p = p_{min} + \frac{I-4}{16}(p_{max} - p_{min}) = \frac{15{,}2-4}{16} \times 16 \quad \text{soit} \quad \boxed{p = 11{,}2\,\text{bar}}$$

4. $I_{seuil} = 4 + 16 \times 5{,}5/16$ soit $\boxed{I_{seuil} = 9{,}5\,\text{mA}}$: le second compresseur démarre si $I < 9{,}5$ mA.

5.
- ▷ $I = 0$ mA : ce n'est pas une pression nulle (qui donnerait 4 mA) : la boucle est **coupée** (fil arraché, borne desserrée, alimentation absente). C'est l'intérêt du zéro vivant.
- ▷ $I = 3{,}2$ mA : le calcul donnerait $p = -0{,}8$ bar, ce qui n'a pas de sens. Le courant est sous 3,8 mA : la mesure est **en défaut** (transmetteur défaillant ou signalant lui-même une panne). L'automate doit déclencher une alarme et ne pas utiliser cette valeur pour piloter les compresseurs.

6. Résistance du câble aller et retour : $2\,r_c = 2 \times 0{,}120 \times 26 = 6{,}24\,\Omega$. Loi des mailles dans la boucle :

$U_T = E - (R_m + 2\,r_c)\,I = 24 - (250 + 6{,}24) \times 0{,}020\,5$ soit $\boxed{U_T \approx 18{,}7\,\text{V}} \geq 10{,}5\,\text{V}$

Le transmetteur est correctement alimenté. Longueur maximale :

$$R_m + 2\,r_c \leq \frac{24 - 10{,}5}{0{,}020\,5} \approx 659\,\Omega \;\Rightarrow\; 2\,r_c \leq 409\,\Omega$$

$$L \leq \frac{409}{2 \times 26} \quad \text{soit} \quad \boxed{L_{max} \approx 7{,}9\,\text{km}}$$

Une boucle 4–20 mA supporte sans difficulté les distances d'une usine.

✓ Corrigé de l'exercice 14.5 – Débit d'une station de chloration

I- Quantification

1. $2^{14} = \boxed{16\,384 \text{ codes}}$, de 0 à 16 383.

$q = PE/2^n = 10/16\,384$ soit $\boxed{q \approx 0{,}610\,\text{mV}}$

2. $U = 26{,}5/40 \times 10 = 6{,}625\,\text{V}$;

$U/q = 6{,}625/6{,}103\,5 \times 10^{-4} = 10\,854{,}4$ soit $\boxed{N = 10\,854}$

3. $N\,q \leq U < (N+1)\,q$:

$4096 \times 6{,}103\,5 \times 10^{-4} \leq U < 4097 \times 6{,}103\,5 \times 10^{-4}$ soit $\boxed{2{,}500\,0\,\text{V} \leq U < 2{,}500\,6\,\text{V}}$

Débit : $Q = 2{,}5/10 \times 40$ soit $\boxed{Q = 10{,}0\,\text{m}^3/\text{h}}$ (à un quantum près).

4. $\Delta Q = 40/16\,384 \approx 2{,}44 \times 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{h}$ soit $\boxed{\Delta Q \approx 2{,}4\,\text{L/h}}$

Avec 10 bits : $40/1024 \approx 0{,}039\,\text{m}^3/\text{h} = 39\,\text{L/h}$, seize fois moins fin ($2^{14-10} = 16$).

5. Il faut $40/2^n \leq 1 \times 10^{-3}$, soit $2^n \geq 40\,000$. Or $2^{15} = 32\,768$ et $2^{16} = 65\,536$: $\boxed{n = 16 \text{ bits}}$ (résolution 0,61 L/h).

II- Échantillonnage

6. $f_e = 1/T_e = 1/0{,}050$ soit $\boxed{f_e = 20\,\text{Hz}}$; $f_1 = 180/60$ soit $\boxed{f_1 = 3\,\text{Hz}}$

Les harmoniques sont à 3, 6, 9, 12 et 15 Hz : $\boxed{f_{max} = 5\,f_1 = 15\,\text{Hz}}$

7. Shannon exige $f_e > 2\,f_{max} = 30\,\text{Hz}$: avec 20 Hz, le critère **n'est pas respecté**. Les composantes situées entre $f_e/2 = 10\,\text{Hz}$ et $f_e = 20\,\text{Hz}$ sont repliées :

$$f_{r4} = 20 - 12 = \boxed{8\,\text{Hz}} \qquad f_{r5} = 20 - 15 = \boxed{5\,\text{Hz}}$$

L'automate « voit » des oscillations à 5 Hz et 8 Hz qui n'existent pas dans l'écoulement et ne sont pas des multiples de 3 Hz : ce sont les fluctuations observées par l'exploitant.

8. ▷ Placer avant le CAN un **filtre passe-bas anti-repliement** : seul le débit moyen intéresse le calcul du chlore, on peut donc couper bien en dessous de 3 Hz (par exemple $f_c \approx 0{,}5\,\text{Hz}$), ce qui supprime aussi les pulsations.

▷ Augmenter la fréquence d'échantillonnage au-delà de 30 Hz (par exemple $T_e = 10\,\text{ms}$, soit 100 Hz) puis calculer la moyenne sur plusieurs coups de pompe dans l'automate.

✓ Corrigé de l'exercice 14.6 – Mesure de vitesse d'une enrouleuse de film

A- Génératrice tachymétrique

1. La génératrice produit elle-même sa f.é.m. : c'est un capteur **actif**. $k = 6/1000 = 6 \times 10^{-3}\,\text{V}/(\text{tr}\cdot\text{min}^{-1})$.

$$E_{1500} = 6\times10^{-3}\times1500 = \boxed{9\,\text{V}} \qquad E_{900} = 6\times10^{-3}\times900 = \boxed{5{,}4\,\text{V}}$$

2. $f_o = 12\times1500/60$ soit $\boxed{f_o = 300\,\text{Hz}}$

3. $f_c = 1/(2\pi RC) = 1/(2\pi\times10\times10^3\times4{,}7\times10^{-6})$ soit $\boxed{f_c \approx 3{,}39\,\text{Hz}}$

La mesure de vitesse est la valeur moyenne (composante continue) de $u_G(t)$. Pour $f = 0$, $T = 1/\sqrt{1+0} = 1$ (en continu, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et aucun courant ne traverse R) : la valeur moyenne passe intégralement.

4. $T = 1/\sqrt{1+(300/3{,}386)^2}$ soit $\boxed{T \approx 0{,}011\,3}$ $(T \approx f_c/f)$.

Amplitude résiduelle : $0{,}5\times0{,}011\,3 \approx 5{,}6\,\text{mV}$,

soit $5{,}64\times10^{-3}/6\times10^{-3} \approx \boxed{0{,}94\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$: l'ondulation est devenue négligeable.

5. $\tau = RC = 10\times10^3\times4{,}7\times10^{-6} = 47\,\text{ms}$; $t_{5\,\%} \approx 3\,\tau$ soit $\boxed{t_{5\,\%} \approx 0{,}14\,\text{s}}$

Toute variation de vitesse n'est vue par l'automate qu'avec ce retard : la régulation réagit moins vite et peut devenir instable si on la règle trop « nerveuse ». Plus on filtre, plus ce retard augmente.

B- Codeur incrémental

6. $f = N\,n/60 = 1024\times1500/60$ soit $\boxed{f = 25{,}6\,\text{kHz}}$

7. En 10 ms : $25\,600\times0{,}010 = \boxed{256\text{ impulsions}}$.

Une impulsion pendant Δt correspond à $1/(N\,\Delta t)$ tour par seconde, soit

$$\Delta n = \frac{60}{N\,\Delta t} = \frac{60}{1024\times0{,}010} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta n \approx 5{,}9\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$$

(0,4 % de la vitesse nominale). Allonger Δt affine la mesure mais la ralentit.

8. $360°/1024 \approx \boxed{0{,}352°}$; comptage par 4 : $360°/(4\times1024) \approx \boxed{0{,}088°}$

9. Longueur par impulsion : $500/1024 \approx \boxed{0{,}49\,\text{mm}}$; pour 1 000 000 impulsions :

$$1\times10^6\times0{,}488 = 488\,000\,\text{mm} \quad \text{soit} \quad \boxed{L \approx 488\,\text{m}}$$

C- Conclusion

10. 25,6 kHz < 50 kHz : la carte convient. Vitesse maximale :

$$n_{max} = \frac{60\, f_{max}}{N} = \frac{60 \times 50\,000}{1024} \quad \text{soit} \quad \boxed{n_{max} \approx 2\,930\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}},$$

près du double de la vitesse nominale.

11. Le bus transmet une valeur numérique, insensible aux parasites électromagnétiques des variateurs ; un seul câble transporte plusieurs mesures (vitesse, longueur enroulée, diagnostics du codeur).

12. La génératrice donne une mesure analogique continue, dont l'ondulation doit être filtrée au prix d'un retard de 0,14 s ; ses balais s'usent et sa tension est sensible aux parasites. Le codeur délivre un signal numérique, insensible aux perturbations et sans usure ; il fournit en plus la position et la longueur de film enroulée. Sa résolution en vitesse ($5{,}9\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$ en 10 ms) suffit pour la régulation, et peut être améliorée par la mesure de période ou un codeur de plus grande résolution. Le codeur est la solution à retenir.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 14.A – Tunnel de pasteurisation d'une brasserie

Partie A – Architecture

A.1. Le **capteur** (Pt100) transforme la température de l'eau en une résistance. Le **transmetteur** alimente le capteur, conditionne son signal (pont, amplification, linéarisation) et le convertit en courant normalisé 4–20 mA transmissible à distance. La **carte d'entrée** convertit ce courant en tension (R_m) puis en code numérique N (CAN), exploitable par l'automate.

A.2. R et I : grandeurs **analogiques** (elles varient continûment, l'information est dans leur valeur). N et la liaison Profinet : informations **numériques** (codes binaires, trames de bits).

Partie B – Capteur

B.1. Capteur **passif** (résistance variable, à alimenter).

$$R = 100 \times (1 + 3{,}85 \times 10^{-3} \times 62) \quad \text{soit} \quad \boxed{R \approx 123{,}87\,\Omega}$$

$$S = R_0\, a = 0{,}385\,\Omega/^\circ\text{C}$$

B.2. $t_{5\,\%} \approx 3\,\tau = 3 \times 15$ soit $\boxed{t_{5\,\%} \approx 45\,\text{s}}$: petit devant les 10 min de passage d'une bouteille ; une baisse de température durable est détectée en moins d'une minute. Compatible.

B.3. Le transmetteur verrait $R + 1{,}2\,\Omega$; chaque degré correspondant à $R_0\,a = 0{,}385\,\Omega$, l'erreur vaut 1,2/0,385 soit $\boxed{\Delta\theta \approx 3{,}1\,^\circ\text{C}}$

La température affichée serait trop élevée : une eau à 58 °C serait vue à 61 °C et le lot ne serait pas bloqué. Le montage 3 fils, qui compense la résistance de la ligne, est indispensable pour la sécurité alimentaire.

Partie C – Pont de Wheatstone

C.1. À 0 °C, $R_2 = R_0 = 100\,\Omega$: $R_1\,R_3 = 100 \times 100 = R_2\,R_4$, la condition d'équilibre est vérifiée ($U_{mes} = 0$).

C.2. Avec $R_1 = R_3 = R_4 = R_0$: $U_{mes} = E_p\,(R/(R + R_0) - 1/2)$.

θ (°C)	50	62	100
R (Ω)	119,25	123,87	138,50
$R/(R + R_0)$	0,543 90	0,553 31	0,580 71
U_{mes} (mV)	21,95	26,66	40,36

C.3. Si U_{mes} était proportionnelle à θ, on aurait $U_{100} = 2\,U_{50} = 43{,}9\,\text{mV}$; or $U_{100}/U_{50} \approx 1{,}84$: la tension **n'est pas proportionnelle** à la température. L'approximation suppose $\Delta R \ll R_0$, alors qu'ici $\Delta R/R_0$ atteint 0,385 (elle donnerait 48,1 mV à 100 °C, 19 % de trop). Le transmetteur doit donc **linéariser** le signal pour que son courant de sortie soit proportionnel à θ.

Partie D – Boucle 4–20 mA

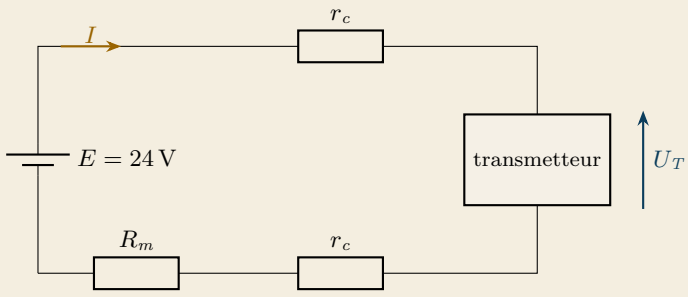
D.1. $I = 4 + 16 \times 62/100$ soit $\boxed{I = 13{,}92\,\text{mA}}$;

$U = 250 \times 13{,}92 \times 10^{-3}$ soit $\boxed{U = 3{,}48\,\text{V}}$

D.2. $I_{seuil} = 4 + 16 \times 60/100$ soit $\boxed{I_{seuil} = 13{,}6\,\text{mA}}$:

le lot est bloqué si $I < 13{,}6\,\text{mA}$.

D.3. Alimentation, résistance de mesure, conducteurs du câble et transmetteur sont en série :



Résistance d'un conducteur : $r_c = 0{,}180 \times 36 = 6{,}48\,\Omega$, soit $2\,r_c = 12{,}96\,\Omega$. Loi des mailles :

$U_T = E - (R_m + 2\,r_c)\,I = 24 - (250 + 12{,}96) \times 0{,}020\,5$ soit $\boxed{U_T \approx 18{,}6\,\text{V}} \geq 12\,\text{V}$

Le transmetteur reste correctement alimenté. Longueur maximale :

$$R_m + 2\,r_c \leq \frac{24 - 12}{0{,}020\,5} \approx 585\,\Omega \;\Rightarrow\; r_c \leq 168\,\Omega$$

$$L \leq \frac{168}{36} \quad \text{soit} \quad \boxed{L_{max} \approx 4{,}7\,\text{km}}$$

D.4. Non : $-25\,°\text{C}$ est hors de l'étendue de mesure, et le début d'échelle ($0\,°\text{C}$) donnerait $4\,\text{mA}$. Grâce au **zéro vivant**, un courant nul signale sans ambiguïté une **coupure** de la boucle (câble, alimentation, transmetteur) : l'automate déclenche une alarme et bloque la production au lieu d'utiliser une mesure absurde.

Partie E – Numérisation

E.1. $q = 5/2^{14} = 5/16\,384$ soit $\boxed{q \approx 0{,}305\,\text{mV}}$

$$\frac{U}{q} = \frac{3{,}48}{3{,}051\,8 \times 10^{-4}} \approx 11\,403{,}3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 11\,403}$$

E.2. $\Delta I = q/R_m = 3{,}051\,8 \times 10^{-4}/250$ soit $\boxed{\Delta I \approx 1{,}22\,\mu\text{A}}$; $16\,\text{mA}$ représentant $100\,°\text{C}$:

$$\Delta\theta = \frac{1{,}22 \times 10^{-3}}{16} \times 100 \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta\theta \approx 0{,}008\,°\text{C}}$$

La numérisation est très fine : la précision de la mesure sera limitée par la sonde et le transmetteur (quelques dixièmes de degré), pas par le CAN.

E.3. $U = N\,q = 12\,000 \times 3{,}051\,8 \times 10^{-4} \approx 3{,}662\,\text{V}$; $I = U/R_m \approx 14{,}65\,\text{mA}$;

$$\theta = \frac{I - 4}{16} \times 100 = \frac{14{,}648 - 4}{16} \times 100 \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta \approx 66{,}6\,°\text{C}}$$

✓ Corrigé du sujet BTS 14.B – Surveillance d'une éolienne terrestre

Partie A – Vitesse du vent

A.1. $f_a = 15\,\text{Hz}$, d'où $v = f_a/1{,}25 = 15/1{,}25$ soit $\boxed{v = 12\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ ($43\,\text{km/h}$).

A.2. Une impulsion en $1\,\text{s}$ correspond à $1\,\text{Hz}$, soit $1/1{,}25 = \boxed{0{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$; en $10\,\text{s}$, à $0{,}1\,\text{Hz}$, soit $\boxed{0{,}08\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Une fenêtre longue donne une mesure plus fine mais c'est une **moyenne** sur $10\,\text{s}$: une rafale brève est lissée et détectée avec retard, alors que la commande de l'orientation des pales doit y réagir.

Partie B – Vitesse du rotor

B.1. Le détecteur inductif délivre un signal **tout ou rien** (présence ou absence d'une dent). $f = N\,n/60 = 36 \times 16/60$ soit $\boxed{f = 9{,}6\,\text{Hz}}$

B.2. Pendant T, le rotor tourne de $1/36$ de tour :

$$n = \frac{60}{36\,T} = \frac{60}{36 \times 0{,}125} \quad \text{soit} \quad \boxed{n \approx 13{,}3\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}}$$

Une mesure est disponible à chaque dent (toutes les 0,1 s environ), alors qu'un comptage sur 1 s ne donnerait que 9 ou 10 impulsions, soit une résolution grossière de $1{,}7\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

Partie C – Température du roulement

C.1. Capteur **actif** (il produit une f.é.m.). $E = s_{TC}\,(\theta_c - \theta_f)$, d'où

$$\theta_c = \theta_f + \frac{E}{s_{TC}} = 35 + \frac{2{,}05 \times 10^{-3}}{41 \times 10^{-6}} = 35 + 50 \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta_c = 85\,^\circ\text{C}}$$

C.2. $E_{alarme} = 41 \times 10^{-6} \times (90 - 35)$ soit $\boxed{E_{alarme} \approx 2{,}26\,\text{mV}}$

Avec $\theta_f = 5\,^\circ\text{C}$, la même f.é.m. correspond à $\theta_c = 5 + 2{,}255 \times 10^{-3}/41 \times 10^{-6} = 5 + 55 = \boxed{60\,^\circ\text{C}}$.

Un seuil fixé sur la f.é.m. déclencherait des alarmes intempestives en hiver (à 60 °C) et trop tardives en été. Le thermocouple ne mesure qu'un écart : la compensation de soudure froide, qui ajoute $s_{TC}\,\theta_f$ mesuré en permanence, est indispensable.

Partie D – Vibrations du multiplicateur

D.1. $u = 0{,}100 \times 0{,}8$ soit $\boxed{u = 80\,\text{mV}}$ (amplitude), produite par le capteur piézoélectrique, actif.

D.2. Il faut $f_e > 2\,f_{max} = 8\,\text{kHz}$: avec 6 kHz, le critère **n'est pas respecté**. La raie de 4 kHz, comprise entre $f_e/2 = 3\,\text{kHz}$ et f_e, apparaît à

$$f_r = f_e - f = 6 - 4 \quad \text{soit} \quad \boxed{f_r = 2\,\text{kHz}}$$

Le spectre montre une raie fictive à 2 kHz et pas la vraie raie d'engrènement : le diagnostic est faux.

D.3. $f_e = 2{,}56 \times 4$ soit $\boxed{f_e = 10{,}24\,\text{kHz}} > 8\,\text{kHz}$: critère respecté, avec une marge pour le filtre anti-repliement.

D.4. $f_c = 1/(2\pi \times 1 \times 10^3 \times 22 \times 10^{-9})$ soit $\boxed{f_c \approx 7{,}23\,\text{kHz}}$

$$T_{4\,\text{kHz}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4/7{,}23)^2}} \approx \boxed{0{,}875} \qquad T_{10\,\text{kHz}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (10/7{,}23)^2}} \approx \boxed{0{,}586}$$

Le signal utile est un peu atténué (12,5 %), et la composante parasite de 10 kHz n'est réduite que de 41 % : elle se replierait à $10{,}24 - 10 = 0{,}24$ kHz avec une amplitude encore importante. Un filtre du premier ordre est trop peu sélectif : il faut un filtre anti-repliement d'**ordre élevé** (atténuation rapide au-delà de f_{max}) ou une fréquence d'échantillonnage plus haute.

D.5. $q = 10/2^{16} = 10/65\,536$ soit $\boxed{q \approx 0{,}153\,\text{mV}}$;

avec 100 mV/g : $\Delta a = 0{,}153/100 \approx 1{,}5 \times 10^{-3}\,g$, soit $\boxed{\Delta a \approx 1{,}5 \text{ milli-}g}$

Partie E – Transmission

E.1.
- ▷ Un seul support transporte **toutes les mesures** et leurs diagnostics, au lieu d'un câble par capteur.
- ▷ Le signal numérique sur fibre est **insensible aux perturbations électromagnétiques** et aux surtensions dues à la foudre.

Bilan du chapitre : je sais…

- ☐ distinguer capteur actif et capteur passif, signal analogique et numérique ; — ex. 14.1, 14.6, sujet A
- ☐ décrire une chaîne de mesure et exploiter le temps de réponse d'un capteur ; — ex. 14.1, 14.2, sujet A
- ☐ exploiter une sonde Pt100 et un thermocouple ; — ex. 14.1, 14.2, sujets A, B
- ☐ exploiter un pont de jauges et une caractéristique d'étalonnage ; — ex. 14.3, sujet A
- ☐ exploiter une boucle 4–20 mA ; — ex. 14.4, sujet A
- ☐ calculer le quantum et le code d'un CAN, appliquer le critère de Shannon ; — ex. 14.5, sujets A, B
- ☐ choisir un filtre passe-bas (fréquence de coupure, transmittance) ; — ex. 14.5, 14.6, sujet B
- ☐ mesurer une vitesse avec une génératrice tachymétrique ou un codeur. — ex. 14.6, sujet B

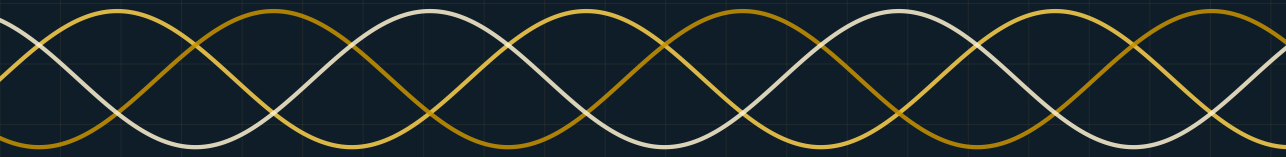
Notes

CHAPITRE

15

Systèmes linéaires et fonction de transfert

Équation différentielle, 1er et 2e ordre, réponse indicielle, filtres



Dans ce chapitre

- Systèmes linéaires et équation différentielle
- Notation complexe et fonction de transfert
- Fonction de transfert $T(p)$
- Systèmes du 1er ordre : τ, temps de réponse
- Systèmes du 2e ordre : ω_0, m, dépassement
- Filtres (pour aller plus loin : Bode, Laplace)

Objectifs

- ✓ Mettre un système en équation et écrire sa fonction de transfert
- ✓ Prévoir et exploiter une réponse indicielle (1er et 2e ordre)
- ✓ Identifier un système à partir d'un relevé
- ✓ Reconnaître un filtre passe-bas et exploiter ses formules

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

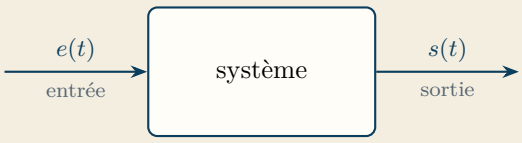
Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 15

Cours — Chapitre 15

15.1 Systèmes linéaires

Un moteur qui démarre, un four qui chauffe, un filtre qui débarrasse une mesure de ses parasites : dans tous ces cas, une grandeur d'**entrée** $e(t)$ (tension appliquée, puissance de chauffe, consigne…) agit sur une grandeur de **sortie** $s(t)$ (vitesse, température, tension filtrée…), et la sortie ne suit pas l'entrée instantanément. Ce chapitre donne les outils communs pour prévoir ce comportement, quelle que soit la nature physique du système.



représentation temporelle

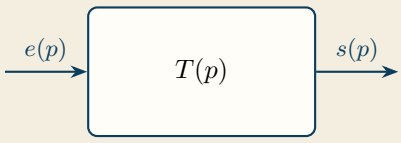


schéma-bloc : fonction de transfert

D

Système linéaire Un système est **linéaire** lorsque la relation entre son entrée $e(t)$ et sa sortie $s(t)$ est une **équation différentielle linéaire à coefficients constants** : ses caractéristiques (R, L, C…) ne dépendent ni du temps ni des signaux appliqués. On caractérise alors le système par sa **fonction de transfert**.

Les circuits formés de résistances, bobines et condensateurs sont linéaires. En revanche, une saturation (amplificateur qui plafonne à sa tension d'alimentation, limitation de courant d'un variateur), un seuil (diode, frottement sec) ou un fonctionnement tout-ou-rien ne le sont pas : on ne peut alors utiliser les résultats de ce chapitre que dans la zone où le système reste linéaire.

\+

Principe de superposition – hors programme Un système linéaire vérifie le **principe de superposition** : si l'entrée $e_1(t)$ produit la sortie $s_1(t)$ et l'entrée $e_2(t)$ la sortie $s_2(t)$, alors l'entrée $a\,e_1(t) + b\,e_2(t)$ produit la sortie $a\,s_1(t) + b\,s_2(t)$. En particulier, une entrée deux fois plus grande donne une réponse deux fois plus grande, **de même forme**. Attention : cela ne veut pas dire que la sortie est proportionnelle à l'entrée à chaque instant (la sortie d'un circuit RC ne vaut pas $k \times e(t)$).

Signaux de test. Pour caractériser un système, on lui applique des entrées simples : un **échelon** ($e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = E$ pour $t > 0$), qui donne la **réponse indicielle** (comportement temporel : rapidité, dépassement) ; une **sinusoïde** de fréquence variable, qui donne la **réponse fréquentielle** (comportement en filtre).

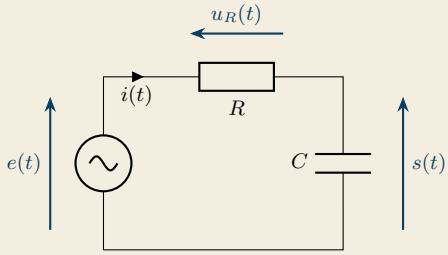
15.2 Mise en équation

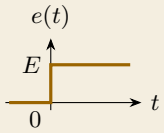
Méthode en cinq étapes

Méthode.

1. Écrire la loi des mailles.
2. Remplacer chaque tension par la loi caractéristique du dipôle : $u_R = R\,i$, $i = C\,\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$, $u_L = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$.
3. Obtenir une équation ne contenant que $s(t)$, ses dérivées et $e(t)$; la mettre sous **forme canonique** pour identifier les paramètres (τ, ou ω_0 et m).
4. Passer en notation complexe ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to j\omega$) pour obtenir $\underline{T}(j\omega)$ et $T(p)$.
5. Si demandé, analyser la réponse temporelle $s(t)$.

Exemple : le circuit RC





1. Loi des mailles : $e(t) = u_R(t) + s(t)$. **2.** $u_R = R\,i$ et $i = C\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ (le condensateur est en convention récepteur), donc

$$R\,C\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = e(t) \qquad \text{soit, pour } t > 0, \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = R\,C$$

3. C'est une équation différentielle du **premier ordre** (dérivée d'ordre 1 au plus). Le produit $R\,C$ s'exprime en secondes : c'est la **constante de temps** τ.

Circuit RL. Avec une bobine L en série avec R et la sortie prise aux bornes de R : $e = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t + R\,i$ et $s = R\,i$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\,s(t) = \frac{R}{L}\,E \qquad \text{soit} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

C'est la même équation : le circuit RL se comporte exactement comme le circuit RC.

Systèmes mécaniques et thermiques – hors programme Les mêmes équations décrivent des systèmes mécaniques et thermiques ; le tableau donne les équivalences les plus utiles. L'échauffement $\Delta\theta = \theta - \theta_{ext}$ est l'écart avec la température ambiante ; R_{th} s'exprime en K/W et C_{th} en J/K. Pour un moteur à courant continu (voir § 6.2) à vide (inductance négligée), la vitesse suit aussi un 1er ordre, de constante de temps

$$\tau = \frac{R\,J}{k^2}$$

(R : résistance d'induit, k : constante de la machine).

	Électrique	**Mécanique (rotation)**	**Thermique**
Entrée, sortie	$e(t)$, $u_C(t)$	couple $c(t)$, vitesse $\Omega(t)$	puissance $p(t)$, échauffement $\Delta\theta(t)$
Stockage	condensateur C	moment d'inertie J	capacité thermique C_{th}
Dissipation	résistance R	frottement visqueux f	résistance thermique R_{th}
Équation	$RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e$	$J\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + f\,\Omega = c$	$C_{th}\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\Delta\theta}{R_{th}} = p$
Constante de temps	$\tau = RC$	$\tau = \dfrac{J}{f}$	$\tau = R_{th}\,C_{th}$

Exemple : refroidissement d'un ballon d'eau chaude. Un ballon de 200 L a une capacité thermique

$$C_{th} = 200 \times 4180 = 836\,\mathrm{kJ/K}$$

et une résistance thermique d'isolation $R_{th} = 0{,}54\,\mathrm{K/W}$:

$$\tau = R_{th}\,C_{th} \approx 451\,000\,\mathrm{s} \approx 125\,\mathrm{h},$$

plus de cinq jours. Une eau chauffée la nuit reste chaude toute la journée (voir § 12.9).

15.3 Fonction de transfert

À retenir · Passage en notation complexe En régime sinusoïdal, chaque grandeur est représentée par un nombre complexe souligné (voir § 1.6), et une dérivation devient une multiplication par $j\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \;\to\; j\omega\,\underline{s} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \;\to\; (j\omega)^2\,\underline{s} = -\omega^2\,\underline{s}$$

Fonction de transfert La relation entre l'entrée et la sortie d'un système linéaire est caractérisée par sa **fonction de transfert** :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} \qquad \text{ou} \qquad T(p) = \frac{s(p)}{e(p)} \quad \text{avec } p = j\omega$$

Elle ne dépend que du système, pas du signal appliqué. Le degré du dénominateur est l'**ordre** du système.
L'**amplification statique** K est le rapport s/e en régime continu établi.

Ex

Exemple : fonction de transfert du circuit RC L'équation $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t + s/\tau = e/\tau$ devient $j\omega\,\underline{s} + \underline{s}/\tau = \underline{e}/\tau$, soit $\underline{s}\,(1 + j\omega\tau) = \underline{e}$:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \qquad \text{ou} \qquad T(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \qquad K = 1,\ \tau = RC$$

+

Transformée de Laplace – hors programme La **transformée de Laplace** associe à une fonction du temps $s(t)$ (nulle pour $t < 0$) une fonction $s(p)$ de la variable complexe p ; une dérivation y devient une multiplication par p. Pour un système au repos à $t = 0$, l'équation différentielle devient une équation algébrique, $s(p) = T(p) \times e(p)$, et l'on revient au temps à l'aide d'une table.

Fonction $f(t)$**,** $t \geq 0$	$f(p)$	**Opération**	**Effet sur** $s(p)$
échelon E	$\dfrac{E}{p}$	dérivée $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	$p\,s(p)$
$e^{-t/\tau}$	$\dfrac{\tau}{1+\tau p}$	dérivée seconde $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$	$p^2\,s(p)$
$E\big(1 - e^{-t/\tau}\big)$	$\dfrac{E}{p\,(1+\tau p)}$	primitive $\displaystyle\int_0^t s\,\mathrm{d}t$	$\dfrac{s(p)}{p}$

Initiale : $s(0^+) = \lim\limits_{p\to\infty} p\,s(p)$ Finale (si $s(t)$ converge) : $s(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} p\,s(p)$

Exemple : circuit RC soumis à un échelon.

$$s(p) = \frac{1}{1+\tau p} \times \frac{E}{p} = \frac{E}{p\,(1+\tau p)}$$

donc $s(t) = E\big(1 - e^{-t/\tau}\big)$ d'après la table. Contrôle :

$$s(0^+) = \lim_{p\to\infty} \frac{E}{1+\tau p} = 0 \qquad s(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{E}{1+\tau p} = E$$

Blocs en cascade. Deux blocs placés l'un derrière l'autre, sans que le second modifie le fonctionnement du premier (montage suiveur entre les deux), ont pour fonction de transfert le produit $T(p) = T_1(p) \times T_2(p)$.

15.4 Systèmes du premier ordre

★

À retenir · Forme canonique du 1er ordre (passe-bas)

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{K\,E}{\tau} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T(p) = \frac{K}{1+\tau\,p}$$

K : amplification statique ; τ : constante de temps (s).
RC : $\tau = RC$; RL : $\tau = L/R$; sortie aux bornes de C (RC) ou de R (RL) : $K = 1$.

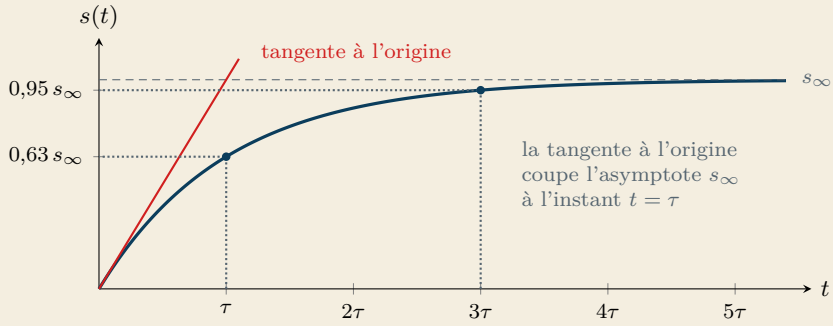
Ce filtre **passe-bas** du 1er ordre laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes : en continu, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert ($s = e$) ; à haute fréquence, comme un court-circuit ($s \to 0$).

Réponse indicielle

À retenir Pour un échelon d'amplitude E appliqué à $t = 0$, la sortie part de sa valeur initiale s_0 et tend vers sa valeur finale $s_\infty = K\,E$:

$$s(t) = s_\infty + (s_0 - s_\infty)\, e^{-t/\tau}$$

$$s(\tau) = s_0 + 0{,}63\,(s_\infty - s_0) \qquad t_{5\,\%} = 3\,\tau$$



À $t = \tau$, la sortie a effectué 63 % de sa variation totale ; à $t = 3\tau$, 95 %. La réponse ne présente **jamais de dépassement**. Le **temps de réponse à 5 %** $t_{5\,\%}$ est la durée au bout de laquelle la sortie reste à moins de 5 % de la variation totale autour de sa valeur finale. On distingue le **régime transitoire** (pendant environ 3τ) du **régime permanent** ($s = s_\infty$).

Lire graphiquement une réponse du 1er ordre.

1. Vérifier l'allure : départ avec une pente non nulle, pas de dépassement.
2. Lire la valeur initiale s_0 (à $t = 0$) et la valeur finale s_∞ (régime permanent) ; en déduire $K = (s_\infty - s_0)/E$ (variation de sortie sur variation d'entrée).
3. Calculer $s_0 + 0{,}63\,(s_\infty - s_0)$ et lire l'instant correspondant : c'est τ (ou tracer la tangente à l'origine).
4. Contrôler avec $t_{5\,\%} = 3\tau$ (lecture à 95 % de la variation).

Exemple Circuit RC avec $R = 10\,\text{k}\Omega$, $C = 47\,\mu\text{F}$, échelon $E = 12\,\text{V}$, condensateur initialement déchargé : $\tau = RC = 0{,}47\,\text{s}$, $s_\infty = 12\,\text{V}$, $s(\tau) = 0{,}63 \times 12 \approx 7{,}6\,\text{V}$ et $t_{5\,\%} = 3\tau \approx 1{,}4\,\text{s}$.

Ex

Exemple : bobine d'un électro-aimant de frein (circuit RL) La bobine ($L = 1\,\text{H}$, résistance $R = 10\,\Omega$) est mise sous tension $E = 24\,\text{V}$ à $t = 0$. Le courant $i = s/R$ suit un 1er ordre de constante de temps $\tau = L/R = 0{,}1\,\text{s}$: il part de 0 et tend vers $I_\infty = E/R = 2{,}4\,\text{A}$. À $t = \tau$, $i = 0{,}63 \times 2{,}4 \approx 1{,}5\,\text{A}$; le régime permanent est atteint à 5 % près au bout de $t_{5\,\%} = 3\tau = 0{,}3\,\text{s}$: c'est ce retard qui fixe le temps de serrage du frein.

✗

Piège classique Lire τ à 63 % de s_∞ alors que la sortie ne part pas de 0 : il faut prendre 63 % de la **variation** $s_\infty - s_0$, ajoutés à s_0. Et l'instant $t = 0$ est celui de l'échelon, pas l'origine de l'écran de l'oscilloscope.

15.5 Systèmes du deuxième ordre

★

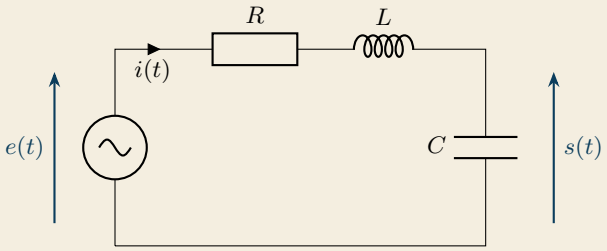
À retenir · Forme canonique du 2e ordre (passe-bas)

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, s = \omega_0^2\, K\, E$$

$$T(p) = \frac{K}{1 + \dfrac{2m}{\omega_0}\, p + \dfrac{1}{\omega_0^2}\, p^2}$$

K : amplification statique ; ω_0 : pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), $f_0 = \omega_0/(2\pi)$; m : coefficient d'amortissement (sans unité).

Exemple : le circuit RLC série



Loi des mailles : $e = R\,i + L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t + s$ avec $i = C\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, d'où, pour un échelon E ($t > 0$) :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = e \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{LC} = \frac{E}{LC}$$

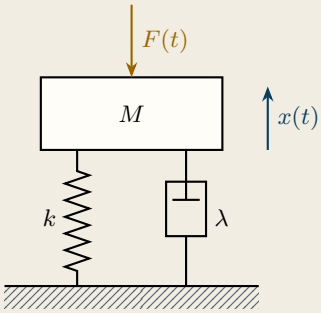
Par identification avec la forme canonique : $\omega_0^2 = 1/(LC)$ et $2m\omega_0 = R/L$.

À retenir · Circuit RLC série (sortie aux bornes de C)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad K = 1$$

Régime critique ($m = 1$) pour $R = 2\sqrt{L/C}$.

Masse, ressort, amortisseur – hors programme



Une masse M suspendue à un ressort de raideur k (N/m) et à un amortisseur visqueux de coefficient λ (N · s/m) obéit à

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = F(t)$$

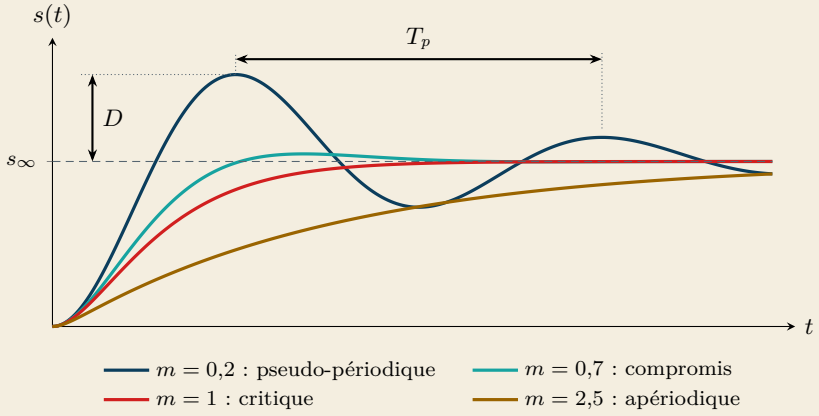
C'est un 2e ordre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad m = \frac{\lambda}{2\sqrt{k\,M}} \qquad K = \frac{1}{k}$$

La masse est notée M pour ne pas la confondre avec l'amortissement m.

Réponse indicielle : trois régimes

- $m < 1$: régime **pseudo-périodique** (amorti) : la sortie oscille autour de s_∞ avec des oscillations amorties, de **pseudo-période** T_p ; le premier maximum dépasse la valeur finale.
- $m = 1$: régime **critique** : réponse la plus rapide sans dépassement.
- $m > 1$: régime **apériodique** : pas d'oscillation, mais une montée d'autant plus lente que m est grand.
- $m \approx 0{,}7$: **compromis** entre rapidité et dépassement (dépassement d'environ 5 %) : c'est le réglage visé pour de nombreux systèmes asservis (voir § 16.3).



À retenir · Dépassement et pseudo-période (pour $m < 1$)

$$D_{\%} = \frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty - s_0} \times 100 = 100\, e^{-\pi m/\sqrt{1-m^2}} \qquad T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

s_{max} : premier extremum dans le sens de la variation ; s_0, s_∞ : valeurs initiale et finale ($s_0 = 0$ pour une réponse partant de 0).

m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$D_{\%}$	73	53	37	25	16	9,5	4,6

Exemple : circuit RLC $L = 50\,\text{mH}$, $C = 10\,\mu\text{F}$, $R = 30\,\Omega$:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0{,}05 \times 10^{-5}}} \approx 1\,414\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\ (f_0 \approx 225\,\text{Hz}) \qquad m = \frac{30}{2}\sqrt{\frac{10^{-5}}{0{,}05}} \approx 0{,}21$$

La réponse à un échelon est pseudo-périodique : $D_{\%} = 100\, e^{-\pi\times 0{,}21/\sqrt{1-0{,}21^2}} \approx 51\,\%$ et $T_p \approx 4{,}5\,\text{ms}$. Pour obtenir le régime critique, il faudrait $R = 2\sqrt{L/C} \approx 141\,\Omega$.

Lire graphiquement une réponse du 2e ordre.

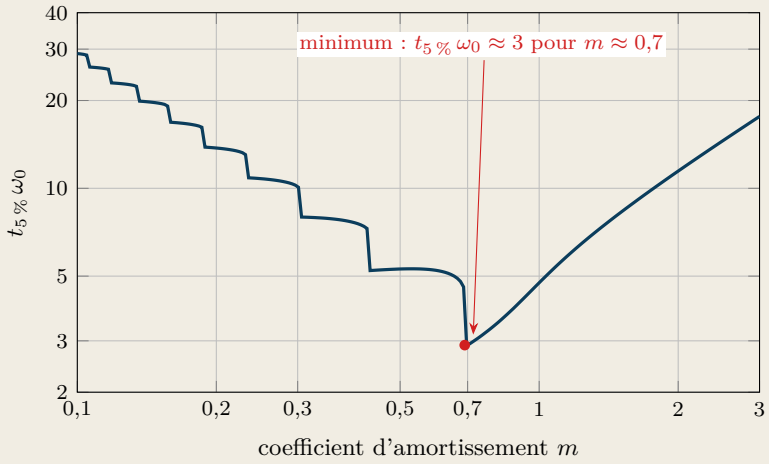
1. Lire la valeur initiale s_0 et la valeur finale s_∞ ; en déduire K.
2. Reconnaître le régime (amorti, critique ou apériodique).
3. En régime amorti, lire s_{max} et calculer le dépassement $D_{\%}$; en déduire m (tableau ci-dessus).
4. Mesurer T_p entre deux maximums successifs et en déduire

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1-m^2}}$$

Retrouver m et le temps de réponse d'un 2e ordre – hors programme En notant $D = D_{\%}/100$, on inverse la formule du dépassement :

$$m = \frac{|\ln D|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln D)^2}}$$

Le premier maximum a lieu à $t_{pic} = T_p/2$.
Le temps de réponse à 5 % se lit sur l'abaque (p. 538), qui donne le produit $t_{5\,\%}\,\omega_0$ en fonction de m. Il est minimal pour $m \approx 0{,}7$: $t_{5\,\%} \approx 3/\omega_0$. Les sauts de la courbe correspondent à un dépassement qui entre ou sort de la bande de $\pm 5\,\%$.



En ligne : simulateurs des réponses des circuits RC, RL et RLC : faites varier R, L, C et observez τ, m, le dépassement et le temps de réponse.

15.6 Réponse fréquentielle et filtres

Les circuits RC et RLC étudiés sont des filtres **passe-bas** : ils laissent passer les basses fréquences et atténuent les hautes. Le formulaire s'arrête là ; la suite (diagramme de Bode, décibels, passe-haut, passe-bande, résonance) est présentée pour comprendre les filtres rencontrés en électrotechnique. Les formules nécessaires sont toujours données dans les énoncés.

Gain en décibels et diagramme de Bode

Gain, déphasage et décibels – hors programme En régime sinusoïdal établi, la sortie d'un système linéaire est sinusoïdale **de même fréquence** que l'entrée, mais d'amplitude et de phase différentes. On utilise :

$$T = |\underline{T}(j\omega)| = \frac{S}{E} \qquad G = 20\log T \ \ \text{(dB)} \qquad \Phi = \arg \underline{T}(j\omega) = \Phi_s - \Phi_e$$

T est le rapport des valeurs efficaces (ou des amplitudes) ; G est le **gain en décibels** ; Φ le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée ($\Phi < 0$: sortie en retard).

T	100	10	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,1	0,01
G (dB)	+40	+20	+6	+3	0	−3	−20	−40

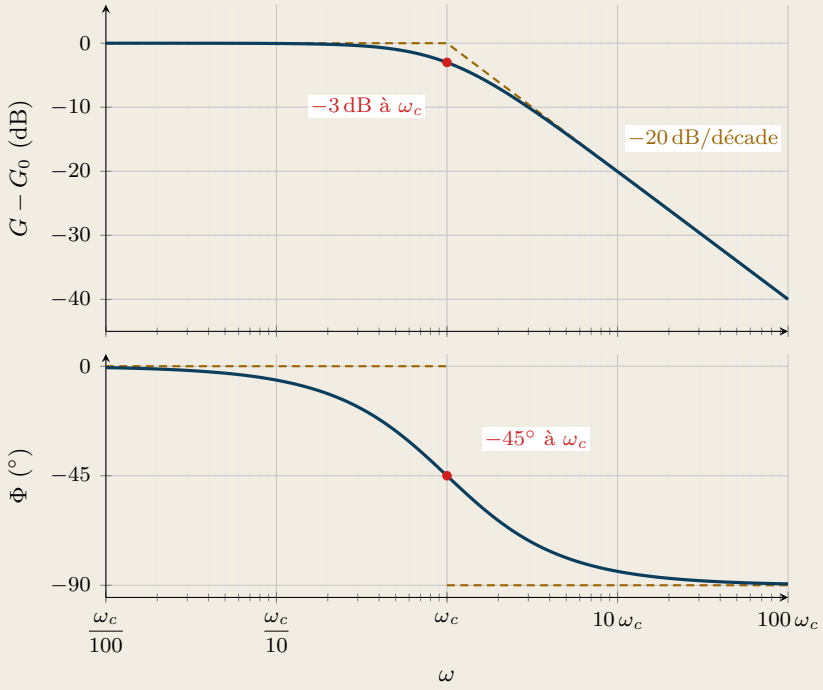
Le **diagramme de Bode** est formé de deux courbes tracées en fonction de ω (ou de f) en **échelle logarithmique** : la courbe de gain $G(\omega)$ et la courbe de phase $\Phi(\omega)$. Une **décade** correspond à une multiplication de la fréquence par 10. Pour des blocs en cascade, $T = T_1 \times T_2$ devient $G = G_1 + G_2$: les courbes de gain **s'additionnent**.

Premier ordre : passe-bas et passe-haut

Diagramme de Bode du passe-bas du 1er ordre – hors programme

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \qquad \omega_c = \frac{1}{\tau} \qquad T = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \qquad \Phi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

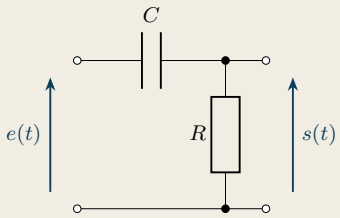
Pour $\omega \ll \omega_c$: $G \approx G_0 = 20\log K$ et $\Phi \approx 0°$. Pour $\omega \gg \omega_c$: $G \approx G_0 - 20\log(\omega/\omega_c)$ (pente de -20 dB par décade) et $\Phi \approx -90°$. À la **pulsation de coupure** $\omega_c = 1/\tau$ ($f_c = 1/(2\pi\tau)$) : $G = G_0 - 3$ dB et $\Phi = -45°$. La **bande passante** à -3 dB est ici $[0\,;f_c]$. Le diagramme **asymptotique** (pointillés orange) s'écarte au plus de 3 dB de la courbe réelle.

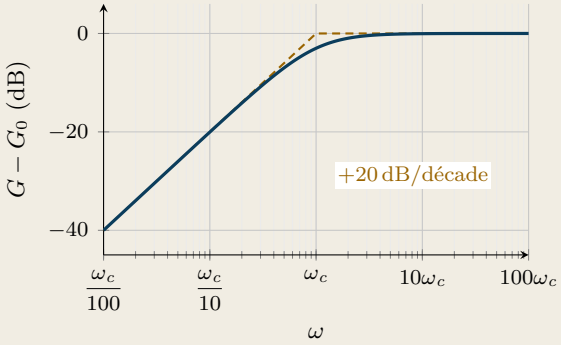


Exemple : filtre RC d'une entrée de mesure. $R = 1\,\text{k}\Omega$, $C = 100\,\text{nF}$: $\tau = 0{,}1\,\text{ms}$ et $f_c = 1/(2\pi \times 10^{-4}) \approx 1{,}59\,\text{kHz}$. À $10\,f_c$, $G \approx -20$ dB : un parasite à cette fréquence est divisé par 10 ; à $100\,f_c$, il est divisé par 100. Attention à ne pas confondre ω_c (en rad · s^{-1}) et f_c (en Hz).

Piège classique Filtrer fort rend la mesure lente : un passe-bas RC de constante de temps τ a aussi un temps de réponse $t_{5\,\%} = 3\tau$. On choisit toujours un compromis entre l'atténuation des parasites et la rapidité de la mesure.

Passe-haut du 1er ordre – hors programme





$$T(p) = \frac{K\,\tau p}{1+\tau p} \qquad \underline{T}(j\omega) = \frac{K\,j\,\omega/\omega_c}{1+j\,\omega/\omega_c} \qquad \Phi = 90° - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

En permutant R et C, on obtient un **passe-haut** : il élimine la composante continue ($T(0)=0$) et les basses fréquences. Même pulsation de coupure $\omega_c = 1/\tau$ ($G_0 - 3$ dB, $\Phi = +45°$) ; l'asymptote basse fréquence monte de $+20$ dB par décade.

Deuxième ordre : résonance et passe-bande

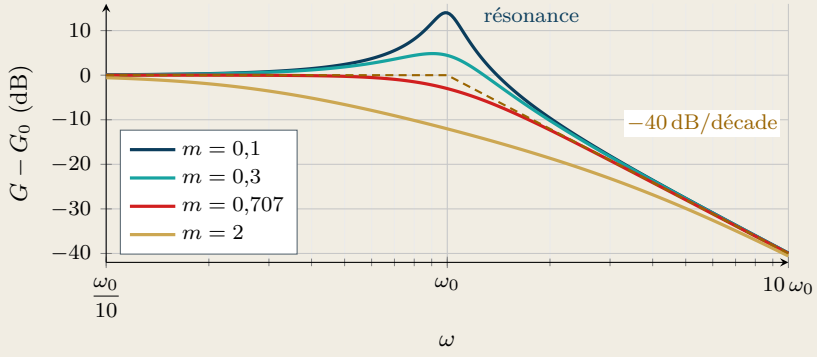
Passe-bas du 2e ordre : résonance – hors programme Avec $x = \omega/\omega_0$ (pulsation réduite) :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{K}{1 - x^2 + j\,2m\,x} \qquad T = \frac{K}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2m\,x)^2}}$$

Asymptotes : $G \approx G_0$ pour $\omega \ll \omega_0$, pente de -40 dB par décade pour $\omega \gg \omega_0$; en ω_0, $T = K/(2m)$ et $\Phi = -90°$. Si $m < \sqrt{2}/2 \approx 0{,}707$, il y a **résonance** : T passe par un maximum

$$T_{max} = \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}} \quad \text{pour} \quad \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$$

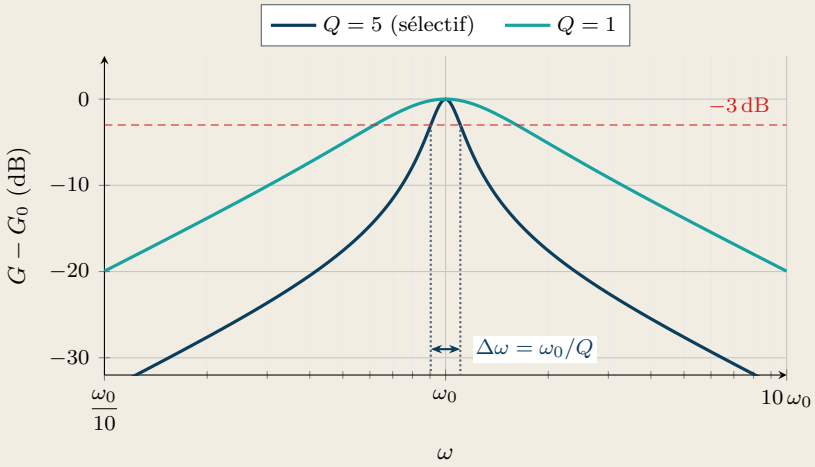
Un système peu amorti amplifie fortement les signaux de fréquence voisine de f_0 : machine posée sur des supports trop souples, filtre LC peu chargé…



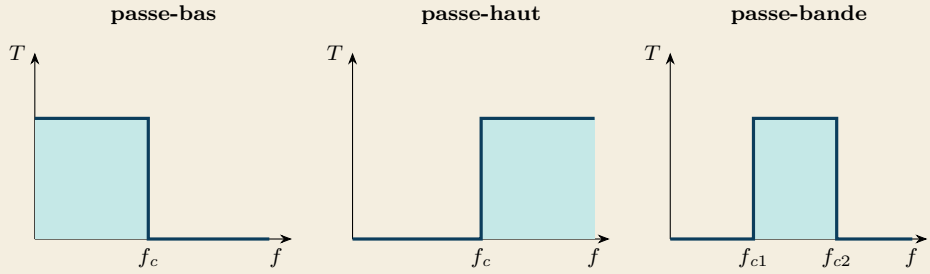
Passe-bande du 2e ordre – hors programme Dans le circuit RLC série, si l'on prend la sortie aux bornes de R, on obtient un **passe-bande** : à basse fréquence, le condensateur bloque le courant ; à haute fréquence, c'est la bobine. Le courant est maximal en ω_0, où $L\omega_0 = 1/(C\omega_0)$.

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{K}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \qquad Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

En ω_0 : $T = K$ et $\Phi = 0°$. Asymptotes : $+20\,\text{dB}$ par décade en basse fréquence, $-20\,\text{dB}$ par décade en haute fréquence. Plus le **facteur de qualité** Q est grand, plus la bande passante $\Delta\omega$ est étroite : le filtre est sélectif.



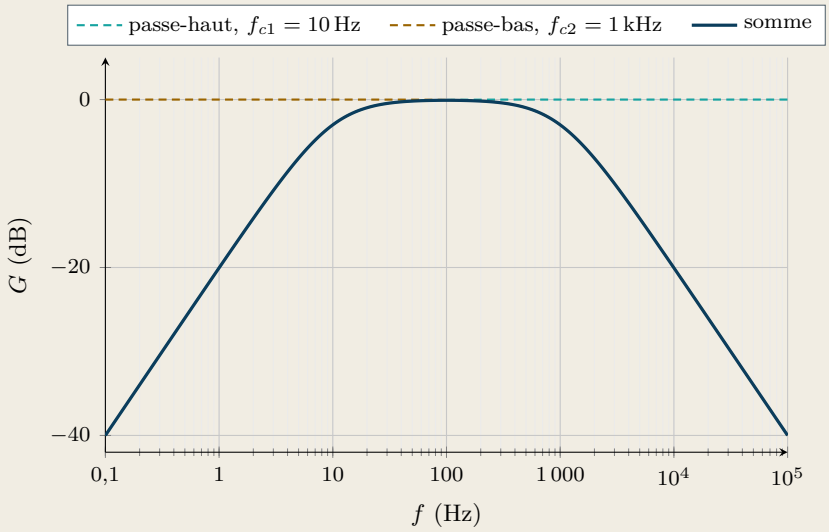
Choisir un filtre



Ces gabarits sont ceux de filtres **idéaux** ; un filtre réel atténue progressivement. Usages courants :

- **passe-bas** : éliminer les parasites haute fréquence d'une mesure (découpage d'un variateur), lisser une tension redressée (voir § 8.4), filtrer la sortie d'un onduleur ;
- **passe-haut** : supprimer la composante continue d'un signal (capteur de vibrations) ;
- **passe-bande** : extraire un signal de fréquence connue (signaux de télécommande centralisée à 175 Hz superposés au réseau, détection d'un défaut de roulement).

Associer des filtres – hors programme Un passe-haut suivi d'un passe-bas (séparés par un suiveur) donne un passe-bande large : en décibels, on **additionne** les deux courbes de gain. Deux cellules RC branchées directement l'une derrière l'autre, sans suiveur, ne donnent pas $T_1(p) \times T_2(p)$.



Dimensionner un passe-bas du 1er ordre. On place f_c entre la fréquence utile et la fréquence parasite, si possible une décade avant le parasite. Exemple : courant à 50 Hz perturbé à 20 kHz, $f_c = 500\,\text{Hz}$.

$$\text{à } 50\,\text{Hz} : G = -10\log(1+0{,}01) \approx -0{,}04\,\text{dB} \quad \text{et} \quad \Phi \approx -5{,}7°$$

$$\text{à } 20\,\text{kHz} : G = -10\log(1+1600) \approx -32\,\text{dB} \quad \text{(parasite divisé par 40)}$$

Enfin $\tau = 1/(2\pi f_c) \approx 0{,}32\,\text{ms}$, d'où $t_{5\,\%} \approx 0{,}95\,\text{ms}$.

Reconnaître l'ordre d'un système sur sa réponse indicielle.

- **1er ordre** : la sortie démarre aussitôt avec une pente non nulle et rejoint sa valeur finale sans jamais la dépasser ; on lit s_0, s_∞, puis τ à 63 % de la variation.
- **2e ordre** : la sortie démarre doucement ; si elle dépasse sa valeur finale et oscille, le régime est amorti ($m < 1$) : on lit $D_\%$ et T_p pour obtenir m et ω_0. Sans dépassement, le régime est critique ou apériodique ($m \geq 1$).

En ligne : fiches détaillées des circuits RC, RL et RLC, calculateur de ω_0 et de m, QCM « Suis-je prêt ? ».

L'essentiel

Chapitre 15

Systèmes linéaires du 1er et du 2e ordre

Lois des dipôles	$u_R = R\,i \qquad i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
Passage en notation complexe	$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \to j\omega\,\underline{s} \qquad \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \to (j\omega)^2\,\underline{s} = -\omega^2\,\underline{s}$
Fonction de transfert	$\underline{T}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} \qquad T(p) = \dfrac{s(p)}{e(p)} \qquad p = j\omega$
1er ordre : forme canonique	$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{K\,E}{\tau}$
1er ordre : fonction de transfert	$T(p) = \dfrac{K}{1+\tau\,p}$
Constante de temps	RC : $\tau = R\,C \qquad$ RL : $\tau = \dfrac{L}{R}$
Réponse à un échelon E	$s(t) = s_\infty + (s_0 - s_\infty)\,e^{-t/\tau} \qquad s_\infty = K\,E$
Lecture de τ, temps de réponse	$s(\tau) = s_0 + 0{,}63\,(s_\infty - s_0) \qquad t_{5\,\%} = 3\,\tau$
2e ordre : forme canonique	$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\,\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,s = \omega_0^2\,K\,E$
2e ordre : fonction de transfert	$T(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2m}{\omega_0}\,p + \dfrac{1}{\omega_0^2}\,p^2}$
RLC série (sortie sur C)	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \qquad m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$
Régime critique	$m = 1 \qquad R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
Amorti, critique, apériodique	$m < 1 \qquad m = 1 \qquad m > 1$
Compromis	$m \approx 0{,}7 \qquad D \approx 5\,\%$ (rapidité et dépassement)
Dépassement	$D_\% = \dfrac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100 = 100\,e^{-\pi m/\sqrt{1-m^2}}$
Pseudo-période	$T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$

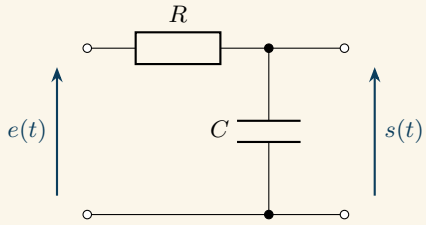
Exercices

Chapitre 15

Premier ordre

Exercice 15.1 – Filtre antiparasite d'une mesure de température ★☆☆

Dans une usine de plasturgie, la température de chaque fourreau de presse à injecter est mesurée par un transmetteur qui délivre une tension de 0 V à 10 V vers l'automate. Le câble de mesure longe celui d'un variateur de vitesse : la mesure est polluée par un parasite à la fréquence de découpage du variateur, 4 kHz, d'amplitude 0,5 V. Le technicien ajoute un filtre RC à l'entrée de l'automate et doit vérifier son efficacité. Le filtre est constitué de $R = 4{,}7\,\text{k}\Omega$ et $C = 1\,\mu\text{F}$; la résistance d'entrée de l'automate est assez grande pour que le filtre fonctionne à vide.



Formules données

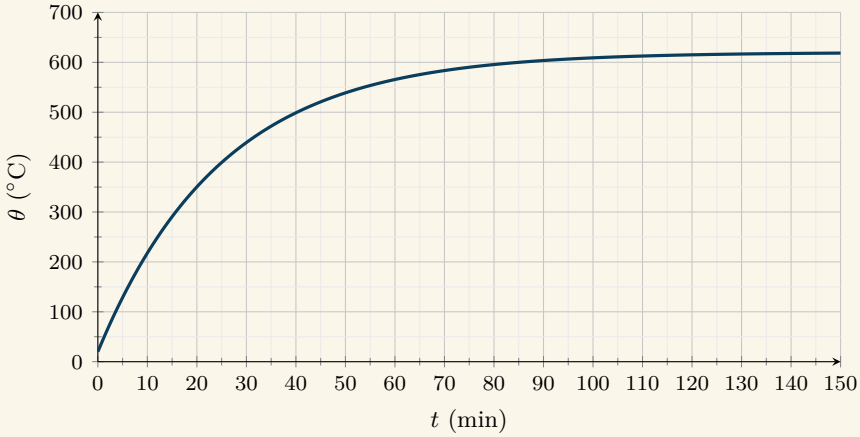
Pour ce filtre, avec $f_c = \dfrac{1}{2\pi\tau}$ (fréquence de coupure) : $T = \dfrac{S}{E} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}}$; gain en décibels $G = 20\log T$; déphasage $\Phi = -\arctan\left(\dfrac{f}{f_c}\right)$; pour $f \gg f_c$, $G \approx -20\log\dfrac{f}{f_c}$ (asymptote).

1. Établir l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$. En déduire la fonction de transfert $T(p)$ et identifier K et τ.
2. Quelle est la nature de ce filtre ? Calculer sa fréquence de coupure f_c.
3. Calculer le gain G (en dB) et le déphasage Φ à 4 kHz. Comparer G à la valeur donnée par l'asymptote.
4. En déduire l'amplitude du parasite en sortie du filtre.
5. La température varie au plus en quelques secondes. Calculer le temps de réponse à 5 % du filtre et conclure sur son effet sur la mesure.

→ corrigé p. 553

Exercice 15.2 – Mise en chauffe d'un four de traitement thermique ★☆☆

Une entreprise de mécanique trempe ses pièces dans un four électrique de 12 kW. Pour programmer le démarrage automatique du four avant l'arrivée de l'équipe du matin, le responsable de production doit savoir combien de temps il faut pour atteindre la température de travail. Le technicien a enregistré la température intérieure du four vide après une mise sous tension à pleine puissance, à $t = 0$, le four étant à la température ambiante.



1. Relever la température initiale θ_0 et la température finale θ_∞. Pourquoi peut-on modéliser le four par un système du 1er ordre ?
2. Déterminer graphiquement la constante de temps τ, en expliquant la méthode, puis le temps de réponse à 5 %.
3. L'entrée est la puissance $p(t)$, la sortie l'échauffement $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Calculer l'amplification statique K (en °C/kW) et écrire la fonction de transfert $T(p) = \Delta\Theta(p)/P(p)$.
4. Le four obéit à $C_{th}\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\Delta\theta}{R_{th}} = p(t)$. En identifiant avec la forme canonique, calculer R_{th} (en °C/W) et C_{th} (en J/°C).
5. La température de trempe est de 400 °C. Calculer la durée de chauffe nécessaire.
6. Par économie, on envisage de chauffer à 9 kW seulement. Quelle serait la température finale ? Ce choix est-il possible ?

→ corrigé p. 554

Exercice 15.3 – Démarrage d'un convoyeur à moteur à courant continu ★★☆

Une sucrerie remplace l'ancien moteur d'un convoyeur à betteraves par un moteur à courant continu à excitation indépendante, alimenté par un variateur. Avant la mise en service, le bureau d'études veut connaître la durée de la mise en vitesse et le courant appelé si l'on applique brutalement la tension nominale, pour savoir si la limitation de courant du variateur est indispensable. On étudie le démarrage à vide

(couple résistant et frottements négligés) ; l'inductance de l'induit est négligée.

Données

- ▷ Résistance de l'induit $R = 0{,}8\,\Omega$; constante de la machine $k = 1{,}2\,\mathrm{V{\cdot}s{\cdot}rad^{-1}}$: $E' = k\,\Omega$ et $C_{em} = k\,i$.
- ▷ Moment d'inertie ramené sur l'arbre moteur : $J = 0{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.
- ▷ Équations : $u(t) = R\,i(t) + k\,\Omega(t)$ et $J\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = k\,i(t)$.
- ▷ À $t = 0$, le moteur est à l'arrêt et on applique un échelon de tension $U_0 = 240\,\mathrm{V}$.

1. Éliminer $i(t)$ entre les deux équations et montrer que $\dfrac{R\,J}{k^2}\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \Omega = \dfrac{1}{k}\,u(t)$.

2. En déduire la fonction de transfert $T(p) = \dfrac{\Omega(p)}{u(p)}$; calculer la constante de temps électromécanique τ_m et l'amplification statique K.

3. Calculer la vitesse finale Ω_∞ atteinte pour l'échelon U_0, en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ puis en tr/min.

4. Écrire l'expression de $\Omega(t)$. Calculer la vitesse à $t = \tau_m$ et la durée de démarrage à 5 % près.

5. Exprimer $i(t)$. Calculer le courant au premier instant et à $t = \tau_m$. Conclure.

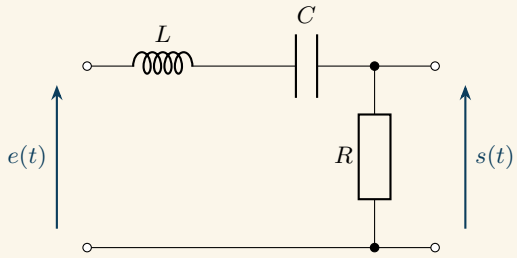
6. Le variateur limite en fait le courant à $I_{lim} = 30\,\mathrm{A}$ pendant tout le démarrage. Calculer l'accélération angulaire, puis la durée de mise en vitesse. Le système est-il encore linéaire ?

→ corrigé p. 555

Deuxième ordre et filtres

Exercice 15.4 – Récepteur de télécommande centralisée à 175 Hz ★★☆

Le distributeur d'électricité commande à distance les chauffe-eau et les éclairages publics en superposant à la tension du réseau (230 V, 50 Hz) des impulsions à 175 Hz, d'environ 2 % de la tension nominale, soit $E_{175} = 4{,}6\,\mathrm{V}$ efficaces. Une commune fait installer dans ses armoires d'éclairage public des relais récepteurs ; le technicien chargé de la mise en service veut comprendre comment ils séparent le signal de commande de la tension du réseau. L'étage d'entrée d'un récepteur est un circuit RLC série ; la sortie est la tension aux bornes de R.



Données

- $L = 0{,}33\,\text{H}$; $C = 2{,}5\,\mu\text{F}$; $R = 20\,\Omega$; le récepteur fonctionne à vide.
- Forme canonique du passe-bande : $T(p) = \dfrac{K\,\frac{2m}{\omega_0}\,p}{1+\frac{2m}{\omega_0}\,p+\frac{1}{\omega_0^2}\,p^2}$; facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{2m}$; bande passante à $-3\,\text{dB}$: $\Delta f = \dfrac{f_0}{Q}$.
- Module, avec $x = \dfrac{f}{f_0}$: $T = \dfrac{K}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$; gain $G = 20\log T$; pour deux étages en cascade, les gains en dB s'additionnent.

1. En raisonnant sur le comportement du condensateur et de la bobine à très basse et à très haute fréquence, prévoir la nature du filtre.

2. Montrer que $T(p) = \dfrac{s(p)}{e(p)} = \dfrac{RC\,p}{1+RC\,p+LC\,p^2}$. Par identification avec la forme canonique donnée, exprimer K, ω_0, m et Q en fonction de R, L, C.

3. Calculer f_0, m et Q. Le filtre est-il bien accordé ?

4. Calculer la bande passante Δf à $-3\,\text{dB}$. Quel est l'intérêt d'une bande passante étroite ? Quel en est l'inconvénient ?

5. Calculer le gain G et le rapport T à $50\,\text{Hz}$. En déduire les valeurs efficaces, en sortie, de la composante à $50\,\text{Hz}$ et du signal à $175\,\text{Hz}$. Conclure.

6. Le constructeur place deux étages identiques en cascade, séparés par un montage suiveur. Calculer le gain total à $50\,\text{Hz}$ et à $175\,\text{Hz}$, puis les nouvelles valeurs efficaces en sortie. Conclure.

→ corrigé p. 556

Exercice 15.5 – Massif antivibratoire d'un compresseur ★★☆

Une brasserie installe un compresseur à vis de $400\,\text{kg}$ sur un châssis posé sur quatre plots élastiques, pour éviter de transmettre les vibrations au bâtiment. Après quelques semaines, le voisinage se plaint de bruit lorsque le compresseur fonctionne à vitesse réduite. Le technicien de maintenance modélise l'ensemble par une masse M posée sur un ressort de raideur k et un amortisseur visqueux de coefficient λ (schéma du cours) ; $x(t)$ est le déplacement vertical de la masse et $F(t)$ la force

verticale appliquée.

Données

- $M = 400\,\text{kg}$; raideur totale des quatre plots $k = 1{,}6 \times 10^6\,\text{N/m}$; $\lambda = 8\,000\,\text{N}\cdot\text{s/m}$.
- Équation du mouvement autour de la position d'équilibre :

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = F(t)$$

I- Modèle

1. Écrire la fonction de transfert $T(p) = \dfrac{x(p)}{f(p)}$ sous forme canonique. Exprimer et calculer K, ω_0, f_0 et m.

II- Réponse à un échelon de force

Lors d'un essai de maintenance, un vérin d'essai appuie brusquement sur le châssis avec une force verticale constante $F_0 = 2\,000\,\text{N}$ (vers le bas, comptée positivement) : c'est un échelon de force, la masse suspendue restant égale à M.

2. Calculer l'enfoncement final x_∞. Quel est le régime de la réponse ?

3. Calculer le dépassement $D_\%$, l'enfoncement maximal x_{max} et la pseudo-période T_p.

III- Réponse à une excitation sinusoïdale

Le balourd du rotor crée une force sinusoïdale de fréquence égale à la fréquence de rotation.

4. Montrer que le module de la fonction de transfert complexe s'écrit, avec $u = \dfrac{f}{f_0}$ (fréquence réduite, à ne pas confondre avec le déplacement x) :

$$T = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2m\,u)^2}}$$

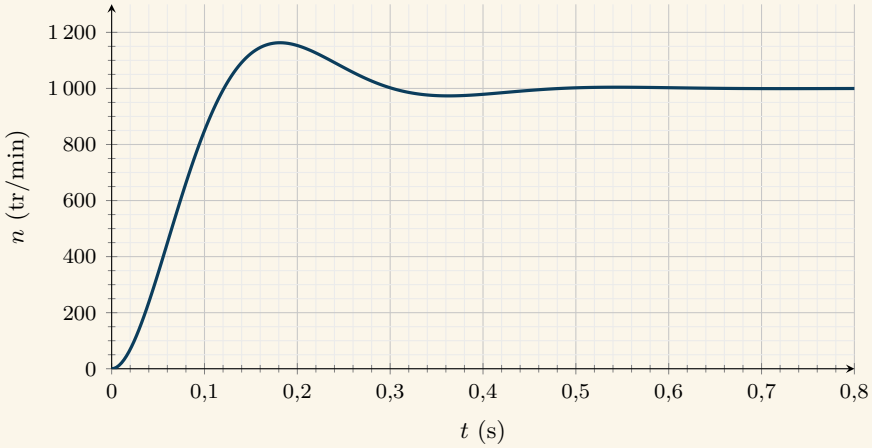
5. Calculer le rapport $\dfrac{T}{K}$ (amplification du déplacement par rapport au cas statique) pour une rotation à $600\,\text{tr/min}$ et à $1\,500\,\text{tr/min}$. Expliquer les plaintes du voisinage.

6. Proposer deux solutions pour le technicien.

→ corrigé p. 557

Exercice 15.6 – Identification de la boucle de vitesse d'un variateur ★★★

Sur une ligne d'embouteillage, un moteur asynchrone piloté par un variateur entraîne le tapis d'accumulation des bouteilles. Lors des changements de format, les bouteilles se renversent au démarrage du tapis. Le technicien enregistre la vitesse du moteur pour un échelon de consigne de 0 à $1\,000\,\text{tr/min}$ appliqué à $t = 0$, afin d'identifier le comportement de la boucle de vitesse et de proposer un nouveau réglage.



A- Identification

1. Pourquoi ce relevé ne peut-il pas être celui d'un système du 1er ordre ? Quel est le régime observé ?

2. Relever la vitesse finale et en déduire l'amplification statique K de la boucle (sortie et entrée en tr/min).

3. Relever la vitesse maximale n_{max} et l'instant t_{pic} du premier maximum (on admet que $t_{pic} = \dfrac{T_p}{2}$). Calculer le dépassement $D_{\%}$.

4. En déduire le coefficient d'amortissement m, puis la pulsation propre ω_0. On donne, avec $D = \dfrac{D_{\%}}{100}$:

$$m = \frac{|\ln D|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln D)^2}}$$

5. Écrire la fonction de transfert $T(p) = \dfrac{n(p)}{n_c(p)}$ identifiée.

6. Pour $m = 0{,}5$, on admet que $t_{5\,\%}\,\omega_0 \approx 5{,}3$. Estimer le temps de réponse à 5 %, et le comparer à la lecture du relevé.

B- Comportement fréquentiel

On donne, avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$: $T = \dfrac{K}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2m\,x)^2}}$ et $G = 20\log T$. Si $m < 0{,}707$, T passe par un maximum $T_{max} = \dfrac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$ (résonance) pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$.

7. La boucle présente-t-elle une résonance ? Si oui, calculer la pulsation de résonance ω_r et le gain maximal en dB.

8. Vérifier que la pulsation de coupure à -3 dB vaut environ 25 rad·s^{-1} en calculant G pour $\omega = 25{,}4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

C- Nouveau réglage

9. Le technicien modifie les gains du régulateur de vitesse pour obtenir $m = 0{,}7$ en conservant ω_0. Calculer le nouveau dépassement et le nouveau temps de réponse (pour $m = 0{,}7$, $t_{5\,\%}\,\omega_0 \approx 3$). Conclure pour le problème des bouteilles.

→ corrigé p. 558

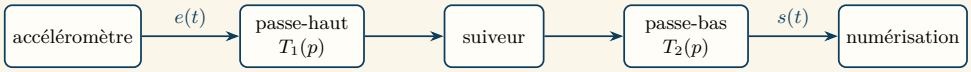
Sujets de type BTS

Chapitre 15

Sujet BTS 15.A – Chaîne de mesure vibratoire d'un groupe motopompe

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une station de pompage d'eau potable met en place une surveillance vibratoire de ses groupes motopompes pour détecter l'usure des roulements avant la panne. Sur chaque palier, un accéléromètre délivre une tension image de l'accélération, superposée à une tension continue de polarisation. Le signal traverse un filtre passe-haut, puis un filtre passe-bas, avant d'être numérisé. On vérifie le dimensionnement de ces filtres proposé par l'intégrateur.



Données

- Accéléromètre : sensibilité 100 mV par g ($g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$) ; tension continue de polarisation 12 V, présente dès la mise sous tension.
- Passe-haut (circuit CR, sortie aux bornes de R_1) : $C_1 = 1\ \mu\text{F}$, $R_1 = 68\ \text{k}\Omega$.
- Passe-bas (circuit RC, sortie aux bornes de C_2) : $R_2 = 1\ \text{k}\Omega$, $C_2 = 33\ \text{nF}$. Le suiveur permet de considérer que les deux filtres fonctionnent à vide.
- Le moteur tourne à 1 500 tr/min ; un défaut de roulement produit une vibration à 3 kHz. Le cahier des charges impose de transmettre de 10 Hz à 3 kHz avec une atténuation de moins de 1 dB.
- Formules données. Fréquence de coupure d'un filtre RC ou CR : $f_c = \dfrac{1}{2\pi\tau}$. Modules : passe-haut $T_1 = \dfrac{f/f_{c1}}{\sqrt{1+(f/f_{c1})^2}}$, passe-bas $T_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f/f_{c2})^2}}$; gain $G = 20\log T$; asymptotes : ± 20 dB par décade. En cascade : $T(p) = T_1(p)\,T_2(p)$ et $G = G_1 + G_2$.
- Transformée de Laplace : un échelon E a pour transformée $\dfrac{E}{p}$; $\dfrac{\tau}{1+\tau p}$ est la transformée de $e^{-t/\tau}$; $s(0^+) = \lim\limits_{p\to\infty} p\,s(p)$ et $s(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} p\,s(p)$.

Partie A – Filtre passe-haut

A.1. Montrer que $T_1(p) = \dfrac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p}$ et exprimer τ_1. Calculer τ_1 et la fréquence de coupure f_{c1}.

A.2. Quel est le rôle de ce filtre vis-à-vis de la tension de polarisation ? Justifier à l'aide de $T_1(0)$.

A.3. À la mise sous tension, l'entrée du filtre subit un échelon de 12 V. Écrire $s_1(p)$; en utilisant les théorèmes des valeurs initiale et finale, donner $s_1(0^+)$ et $s_1(\infty)$, puis l'expression de $s_1(t)$ à l'aide de la table.

A.4. Combien de temps faut-il attendre après la mise sous tension pour que s_1 soit inférieure à 10 mV ? Commenter.

Partie B – Filtre passe-bas

B.1. Écrire $T_2(p)$ et calculer τ_2 et f_{c2}.

B.2. Quel est le rôle de ce filtre avant la numérisation ?

Partie C – Chaîne complète

C.1. Exprimer la fonction de transfert globale $T(p)$. Quelle est la nature du filtre obtenu ?

C.2. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique du gain de la chaîne, de 0,1 Hz à 100 kHz, en indiquant les pentes et les fréquences de coupure.

C.3. Calculer le gain (en dB) de la chaîne à 10 Hz, 25 Hz et 3 kHz. Le cahier des charges est-il respecté ?

Partie D – Exploitation et amélioration

D.1. Au palier, on mesure une vibration à la fréquence de rotation d'amplitude 0,8 g, une vibration de défaut à 3 kHz d'amplitude 0,15 g et un bruit à 20 kHz d'amplitude 50 mV en sortie de l'accéléromètre. Calculer l'amplitude de chacune de ces composantes en sortie de la chaîne.

D.2. L'intégrateur propose de remplacer C_2 par un condensateur de 10 nF. Calculer la nouvelle fréquence de coupure et le gain à 3 kHz et à 20 kHz. Conclure en quelques lignes.

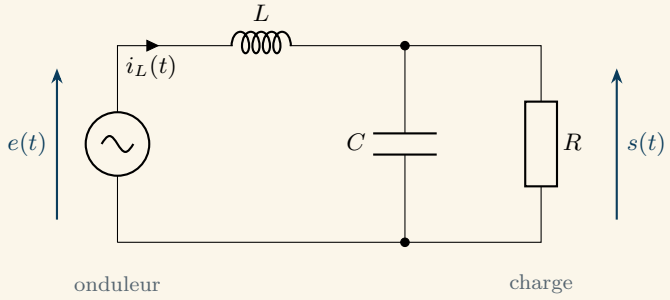
→ corrigé p. 559

Sujet BTS 15.B – Filtre de sortie d'une alimentation sans interruption

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Un centre d'imagerie médicale protège ses équipements par une alimentation sans interruption (ASI) monophasée de 5 kVA. Son onduleur fonctionne en modulation de largeur d'impulsion : sa tension de sortie $e(t)$ contient le fondamental à 50 Hz et

des harmoniques groupés autour de la fréquence de découpage 16 kHz. Un filtre LC les élimine avant les récepteurs. Après le remplacement de la bobine du filtre, on veut vérifier le comportement de l'ensemble en charge et à vide.



Données

- Filtre : $L = 2{,}5\,\text{mH}$; $C = 10\,\mu\text{F}$. La résistance de la bobine est négligée dans les parties A à C.
- Charge nominale : résistive, 5 kW sous 230 V.
- Tension de l'onduleur : fondamental d'amplitude 325 V à 50 Hz ; harmoniques de découpage d'amplitude 200 V autour de 16 kHz.
- Formules données, avec $x = \dfrac{f}{f_0}$:

$$T = \frac{K}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2m\,x)^2}} \qquad G = 20\log T$$

Asymptote haute fréquence : $G \approx -40\log x$. Si $m < 0{,}707$: $T_{max} = \dfrac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$. Temps de réponse : pour $m \approx 0{,}75$, $t_{5\,\%}\,\omega_0 \approx 3{,}1$.

Partie A – Modélisation

A.1. Calculer la résistance R équivalente à la charge nominale.

A.2. Montrer que $LC\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = e(t)$.

A.3. En déduire $T(p) = \dfrac{s(p)}{e(p)}$, puis exprimer K, ω_0 et m en fonction de L, C et R.

A.4. Calculer ω_0, f_0 et m.

Partie B – Réponse fréquentielle en charge

B.1. Calculer le gain G du filtre à 50 Hz et à 16 kHz. Comparer la seconde valeur à celle de l'asymptote haute fréquence.

B.2. En déduire l'amplitude du fondamental et celle des harmoniques de découpage aux bornes de la charge. Conclure.

B.3. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique du gain, de 10 Hz à 100 kHz.

Partie C – Réponse indicielle en charge

C.1. Lors du transfert de la charge sur l'onduleur, la tension e subit une variation brusque assimilable à un échelon. Quel est le régime de la réponse ? Calculer le dépassement $D_{\%}$.

C.2. Estimer le temps de réponse à 5 %. Commenter par rapport à la période du réseau.

Partie D – Fonctionnement à vide

À vide (R infinie), on ne peut plus négliger la résistance $r = 0{,}4\,\Omega$ de la bobine, en série avec L.

D.1. Montrer qu'alors $m = \dfrac{r}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et calculer sa valeur. Calculer le dépassement en réponse à un échelon. Quel risque cela présente-t-il ?

D.2. Calculer le gain maximal du filtre à vide. Un harmonique de rang 21 (1 050 Hz) d'amplitude 3 V est présent en sortie de l'onduleur : calculer son amplitude aux bornes de C, à vide puis en charge nominale.

D.3. Calculer la valeur de R qui donnerait $m = 0{,}7$. Rédiger en quelques lignes une conclusion pour le service technique.

→ corrigé p. 561

Corrigés

Premier ordre

✓ Corrigé de l'exercice 15.1 – Filtre antiparasite d'une mesure de température

1. Loi des mailles : $e = R\,i + s$, avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ (filtre à vide : tout le courant traverse C). D'où

$$RC\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = e(t) \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\to j\omega} (1 + jRC\omega)\,\underline{s} = \underline{e} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(p) = \frac{1}{1 + RC\,p}}$$

Par identification : $K = 1$ et $\tau = RC = 4{,}7 \times 10^{3} \times 10^{-6}$, soit $\boxed{\tau = 4{,}7\,\text{ms}}$

2. C'est un filtre **passe-bas** du 1er ordre : en continu, C se comporte comme un circuit

ouvert ($s = e$) ; en haute fréquence, comme un court-circuit ($s \to 0$).

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi \times 4{,}7 \times 10^{-3}} \quad \text{soit} \quad \boxed{f_c \approx 33{,}9\,\text{Hz}}$$

3. $\dfrac{f}{f_c} = \dfrac{4000}{33{,}86} \approx 118{,}1$; $\quad T = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 118{,}1^2}} \approx 8{,}47 \times 10^{-3}$

$$G = 20 \log T \quad \text{soit} \quad \boxed{G \approx -41{,}4\,\text{dB}} \qquad \Phi = -\arctan(118{,}1) \approx -89{,}5°$$

Asymptote : $G \approx -20 \log 118{,}1 \approx -41{,}4\,\text{dB}$. À plus de deux décades de f_c, l'asymptote et la courbe réelle sont confondues.

4. $0{,}5 \times 8{,}47 \times 10^{-3} \approx 4{,}2 \times 10^{-3}$: $\boxed{\text{parasite résiduel} \approx 4{,}2\,\text{mV}}$ d'amplitude, soit 0,04 % de la pleine échelle : il est devenu négligeable.

5. $t_{5\,\%} = 3\tau = 3 \times 4{,}7$ soit $\boxed{t_{5\,\%} \approx 14\,\text{ms}}$

Le filtre est environ cent fois plus rapide que les variations de température les plus rapides (quelques secondes) : il ne retarde pas la mesure de façon gênante, tout en éliminant le parasite.

Méthode Un filtre passe-bas est bien dimensionné quand f_c est très supérieure aux fréquences du signal utile (ici, quasi continu) et très inférieure à la fréquence du parasite. Chaque décade entre f_c et le parasite apporte 20 dB, c'est-à-dire une division par 10.

✓ Corrigé de l'exercice 15.2 – Mise en chauffe d'un four de traitement thermique

1. $\theta_0 = 20\,°\text{C}$ et $\theta_\infty = 620\,°\text{C}$. La courbe part avec une pente non nulle, tend vers une asymptote horizontale sans la dépasser et n'a pas de point d'inflexion : c'est l'allure d'une réponse indicielle du 1er ordre.

2. On calcule 63 % de la variation : $\theta(\tau) = 20 + 0{,}63 \times (620 - 20) \approx 398\,°\text{C}$, et on lit l'abscisse correspondante sur la courbe : $\boxed{\tau \approx 25\,\text{min}}$ (on obtient la même valeur avec la tangente à l'origine, qui coupe l'asymptote $\theta = 620\,°\text{C}$ à $t = \tau$).

$t_{5\,\%} = 3\tau$ soit $\boxed{t_{5\,\%} \approx 75\,\text{min}}$ (contrôle : à 75 min, on lit $\theta \approx 590\,°\text{C} = 20 + 0{,}95 \times 600$ ✓).

3. $K = \dfrac{\Delta\theta_\infty}{P} = \dfrac{620 - 20}{12}$ soit $\boxed{K = 50\,°\text{C/kW}}$

$$T(p) = \frac{\Delta\Theta(p)}{P(p)} = \frac{50}{1 + 1500\,p} \quad (\text{en } °\text{C/kW},\ \tau = 25\,\text{min} = 1\,500\,\text{s})$$

4. En multipliant l'équation par R_{th} : $R_{th}C_{th}\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} + \Delta\theta = R_{th}\,p(t)$. Par identification : $K = R_{th}$ et $\tau = R_{th}C_{th}$.

$$R_{th} = \frac{600}{12000} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{th} = 0{,}05\,°\text{C/W}}$$

$$C_{th} = \frac{\tau}{R_{th}} = \frac{1500}{0{,}05} \quad \text{soit} \quad \boxed{C_{th} = 30\,\text{kJ/°C}}$$

5. Il faut $\Delta\theta = 400 - 20 = 380\,°\text{C} : 600\,(1 - e^{-t/\tau}) = 380$, d'où

$$t = \tau \ln \frac{600}{600 - 380} = 25 \times \ln \frac{600}{220} \quad \text{soit} \quad \boxed{t \approx 25\,\text{min}}$$

La température de trempe est atteinte au bout d'environ une constante de temps (398 °C à $t = \tau$, valeur très proche).

6. Le système est linéaire : l'échauffement final est proportionnel à la puissance, $\Delta\theta_\infty = 50 \times 9 = 450\,°\text{C}$, soit $\boxed{\theta_\infty = 470\,°\text{C}}$

C'est possible ($470\,°\text{C} > 400\,°\text{C}$), mais plus lent : $t = 25\ln\big(450/(450 - 380)\big) \approx 46{,}5$ min. Il faut avancer la mise en chauffe d'environ 20 min, et la marge de régulation devient faible.

✓ Corrigé de l'exercice 15.3 – Démarrage d'un convoyeur à moteur à courant continu

1. De la seconde équation : $i = \dfrac{J}{k}\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$. En reportant dans la première : $u = \dfrac{RJ}{k}\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + k\,\Omega$, puis en divisant par k :

$$\frac{R\,J}{k^2}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \Omega = \frac{1}{k}\,u(t)$$

2. C'est la forme canonique du 1er ordre : $T(p) = \dfrac{\Omega(p)}{u(p)} = \dfrac{1/k}{1 + \tau_m\,p}$ avec

$$\tau_m = \frac{R\,J}{k^2} = \frac{0{,}8 \times 0{,}9}{1{,}2^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau_m = 0{,}5\,\text{s}} \qquad K = \frac{1}{k} \approx 0{,}833\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$$

3. En régime permanent, la vitesse finale vaut $\Omega_\infty = K\,U_0$:

$$\Omega_\infty = \frac{240}{1{,}2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Omega_\infty = 200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

soit $n_\infty = 200 \times 60/(2\pi) \approx 1\,910\,\text{tr/min}$.

4. Réponse du 1er ordre partant de $\Omega_0 = 0$:

$$\Omega(t) = \Omega_\infty + (0 - \Omega_\infty)\,e^{-t/\tau_m} = 200\left(1 - e^{-t/0{,}5}\right) \quad (t \text{ en s})$$

$\Omega(\tau_m) = 200 \times 0{,}632 \approx 126\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $\boxed{t_{5\,\%} = 3\tau_m = 1{,}5\,\text{s}}$

5. $i = \dfrac{u - k\,\Omega}{R} = \dfrac{U_0 - U_0\big(1 - e^{-t/\tau_m}\big)}{R}$, d'où $\boxed{i(t) = \dfrac{U_0}{R}\,e^{-t/\tau_m}}$

$i(0^+) = 240/0{,}8 = 300\,\text{A}$ (moteur à l'arrêt : aucune f.é.m. ne limite le courant) ;

$i(\tau_m) = 300 \times e^{-1} \approx 110\,\text{A}$.

Ce courant, plusieurs fois supérieur au courant nominal, détruirait le collecteur et les semi-conducteurs du variateur : la limitation de courant est **indispensable**.

6. À courant constant : $J\,\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t = k\,I_{lim}$, donc $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t = 1{,}2 \times 30/0{,}9 = 40\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$: la vitesse croît linéairement (rampe).

La limitation reste active tant que $U_0 - k\,\Omega > R\,I_{lim}$, c'est-à-dire jusqu'à $\Omega = (240 - 0{,}8 \times 30)/1{,}2 = 180\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, atteinte à $t = 180/40 = 4{,}5\,\mathrm{s}$. La fin du démarrage (de 180 à $200\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$) suit à nouveau le 1er ordre : il faut encore $\tau_m \ln 2 \approx 0{,}35\,\mathrm{s}$ pour entrer dans la bande des 5 %, soit $\boxed{t_d \approx 4{,}9\,\mathrm{s}}$

Pendant la limitation, le système n'est **plus linéaire** (saturation du courant) : la réponse n'est plus une exponentielle et ne serait pas doublée si l'on doublait l'échelon.

Deuxième ordre et filtres

✓ Corrigé de l'exercice 15.4 – Récepteur de télécommande centralisée à 175 Hz

1. Très basse fréquence : le condensateur est un circuit ouvert, $i = 0$ et $s = 0$. Très haute fréquence : la bobine est un circuit ouvert, $s = 0$ aussi. Entre les deux, le courant passe : c'est un **passe-bande**.

2. En Laplace, les impédances sont R, Lp et $\dfrac{1}{Cp}$. Pont diviseur :

$$T(p) = \frac{R}{R + Lp + \dfrac{1}{Cp}} = \frac{RC\,p}{1 + RC\,p + LC\,p^2}$$

Identification avec $\dfrac{K\,\frac{2m}{\omega_0}p}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$: $K = 1$, $\dfrac{1}{\omega_0^2} = LC$ et $\dfrac{2m}{\omega_0} = RC$, d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

3. $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}33 \times 2{,}5 \times 10^{-6}}} \approx 1\,101\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, soit $\boxed{f_0 \approx 175{,}2\,\mathrm{Hz}}$: le filtre est bien accordé sur 175 Hz.

$$m = \frac{20}{2}\sqrt{\frac{2{,}5 \times 10^{-6}}{0{,}33}} \approx 0{,}027\,5 \qquad \boxed{Q \approx 18{,}2}$$

4. $\boxed{\Delta f = \dfrac{f_0}{Q} \approx 9{,}6\,\mathrm{Hz}}$ (de 170,5 Hz à 180 Hz environ).

Une bande étroite rejette le 50 Hz et ses harmoniques (150 Hz, 250 Hz…) tout près de 175 Hz. Inconvénient : une légère dérive de L ou de C (température, vieillissement) décale f_0 et le signal utile peut sortir de la bande passante.

5. $x = \dfrac{50}{175{,}2} \approx 0{,}285$; $\quad Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 18{,}2 \times (0{,}285 - 3{,}504) \approx -58{,}5$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + 58{,}5^2}} \approx 0{,}017\,1 \qquad \boxed{G \approx -35{,}3\,\text{dB}}$$

En sortie : composante 50 Hz : $230 \times 0{,}017\,1 \approx 3{,}9\,\text{V}$; signal 175 Hz ($T \approx 1$) : 4,6 V. Le signal de commande n'est que légèrement plus grand que le résidu du réseau : un seul étage **ne suffit pas** à le détecter de façon fiable.

6. Étages en cascade (sans interaction grâce au suiveur) : les gains en dB s'additionnent.

$$G_{50} = 2 \times (-35{,}34) \approx -70{,}7\,\text{dB} \qquad G_{175} \approx 0\,\text{dB}$$

En sortie : 50 Hz : $230 \times 0{,}017\,1^2 \approx 0{,}067\,\text{V}$; 175 Hz : $\boxed{\approx 4{,}6\,\text{V}}$. Le signal utile est maintenant environ 70 fois plus grand que le résidu : la détection est sûre.

✓ Corrigé de l'exercice 15.5 – Massif antivibratoire d'un compresseur

I- Modèle

1. En Laplace : $(Mp^2 + \lambda p + k)\,x(p) = f(p)$, puis en divisant par k :

$$T(p) = \frac{x(p)}{f(p)} = \frac{1/k}{1 + \dfrac{\lambda}{k}\,p + \dfrac{M}{k}\,p^2}$$

$$K = \frac{1}{k} = 6{,}25 \times 10^{-7}\,\text{m/N}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{1{,}6 \times 10^6}{400}} = 63{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \boxed{f_0 \approx 10{,}1\,\text{Hz}}$$

$$\frac{2m}{\omega_0} = \frac{\lambda}{k} \;\Rightarrow\; m = \frac{\lambda}{2\sqrt{k\,M}} = \frac{8000}{2\sqrt{1{,}6 \times 10^6 \times 400}} \quad \text{soit} \quad \boxed{m \approx 0{,}158}$$

II- Réponse à un échelon de force

2. $\boxed{x_\infty = K\,F_0 = \dfrac{2000}{1{,}6 \times 10^6} = 1{,}25\,\text{mm}}$; $m < 1$: régime **pseudo-périodique**, le châssis oscille avant de se stabiliser.

3. $D_\% = 100\,e^{-\pi \times 0{,}158/\sqrt{1-0{,}158^2}}$ soit $\boxed{D_\% \approx 60\,\%}$

$$x_{max} = x_\infty\,(1 + D) = 1{,}25 \times 1{,}605 \approx 2{,}0\,\text{mm} \qquad T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - m^2}} \approx 0{,}10\,\text{s}$$

III- Réponse à une excitation sinusoïdale

4. On remplace p par $j\omega$; avec $u = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{f}{f_0}$, on a $\dfrac{p}{\omega_0} = ju$ et $\dfrac{p^2}{\omega_0^2} = -u^2$:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{K}{1 - u^2 + j\,2m\,u} \qquad \text{d'où} \qquad T = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2m\,u)^2}}$$

5. $600\,\text{tr/min}$: $f = 10\,\text{Hz}$, $u \approx 0{,}993$:

$$\frac{T}{K} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0{,}993^2)^2 + (2 \times 0{,}158 \times 0{,}993)^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{T}{K} \approx 3{,}2}$$

$1\,500\,\text{tr/min}$: $f = 25\,\text{Hz}$, $u \approx 2{,}48$: $\boxed{\dfrac{T}{K} \approx 0{,}19}$ $(-14{,}4\,\text{dB})$.

À $1\,500\,\text{tr/min}$, la suspension filtre bien : les vibrations sont divisées par 5. À $600\,\text{tr/min}$, la fréquence de rotation coïncide avec f_0 : c'est la **résonance**, le déplacement est amplifié d'un facteur 3 environ, d'où les vibrations et le bruit transmis au bâtiment.

6. Interdire dans le variateur la plage de vitesse voisine de $600\,\text{tr/min}$ (fonction « sauts de fréquence ») ; remplacer les plots par des plots plus souples, pour que f_0 soit nettement inférieure à la plus petite fréquence de rotation utilisée (au moins $\sqrt{2}$ fois plus petite, en pratique 2 à 3 fois) ; augmenter l'amortissement ; faire équilibrer le rotor pour réduire le balourd.

✓ Corrigé de l'exercice 15.6 – Identification de la boucle de vitesse d'un variateur

A- Identification

1. La vitesse dépasse sa valeur finale puis oscille : un 1er ordre ne présente jamais de dépassement. De plus, la tangente à l'origine est horizontale. C'est un 2e ordre en régime **pseudo-périodique** ($m < 1$).

2. $n_\infty = 1\,000\,\text{tr/min}$ pour une consigne de $1\,000\,\text{tr/min}$: $\boxed{K = 1}$ (pas d'erreur statique).

3. On lit $n_{max} \approx 1\,160\,\text{tr/min}$ à $t_{pic} \approx 0{,}18\,\text{s}$.

$$D_\% = \frac{1160 - 1000}{1000 - 0} \times 100 \quad \text{soit} \quad \boxed{D_\% \approx 16\,\%}$$

4. $D = 0{,}16$, d'où $\ln D \approx -1{,}83$:

$$m = \frac{1{,}83}{\sqrt{\pi^2 + 1{,}83^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{m \approx 0{,}5}$$

$T_p = 2\,t_{pic} \approx 0{,}36\,\text{s}$, d'où

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1 - m^2}} = \frac{2\pi}{0{,}36 \times 0{,}866} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 \approx 20\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

5. $\dfrac{2m}{\omega_0} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05\,\text{s}$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2} = 0{,}002\,5\,\text{s}^2$:

$$\boxed{T(p) = \frac{1}{1 + 0{,}05\,p + 0{,}002\,5\,p^2}}$$

6. Pour $m = 0{,}5$, $t_{5\,\%}\,\omega_0 \approx 5{,}3$, soit $t_{5\,\%} \approx 5{,}3/20 \approx 0{,}26\,\text{s}$. Sur le relevé, la vitesse redescend sous $1\,050\,\text{tr/min}$ vers $0{,}26\,\text{s}$ et reste ensuite dans la bande $[950\,;1050]$ (le premier minimum vaut environ $973\,\text{tr/min}$) : les deux valeurs concordent.

B- Comportement fréquentiel

7. $m = 0{,}5 < 0{,}707$: il y a résonance.

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2m^2} = 20\sqrt{0{,}5} \approx 14{,}1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}} \approx 1{,}155 \quad \text{soit} \quad \boxed{G_{max} \approx 1{,}25\,\text{dB}}$$

8. $x = 25{,}4/20 = 1{,}27$: $(1 - x^2)^2 + (2mx)^2 = (1 - 1{,}613)^2 + 1{,}27^2 \approx 1{,}989$, d'où $G = -10\log 1{,}989 \approx -3{,}0\,\text{dB}$ ✓. La bande passante de la boucle est donc d'environ $25\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $4\,\text{Hz}$.

C- Nouveau réglage

9. $D_{\%} = 100\,e^{-\pi\times 0{,}7/\sqrt{1-0{,}49}}$ soit $\boxed{D_{\%} \approx 4{,}6\,\%}$ et $t_{5\,\%} \approx 3/\omega_0 = 3/20$ soit $\boxed{t_{5\,\%} \approx 0{,}15\,\text{s}}$

Le dépassement passe de $160\,\text{tr/min}$ à $46\,\text{tr/min}$ et le tapis se stabilise presque deux fois plus vite : les à-coups (accélération puis décélération brutales) qui renversaient les bouteilles sont fortement réduits. On peut compléter par une rampe d'accélération sur la consigne.

Méthode Identifier un 2e ordre sur un relevé : K par les valeurs finales, m par le dépassement, ω_0 par la pseudo-période (ou l'instant du premier maximum). Vérifier ensuite la cohérence avec le temps de réponse lu sur l'abaque.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 15.A – Chaîne de mesure vibratoire d'un groupe motopompe

Grâce au suiveur, les deux filtres fonctionnent à vide : on les étudie d'abord séparément (parties A et B), puis on associe leurs fonctions de transfert (partie C).

Partie A – Filtre passe-haut

A.1. À vide, C_1 et R_1 sont parcourus par le même courant. Pont diviseur en Laplace :

$$T_1(p) = \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{C_1 p}} = \frac{R_1 C_1\, p}{1 + R_1 C_1\, p} = \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p} \qquad \tau_1 = R_1 C_1$$

$\tau_1 = 68 \times 10^{3} \times 10^{-6}$ soit $\boxed{\tau_1 = 68\,\text{ms}}$ $\qquad f_{c1} = \dfrac{1}{2\pi\tau_1}$ soit $\boxed{f_{c1} \approx 2{,}34\,\text{Hz}}$

A.2. $T_1(0) = 0$: la composante continue est complètement bloquée par C_1. Le filtre supprime la tension de polarisation de 12 V pour ne garder que la partie variable, image des vibrations.

A.3. $e(p) = \dfrac{12}{p}$, donc $s_1(p) = \dfrac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p} \times \dfrac{12}{p} = \dfrac{12\,\tau_1}{1+\tau_1 p}$.

$$s_1(0^+) = \lim_{p\to\infty} \frac{12\,\tau_1 p}{1+\tau_1 p} = 12\,\text{V} \qquad s_1(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{12\,\tau_1 p}{1+\tau_1 p} = 0$$

La table $\left(e^{-t/\tau} \leftrightarrow \dfrac{\tau}{1+\tau p}\right)$ donne $\boxed{s_1(t) = 12\,e^{-t/\tau_1}}$: la tension saute à 12 V puis décroît vers 0.

A.4. $12\,e^{-t/\tau_1} < 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; t > \tau_1 \ln\!\left(12/0{,}01\right) = 0{,}068 \times \ln 1200$ soit $\boxed{t > 0{,}48\,\text{s}}$

Le critère habituel $3\tau_1 \approx 0{,}2\,\text{s}$ ne suffit pas ici : 5 % de 12 V font encore 0,6 V, bien plus que le signal vibratoire. Le logiciel doit ignorer la première demi-seconde de mesure après la mise sous tension.

Partie B – Filtre passe-bas

B.1. $T_2(p) = \dfrac{1}{1+\tau_2 p}$ avec $\tau_2 = R_2 C_2 = 10^{3} \times 33 \times 10^{-9} = 33\,\mu\text{s}$;

$$\boxed{f_{c2} = \frac{1}{2\pi\tau_2} \approx 4{,}82\,\text{kHz}}$$

B.2. Il élimine le bruit à haute fréquence avant la numérisation : une composante de fréquence supérieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage serait vue, après échantillonnage, comme une fausse vibration à basse fréquence (filtre « anti-repliement »).

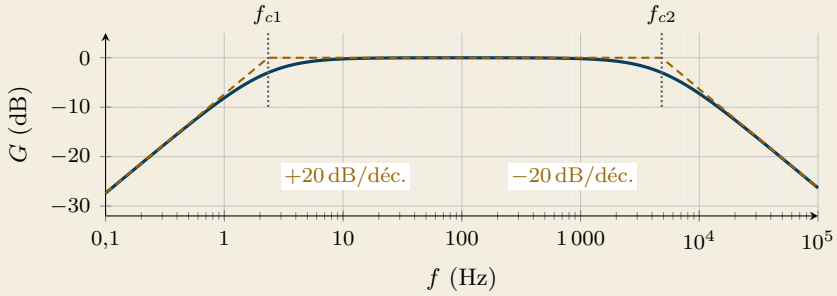
Partie C – Chaîne complète

C.1. Grâce au suiveur, les fonctions de transfert se multiplient :

$$T(p) = T_1(p)\,T_2(p) = \frac{\tau_1 p}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

C'est un **passe-bande** (large) : il bloque le continu et les très basses fréquences ainsi que les hautes fréquences.

C.2. Les gains en dB s'additionnent : pente de $+20\,\text{dB/décade}$ jusqu'à f_{c1} (à 0,1 Hz : $20\log\frac{0{,}1}{2{,}34}\approx -27\,\text{dB}$), palier à 0 dB de f_{c1} à f_{c2}, pente de $-20\,\text{dB/décade}$ au-delà (à 100 kHz : $-20\log\frac{100}{4{,}82}\approx -26\,\text{dB}$).



C.3. $G(10\,\text{Hz})\approx -0{,}23\,\text{dB}$; $G(25\,\text{Hz})\approx -0{,}04\,\text{dB}$; à 3 kHz : $\boxed{G\approx -1{,}42\,\text{dB}}$

À 3 kHz, l'atténuation dépasse 1 dB : le cahier des charges **n'est pas respecté** en haut de la bande utile, car f_{c2} est trop proche de 3 kHz.

Partie D – Exploitation et amélioration

D.1. Amplitudes à l'entrée : $0{,}8\,g\to 80\,\text{mV}$; $0{,}15\,g\to 15\,\text{mV}$; bruit 50 mV. En sortie :

$$25\,\text{Hz} : 80\times 0{,}996\approx 79{,}7\,\text{mV}\qquad 3\,\text{kHz} : 15\times 0{,}849\approx 12{,}7\,\text{mV}$$
$$20\,\text{kHz} : 50\times 0{,}234\approx 11{,}7\,\text{mV}$$

Le défaut de roulement est sous-estimé de 15 % et le bruit résiduel est presque aussi grand que lui.

D.2. $f'_{c2}=1/(2\pi\times 10^3\times 10^{-8})\approx 15{,}9\,\text{kHz}$; $G(3\,\text{kHz})\approx -0{,}15\,\text{dB}$ ✓ ; $G(20\,\text{kHz})\approx -4{,}1\,\text{dB}$ (bruit $\approx 31\,\text{mV}$).

Conclusion : avec 10 nF, la bande utile est respectée, mais le bruit à 20 kHz est presque trois fois plus grand qu'avant. Un filtre du 1er ordre ($-20\,\text{dB/décade}$) est trop peu sélectif pour séparer 3 kHz et 20 kHz : il faut un passe-bas d'ordre plus élevé (2e ordre ou plus, $-40\,\text{dB/décade}$) avec f_{c2} vers 6 kHz à 8 kHz.

✓ Corrigé du sujet BTS 15.B – Filtre de sortie d'une alimentation sans interruption

Partie A – Modélisation

A.1. $R=\dfrac{U^2}{P}=\dfrac{230^2}{5000}$ soit $\boxed{R\approx 10{,}6\,\Omega}$

A.2. Loi des nœuds : $i_L=C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\dfrac{s}{R}$. Loi des mailles : $e=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+s$. En remplaçant i_L :

$$e=LC\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s$$

A.3. $T(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{L}{R}\,p + LC\,p^2}$. Identification : $K = 1$, $\dfrac{1}{\omega_0^2} = LC$, $\dfrac{2m}{\omega_0} = \dfrac{L}{R}$, d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad m = \frac{L\,\omega_0}{2R} = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

A.4. $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2{,}5 \times 10^{-3} \times 10^{-5}}} \approx 6\,325\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit $\boxed{f_0 \approx 1\,007\,\text{Hz}}$

$$m = \frac{1}{2 \times 10{,}58}\sqrt{\frac{2{,}5 \times 10^{-3}}{10^{-5}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{m \approx 0{,}75}$$

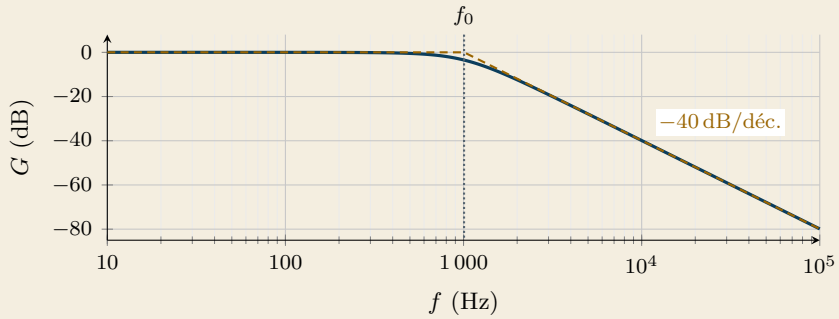
Partie B – Réponse fréquentielle en charge

B.1. À 50 Hz, $x = 50/1007 \approx 0{,}050$: $T \approx 0{,}999\,7$, $\boxed{G \approx 0\,\text{dB}}$

À 16 kHz, $x \approx 15{,}9$: $T = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2mx)^2}} \approx 3{,}96 \times 10^{-3}$, $\boxed{G \approx -48{,}1\,\text{dB}}$; asymptote : $-40 \log 15{,}9 \approx -48{,}1$ dB, identique.

B.2. Fondamental : $325 \times 0{,}999\,7 \approx 325$ V (transmis sans perte) ; harmoniques : $200 \times 3{,}96 \times 10^{-3} \approx 0{,}79$ V. La tension de sortie est pratiquement sinusoïdale : le filtre remplit son rôle.

B.3. Palier à 0 dB jusqu'à $f_0 \approx 1$ kHz, puis pente de -40 dB/décade (-40 dB à 10 kHz, -80 dB à 100 kHz). Avec $m \approx 0{,}75 > 0{,}707$, pas de résonance : la courbe réelle reste sous l'asymptote ($-3{,}5$ dB en f_0).



Partie C – Réponse indicielle en charge

C.1. $m \approx 0{,}75 < 1$: régime pseudo-périodique, mais très amorti.

$$D_\% = 100\,e^{-\pi \times 0{,}747/\sqrt{1-0{,}747^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{D_\% \approx 2{,}9\,\%}$$

C.2. Pour $m \approx 0{,}75$, $t_{5\,\%}\,\omega_0 \approx 3{,}1$, d'où $\boxed{t_{5\,\%} \approx \dfrac{3{,}1}{6325} \approx 0{,}5\,\text{ms}}$

C'est 40 fois moins que la période du réseau (20 ms) : le régime transitoire du filtre est imperceptible pour les récepteurs.

Partie D – Fonctionnement à vide

D.1. À vide, r, L et C sont en série : $e = r\,i + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + s$ avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, d'où $LC\,s'' + rC\,s' + s = e$. Par identification, $\dfrac{2m}{\omega_0} = rC$:

$$m = \frac{r\,C\,\omega_0}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{0{,}4}{2}\sqrt{\frac{10^{-5}}{2{,}5\times10^{-3}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{m \approx 0{,}013}$$

$D_{\%} = 100\,e^{-\pi\times0{,}012\,6} \approx 96\,\%$: après une variation brusque de e, la sortie dépasse presque du double (jusqu'à 640 V pour un échelon de 325 V) et oscille longtemps vers 1 kHz : risque de surtension pour le matériel.

D.2. $T_{max} = \dfrac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$ soit $\boxed{T_{max} \approx 39{,}5\ (31{,}9\,\text{dB})}$

Harmonique de rang 21 : $x = 1050/1\,006{,}6 \approx 1{,}043$; à vide, $T \approx 10{,}9$ et l'amplitude devient $3\times10{,}9 \approx 33\,\text{V}$! En charge nominale, $T \approx 0{,}64$ et l'amplitude n'est que de 1,9 V.

D.3. $R = \dfrac{1}{2\times0{,}7}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{15{,}8}{1{,}4}$ soit $\boxed{R \approx 11{,}3\,\Omega}$ (charge de 4,7 kW environ).

Conclusion : le filtre n'est bien amorti que près de la pleine charge. À vide, seule la résistance de la bobine amortit : le filtre résonne vers 1 kHz, amplifie les harmoniques voisins et crée des surtensions. Il faut un amortissement indépendant de la charge (branche R–C en parallèle sur C, ou amortissement actif par la commande) et vérifier que la nouvelle bobine n'est pas moins résistante que l'ancienne.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ mettre un système en équation et écrire $T(p)$; — ex. 15.1, 15.3, 15.5
- ☐ passer en notation complexe pour obtenir $\underline{T}(j\omega)$ et $T(p)$; — ex. 15.1, 15.3
- ☐ exploiter une réponse indicielle du 1er ordre (τ, $t_{5\,\%}$) ; — ex. 15.2, 15.3
- ☐ calculer et identifier ω_0, m et le dépassement d'un 2e ordre ; — ex. 15.5, 15.6
- ☐ exploiter un filtre à l'aide des formules données (gain, coupure) ; — ex. 15.1, sujet A
- ☐ choisir un filtre et repérer une résonance. — ex. 15.4, sujet B

Notes

CHAPITRE

16

Régulation et asservissement

Boucle fermée, schémas blocs, performances, correcteurs PID et méthode de Broïda

Dans ce chapitre

- Chaîne ouverte, boucle fermée, schéma fonctionnel
- Algèbre des schémas blocs, FTBO(p) et FTBF(p)
- Stabilité, précision, rapidité, dépassement
- Erreur statique et dilemme stabilité–précision
- Correcteurs TOR, P, PI et PID, stabilité
- Réglage par la méthode de Broïda, exemples industriels

Objectifs

- ✓ Établir le schéma fonctionnel d'une boucle de régulation
- ✓ Calculer FTBO(p), FTBF(p) et l'erreur statique
- ✓ Mesurer et prévoir les performances d'une boucle
- ✓ Choisir et régler un correcteur par la méthode de Broïda

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 16

Cours — Chapitre 16

16.1 Régulation et asservissement

Un four doit rester à 200 °C même quand on ouvre sa porte, un convoyeur doit garder sa vitesse quand on le charge, une cuve ne doit ni déborder ni se vider quand le soutirage varie. Dans tous ces cas, on veut **maîtriser une grandeur physique** malgré des influences extérieures que l'on ne contrôle pas : c'est le rôle d'une boucle de régulation.

D

Définition **Grandeur réglée** x : grandeur physique que l'on veut maîtriser (température, vitesse, niveau, pression…).
Consigne w : valeur que l'on souhaite donner à la grandeur réglée.
Grandeur réglante : grandeur sur laquelle on agit pour modifier x (puissance de chauffe, tension d'induit, débit entrant…) ; elle est pilotée par la **commande** y, souvent exprimée en % de sa plage.
Perturbation z : grandeur extérieure, non maîtrisée, qui fait varier x (porte ouverte, couple de charge, soutirage…).

Ex

Exemple : le régulateur de vitesse d'une voiture Grandeur réglée x : la vitesse du véhicule ; consigne w : la vitesse affichée par le conducteur ; commande y : l'ouverture du papillon d'admission (ou le couple demandé au moteur électrique) ; perturbations z : la pente de la route, le vent, la charge du véhicule. En montée, la vitesse tend à baisser : le calculateur mesure l'écart et augmente le couple jusqu'à retrouver la vitesse affichée.

Régulation ou asservissement ?

D

Régulation La consigne est **fixe** (ou rarement modifiée). Le rôle principal de la boucle est de **compenser les perturbations**.
Ex. : température d'un four, niveau d'une cuve, pression d'un réseau d'air comprimé.

D

Asservissement La consigne **varie** : la grandeur réglée doit la **suivre** le plus fidèlement possible.
Ex. : vitesse d'un moteur qui suit une rampe, position d'un axe de machine-outil, d'un robot.

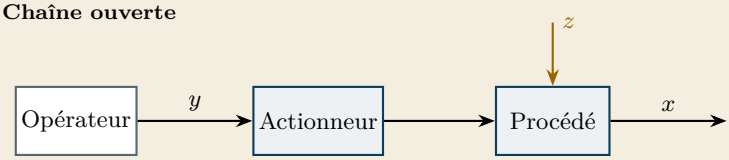
Les deux problèmes se traitent avec les mêmes outils ; seule change la grandeur d'entrée que l'on étudie (variation de consigne ou de perturbation). Le tableau suivant donne les boucles les plus courantes en électrotechnique.

Grandeur réglée	Grandeur réglante (actionneur)	Exemple
Température	puissance de chauffe (gradateur et résistances)	four, étuve, bain
Niveau	débit entrant (pompe et variateur, vanne)	cuve, bâche, château d'eau
Pression	vitesse du compresseur ou de la pompe	air comprimé, surpresseur
Vitesse	tension d'induit (hacheur) ou fréquence (onduleur)	convoyeur, ventilateur
Position	couple du moteur (servomoteur)	axe de robot, ascenseur
Courant	rapport cyclique du hacheur	boucle de courant d'un variateur

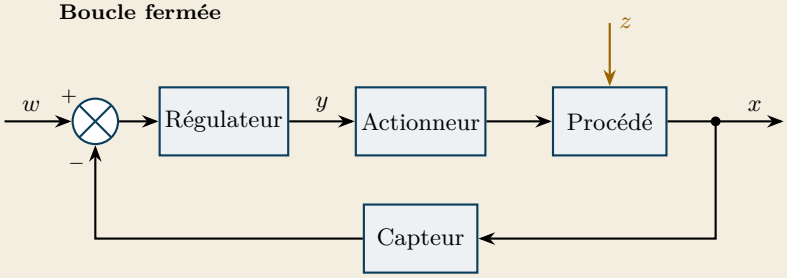
Chaîne ouverte et boucle fermée

En **chaîne ouverte**, l'opérateur fixe la commande y une fois pour toutes ; rien ne mesure la grandeur réglée. En **boucle fermée**, un capteur mesure x en permanence, le régulateur compare la mesure à la consigne et modifie la commande tant qu'il reste un écart.

Chaîne ouverte



Boucle fermée



	Chaîne ouverte	Boucle fermée
Mesure de x	non	oui (capteur)
Perturbations	non corrigées	corrigées
Précision	dépend du réglage manuel	bonne (écart nul avec action intégrale)
Risque d'instabilité	aucun	oui, si le correcteur est mal réglé
Coût	faible	capteur et régulateur en plus

Ex

Exemple : four de traitement thermique, porte ouverte Un four est maintenu à 200 °C. À $t = 600$ s, on ouvre la porte pour charger des pièces : les pertes augmentent. En chaîne ouverte, la puissance de chauffe reste la même et la température se stabilise 12 °C plus bas, sans que rien ne la corrige. En boucle fermée (correcteur PI), le régulateur augmente la puissance : la température baisse d'environ 1 °C puis revient à la consigne.

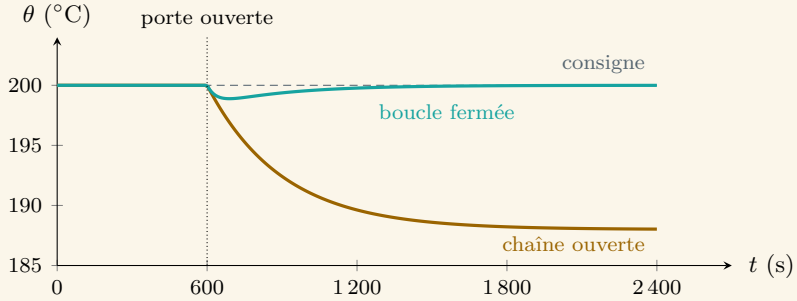
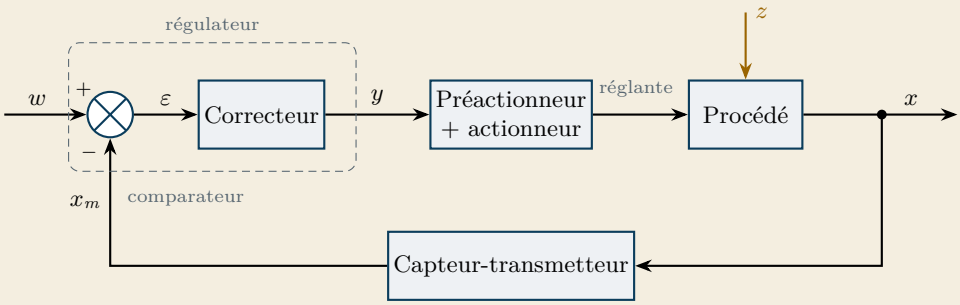


Schéma fonctionnel d'une boucle de régulation

Le **schéma fonctionnel** (ou schéma bloc) représente la boucle par des blocs reliés par des flèches : chaque flèche porte une grandeur, chaque bloc transforme sa grandeur d'entrée en grandeur de sortie.



Symbole	Grandeur	Sur un régulateur industriel
w	consigne	SP (*set point*)
x ou x_m	grandeur réglée, mesure	PV (*process value*)
$\varepsilon = w - x$	écart	calculé par le régulateur
y	commande (en %)	OUT (*output*)
z	perturbation	–

Le comparateur et le correcteur forment le **régulateur** : un appareil autonome ou, très souvent, un bloc PID dans le programme d'un **automate programmable**, qui lit la mesure (entrée analogique 4–20 mA) et pilote le préactionneur (sortie analogique vers un gradateur, un variateur, une vanne).

Méthode : établir le schéma fonctionnel

1. Identifier la grandeur réglée x (celle que l'on veut maîtriser).
2. Identifier la grandeur réglante et l'actionneur qui agit sur elle.
3. Lister les perturbations z qui agissent sur le procédé.
4. Identifier le capteur-transmetteur qui mesure x.
5. Placer les blocs dans l'ordre, puis les flèches : la mesure revient sur l'entrée « $-$ » du comparateur.

Exemple : lire la mesure d'un transmetteur 4–20 mA Un transmetteur de température d'étendue 0 °C à 250 °C délivre 4 mA à 0 °C et 20 mA à 250 °C. Pour $I = 16{,}8\,\text{mA}$:

$$x = \frac{I - 4}{20 - 4} \times 250 = \frac{12{,}8}{16} \times 250 = 200\,^\circ\text{C}$$

Sens d'action

Définition Un procédé est **direct** si x augmente quand y augmente (four : plus de chauffe, plus chaud). Il est **inverse** si x diminue quand y augmente (cuve dont la vanne commandée est sur la sortie).

À retenir · Choix du sens du régulateur Le régulateur doit agir en sens contraire du procédé : **procédé direct** $\Rightarrow$ **régulateur inverse** ; **procédé inverse** $\Rightarrow$ **régulateur direct**. Ainsi, si la mesure dépasse la consigne, la commande évolue dans le sens qui la fait redescendre.

Piège classique Un régulateur réglé dans le mauvais sens amplifie l'écart au lieu de le corriger : la commande part en butée (0 % ou 100 %) et la grandeur réglée s'éloigne de la consigne. C'est la première chose à vérifier lors d'une mise en service.

16.2 Schémas blocs et fonctions de transfert

Fonction de transfert d'un bloc

On décrit chaque bloc par sa **fonction de transfert**, rapport de la grandeur de sortie sur la grandeur d'entrée, écrites avec la variable de Laplace p (voir le chapitre sur les systèmes linéaires). Pour des conditions initiales nulles, dériver une grandeur revient à la multiplier par p, l'intégrer à la diviser par p.

À retenir

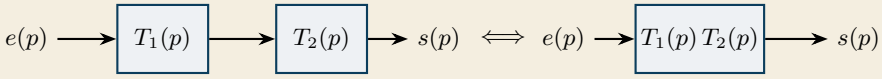
$$T(p) = \frac{s(p)}{e(p)} \quad \Longleftrightarrow \quad s(p) = T(p) \times e(p)$$

Bloc	Fonction de transfert	Exemple
gain pur	K	capteur, transmetteur, correcteur P
premier ordre	$\dfrac{K}{1+T\,p}$	four, moteur à courant continu
intégrateur	$\dfrac{K}{T\,p}$	niveau d'une cuve, position d'un axe
retard pur	$e^{-\tau p}$	transport de matière sur un convoyeur

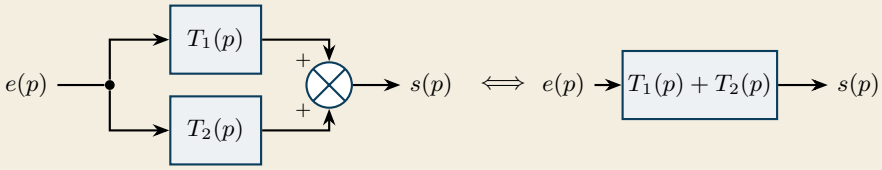
Piège classique Dans ce chapitre, T désigne une **constante de temps** et τ un **retard pur** (temps mort), comme sur les régulateurs industriels. Ne pas confondre la constante de temps T avec la fonction de transfert $T(p)$ d'un bloc, ni τ avec la constante de temps des chapitres précédents.

Algèbre des schémas blocs

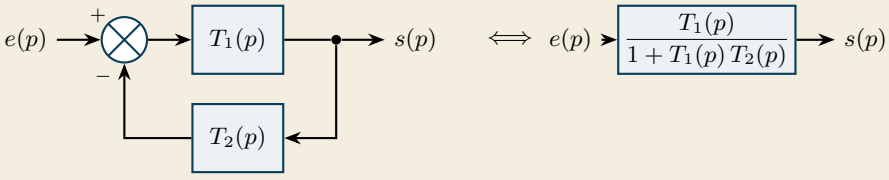
En série : les fonctions de transfert se multiplient



En parallèle : elles s'additionnent



Boucle : formule de Black



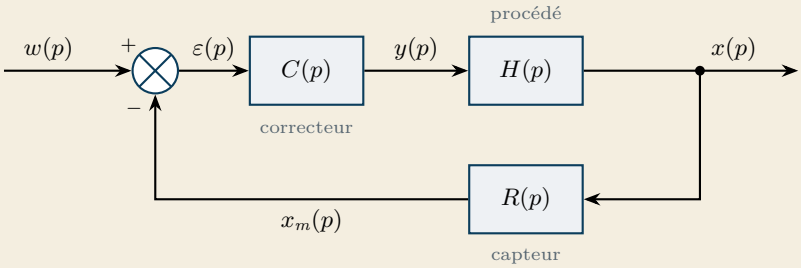
On réduit un schéma bloc comme un réseau de résistances : on remplace pas à pas les groupes en série, en parallèle et les boucles par leur bloc équivalent.

+

Déplacer un sommateur ou un point de prélèvement – hors programme Lorsqu'un point de prélèvement ou un sommateur gêne la réduction, on le déplace en ajoutant le bloc qui conserve les grandeurs : un sommateur déplacé en amont d'un bloc $T(p)$ voit son entrée annexe divisée par $T(p)$; un point de prélèvement déplacé en aval de $T(p)$ voit sa branche multipliée par $1/T(p)$.

Fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée

On note $C(p)$ le correcteur, $H(p)$ le procédé (actionneur compris) et $R(p)$ la chaîne de retour (capteur-transmetteur).



D

Définition La **fonction de transfert en boucle ouverte** FTBO(p) s'obtient en **coupant la boucle** juste avant le comparateur : c'est le rapport de la mesure qui revient sur l'écart qui part. Les trois blocs sont alors en série.
La **fonction de transfert en boucle fermée** FTBF(p) relie la grandeur réglée à la consigne, la boucle étant fermée.

Démonstration de la formule de Black. Comparateur : $\varepsilon(p) = w(p) - R(p)\,x(p)$. Chaîne directe : $x(p) = C(p)\,H(p)\,\varepsilon(p) = C(p)\,H(p)\,\big[w(p) - R(p)\,x(p)\big]$. On regroupe les termes en $x(p)$: $x(p)\,\big[1 + C(p)\,H(p)\,R(p)\big] = C(p)\,H(p)\,w(p)$.

★

À retenir

$$\text{FTBO}(p) = \frac{x_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p)\,H(p)\,R(p)$$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{x(p)}{w(p)} = \frac{C(p)\,H(p)}{1 + C(p)\,H(p)\,R(p)}$$

« Chaîne directe sur $1 + \text{FTBO}(p)$ ». Retour unitaire ($R(p) = 1$) :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

16

Exemple $C(p) = 5$, $H(p) = \dfrac{2}{1+10\,p}$, $R(p) = 0{,}5$:

$$\text{FTBO}(p) = \frac{5 \times 2 \times 0{,}5}{1+10\,p} = \frac{5}{1+10\,p}$$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{10}{1+10\,p}}{1+\dfrac{5}{1+10\,p}} = \frac{10}{6+10\,p} = \frac{1{,}67}{1+1{,}67\,p}$$

La boucle fermée est un premier ordre de gain statique 1,67 et de constante de temps 1,67 s, six fois plus rapide que le procédé seul.

Méthode

1. Écrire la FTBO(p) : produit des blocs de la boucle.
2. Appliquer la formule de Black.
3. Multiplier numérateur et dénominateur pour faire disparaître les fractions, puis mettre sous une forme connue (constante 1 au dénominateur) et identifier le gain statique et la constante de temps.

Effet d'une perturbation – hors programme Si la perturbation agit sur le procédé à travers un bloc $H_z(p)$ (retour unitaire), la grandeur réglée vaut

$$x(p) = \text{FTBF}(p)\,w(p) + \frac{H_z(p)}{1+\text{FTBO}(p)}\,z(p)$$

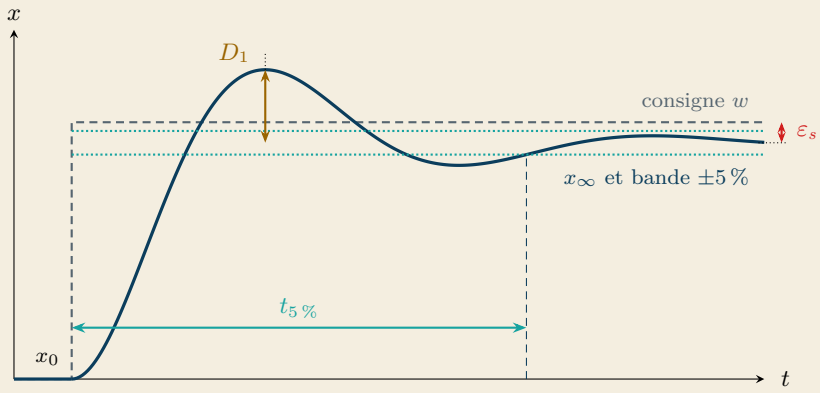
En chaîne ouverte, la perturbation agit par $H_z(p)$; en boucle fermée, son effet est divisé par $1+\text{FTBO}(p)$: plus le gain de boucle est grand, mieux la perturbation est rejetée.

16.3 Performances d'une boucle fermée

Les quatre critères

On juge une boucle sur sa réponse à un **échelon de consigne** (la consigne passe brusquement de w_0 à w_1) ou à un échelon de perturbation.

À retenir · Critères de performance **Stabilité** : la grandeur réglée tend vers une valeur finale x_∞ (les oscillations s'amortissent).
Précision : écart statique, en régime permanent, $\varepsilon_s = w - x_\infty$ (dans l'unité de x ou en % de la variation de consigne).
Rapidité : temps de réponse à 5 %, $t_{5\,\%}$, instant à partir duquel x reste dans la bande $x_\infty \pm 0{,}05\,(x_\infty - x_0)$, compté depuis l'échelon.
Amortissement : premier dépassement $D_1 = \dfrac{x_{max} - x_\infty}{x_\infty - x_0} \times 100$ (en %).



Méthode : mesurer les critères sur un enregistrement Lire la valeur finale x_∞ en fin d'enregistrement, puis le premier maximum x_{max}. Tracer la bande $x_\infty \pm 5\,\%$ de la variation et chercher $t_{5\,\%}$ **en partant de la fin** de l'enregistrement : c'est le dernier instant où la courbe sort de la bande.

Précision : erreur statique

Avec un correcteur P et un procédé de gain statique fini, il reste en général un écart permanent : une commande non nulle exige un écart non nul. Un intégrateur $1/p$ dans la FTBO(p) (action intégrale ou procédé) annule cet écart.

À retenir · Écart statique pour un échelon de consigne Δw

$$\text{procédé } \frac{K}{1+T\,p},\ \text{correcteur P} : \varepsilon_s = \frac{\Delta w}{1+K\,K_p}$$

$$\text{intégrateur dans la FTBO} : \varepsilon_s = 0$$

Exemple Procédé $\dfrac{K}{1+T\,p}$ avec $K\,K_p = 9$, échelon de consigne $\Delta w = 50\,°\text{C}$: $\varepsilon_s = \frac{50}{1+9} = 5\,°\text{C}$, soit $10\,\%$ de la variation de consigne. Pour descendre à $1\,\%$, il faudrait $K\,K_p = 99$.

Erreur statique d'une boucle quelconque – hors programme Avec un retour unitaire, $\varepsilon(p) = \dfrac{w(p)}{1+\text{FTBO}(p)}$. En régime permanent ($p \to 0$), seul compte le gain statique $K_{BO} = \text{FTBO}(0)$: $\varepsilon_s = \dfrac{\Delta w}{1+K_{BO}}$ sans intégrateur. Face à une perturbation, l'intégrateur n'annule l'écart que s'il est placé **en amont** du point où elle agit, donc dans le correcteur.

Rapidité : procédé du premier ordre avec correcteur P

Procédé $H(p) = \dfrac{K}{1+T\,p}$, correcteur proportionnel $C(p) = K_p$, retour unitaire :

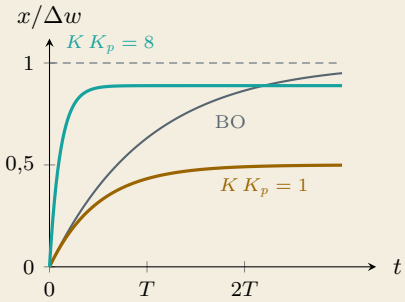
$$\text{FTBO}(p) = \frac{K\,K_p}{1+T\,p} \qquad \text{FTBF}(p) = \frac{K\,K_p}{1+T\,p+K\,K_p}$$

On divise numérateur et dénominateur par $1+K\,K_p$ pour retrouver la forme canonique du premier ordre (voir § 15.4) :

À retenir

$$\text{FTBF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF}\,p} \qquad K_{BF} = \frac{K\,K_p}{1+K\,K_p} \qquad T_{BF} = \frac{T}{1+K\,K_p}$$

La boucle fermée est $1+K\,K_p$ fois plus rapide que le procédé seul ($t_{5\,\%} = 3\,T_{BF}$), mais elle garde un écart statique $\varepsilon_s = \frac{\Delta w}{1+K\,K_p}$. Augmenter K_p améliore précision et rapidité ; en pratique, la saturation de la commande (100 %) et le retard du procédé, toujours présent, limitent le gain.

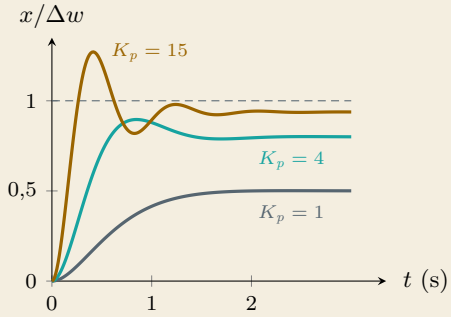


Exemple Four : $K = 2\,°\text{C}/\%$, $T = 300\,\text{s}$, $K_p = 4\,\%/°\text{C}$, d'où $K\,K_p = 8$. $K_{BF} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$; $T_{BF} = \frac{300}{9} \approx 33{,}3\,\text{s}$. Pour un échelon de consigne de 50 °C : $\varepsilon_s = \frac{50}{9} \approx 5{,}6\,°\text{C}$ et $t_{5\,\%} = 3 \times 33{,}3 = 100\,\text{s}$ au lieu de 900 s en chaîne ouverte.

Dépassement et dilemme stabilité–précision

À retenir · Dilemme stabilité–précision En cherchant à rendre la boucle plus précise et plus rapide (gain élevé), on la rend moins stable (dépassement, oscillations, puis instabilité). Le réglage d'un correcteur est toujours un **compromis**.

Un procédé réel comporte plusieurs constantes de temps : la réponse de la boucle fermée peut alors **dépasser** la consigne et osciller avant de se stabiliser. Exemple : $H(p) = \dfrac{1}{(1+p)(1+0{,}25\,p)}$ (temps en s) avec un correcteur P. Quand K_p augmente, l'écart statique diminue, mais le dépassement augmente : $D_1 \approx 0,\ 12\,\%$, 36 % pour $K_p = 1,\ 4,\ 15$.



Boucle fermée du second ordre – hors programme Avec deux constantes de temps, la boucle fermée se met sous la forme (voir § 15.5)

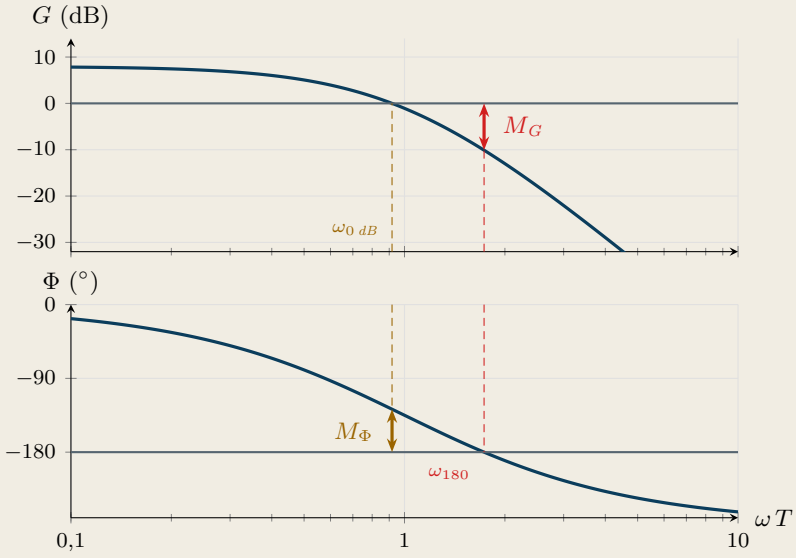
$$\text{FTBF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \dfrac{2m}{\omega_0}\,p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}} \qquad D_1 = 100\,\exp\!\left(\frac{-\pi\,m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \text{ (si } m < 1)$$

m : coefficient d'amortissement ; ω_0 : pulsation propre (rad·s^{-1}). Pas de dépassement si $m \geq 1$; le meilleur compromis est $m \approx 0{,}7$ ($D_1 \approx 5\,\%$, $t_{5\,\%} \approx 3/\omega_0$). Pour l'exemple ci-dessus, $\omega_0 = 2\sqrt{1+K_p}$ et $m = 1{,}25/\sqrt{1+K_p}$: m diminue quand K_p augmente.

16.4 Stabilité d'une boucle fermée

Une boucle est stable si la grandeur réglée tend vers une valeur finale après un échelon. Un procédé stable en chaîne ouverte peut devenir **instable** une fois la boucle fermée : avec un gain trop élevé ou un retard important, le régulateur corrige trop fort et trop tard, les oscillations ne s'amortissent plus, puis s'amplifient. C'est la limite du dilemme stabilité–précision : on règle toujours le gain en dessous de la valeur qui rend la boucle instable.

Point critique et marges de stabilité – hors programme Imaginons un signal sinusoïdal qui fait le tour de la boucle : s'il revient au comparateur déphasé de 180° (le « − » du comparateur ajoute encore 180°) et avec la même amplitude, il s'entretient tout seul. La boucle est à la limite de stabilité lorsque $\text{FTBO}(j\omega) = -1$ (**point critique**), c'est-à-dire $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$ et $\arg \text{FTBO}(j\omega) = -180°$. On garde une distance de sécurité au point critique, lue sur le diagramme de Bode de la FTBO (ci-dessous).

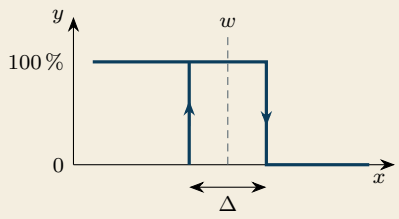


Marge de gain (à la pulsation ω_{180} où $\arg \text{FTBO} = -180°$) : $M_G = -20\log|\text{FTBO}(j\omega_{180})|$. **Marge de phase** (à la pulsation $\omega_{0\,dB}$ où $|\text{FTBO}| = 1$) : $M_\Phi = 180° + \arg \text{FTBO}(j\omega_{0\,dB})$. La boucle est stable si les deux marges sont positives ; on vise couramment $M_G \geq 10\,\text{dB}$ et $M_\Phi \approx 45°$.

Exemple (diagramme ci-dessus) : $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_{BO}}{(1+Tp)^3}$, d'argument $-3\arctan(\omega T)$ et de module $K_{BO}/\left(1+(\omega T)^2\right)^{3/2}$. L'argument vaut $-180°$ pour $\omega_{180}T = \sqrt{3}$, où le module vaut $K_{BO}/8$: la boucle est instable dès que $K_{BO} \geq 8$. Pour $K_{BO} = 2{,}5$: $M_G = 20\log\frac{8}{2{,}5} \approx 10{,}1\,\text{dB}$; le module vaut 1 pour $\omega_{0\,dB}T \approx 0{,}918$, d'où $M_\Phi = 180° - 3\arctan(0{,}918) \approx 52°$. Multiplier K_p par k translate la courbe de gain de $20\log k$ sans changer la phase ; un retard pur $e^{-\tau p}$ ajoute un déphasage $-\omega\tau$ qui réduit la marge de phase.

16.5 Les correcteurs

Régulation tout ou rien (TOR)



La commande ne prend que deux valeurs : marche ($y = 100\,\%$) ou arrêt ($y = 0$). Pour un procédé direct (four) : marche si $x < w - \frac{\Delta}{2}$, arrêt si $x > w + \frac{\Delta}{2}$. L'écart Δ entre les seuils est l'**hystérésis**. La grandeur réglée **oscille en permanence** autour de w ; un grand Δ espace les commutations (moins d'usure des contacteurs) mais augmente l'ondulation. Le TOR convient aux procédés lents : chauffage, chambre froide, chauffe-eau.

Les trois actions du correcteur PID

Le correcteur continu élabore la commande à partir de l'écart $\varepsilon = w - x$:

À retenir

$$y(t) = K_p\left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t + T_d\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d\,p\right)$$

K_p : gain (en % de commande par unité de x) ; T_i : temps d'intégrale (s) ; T_d : temps de dérivée (s).

Action proportionnelle (P). La commande est proportionnelle à l'écart : $y = K_p\,\varepsilon + y_0$. Elle réagit immédiatement, mais il reste toujours un écart statique : pour maintenir une commande différente de y_0, il faut un écart non nul.

Action intégrale (I). Tant qu'il reste un écart, la commande continue d'évoluer : l'action intégrale **annule l'écart statique**, y compris face à une perturbation. Trop forte (T_i trop petit), elle rend la réponse oscillante.

Action dérivée (D). Elle réagit à la vitesse de variation de l'écart : elle **anticipe**, amortit la réponse et réduit le dépassement. Elle n'agit pas sur l'écart statique et amplifie le bruit de mesure ; on l'utilise peu sur les mesures bruitées (débit, niveau agité).

Action	Stabilité	Rapidité	Précision
P ($K_p \nearrow$)	diminue	augmente	augmente (écart jamais nul)
I ($T_i \searrow$)	diminue	augmente un peu	écart statique nul
D ($T_d \nearrow$)	augmente	augmente	sans effet

Structures du correcteur PID

Les constructeurs proposent plusieurs structures ; les réglages ne sont pas les mêmes d'une structure à l'autre, d'où l'importance de lire la notice du régulateur.

★ **À retenir**

$$\text{mixte} : C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right) \qquad \text{série} : C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)(1 + T_d p)$$

$$\text{PI (série)} : C(p) = K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

Il existe aussi une structure **parallèle**, où les trois actions sont réglées indépendamment l'une de l'autre.

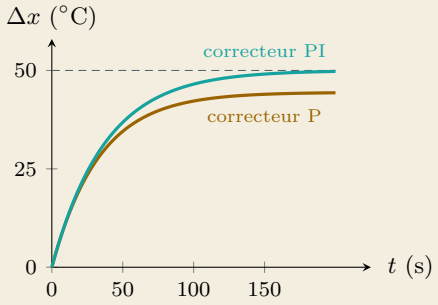
Correcteur PI à compensation de pôle.

Pour un procédé $H(p) = \dfrac{K}{1 + T p}$, on choisit $T_i = T$: le numérateur du correcteur simplifie le dénominateur du procédé.

$$\text{FTBO}(p) = \frac{K K_p}{T p}$$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{T}{K K_p} p}$$

Le gain statique de la FTBF vaut 1 : la grandeur réglée rejoint exactement la consigne. Avec le four précédent ($K K_p = 8$) : $T_{BF} = \frac{300}{8} = 37{,}5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.



\+ **Saturation et emballement intégral** – hors programme L'action intégrale continue d'intégrer quand la commande est en butée (100 %) : au retour, la mesure dépasse largement la consigne (« emballement intégral »). Les régulateurs industriels bloquent l'intégrale en saturation (fonction *anti-windup*).

16.6 Réglage d'un correcteur : la méthode de Broïda

Identification du procédé

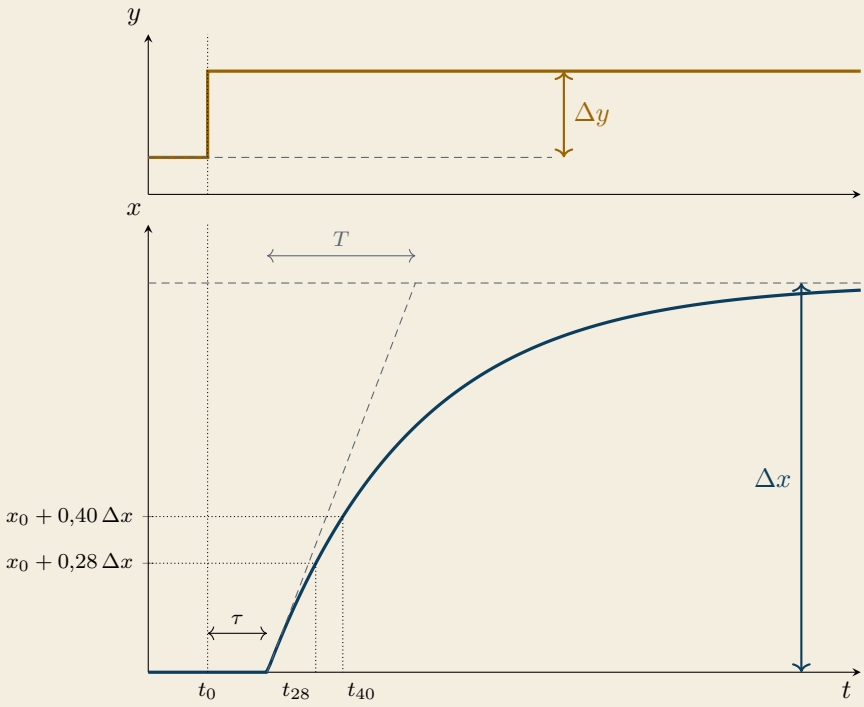
On passe le régulateur en mode **manuel** (boucle ouverte) ; quand la mesure est stable (x_0 pour y_0), on applique un échelon de commande Δy (typiquement 10 % à 20 %) et on enregistre $x(t)$ jusqu'à la nouvelle stabilisation. Broïda assimile le procédé stable à un **premier ordre retardé** :

À retenir

$$H(p) = \frac{x(p)}{y(p)} = \frac{K\,e^{-\tau p}}{1 + T\,p} \qquad K = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$T = 5{,}5\,(t_{40} - t_{28}) \qquad \tau = 2{,}8\,t_{28} - 1{,}8\,t_{40}$$

t_{28} et t_{40} : instants où $x = x_0 + 0{,}28\,\Delta x$ et $x_0 + 0{,}40\,\Delta x$, comptés depuis l'échelon de commande.



Choix et réglage du correcteur

Le rapport T/τ est la **réglabilité** du procédé : plus le retard est petit devant la constante de temps, plus le procédé est facile à régler. Un grand retard est l'ennemi de la régulation : le régulateur « voit » l'effet de sa commande trop tard.

À retenir · Tableaux de Broïda

T/τ	> 20	10 à 20	5 à 10	2 à 5	< 2
correcteur	TOR	P	PI	PID	cascade, anticipation…

Correcteur	K_p	T_i	T_d
P	$\dfrac{0{,}8\,T}{K\,\tau}$	–	–
PI (série)	$\dfrac{0{,}8\,T}{K\,\tau}$	T	–
PID série	$\dfrac{0{,}85\,T}{K\,\tau}$	T	$0{,}4\,\tau$
PID mixte	$\dfrac{T/\tau + 0{,}4}{1{,}2\,K}$	$T + 0{,}4\,\tau$	$\dfrac{T\,\tau}{2{,}5\,T + \tau}$

K en unité de x par % de commande ; K_p en % par unité de x (l'inverse) ; T_i et T_d en secondes.

Exemple : four de recuit Échelon de commande de 40 % à 50 % ; la température passe de 150 °C à 185 °C. On lit $t_{28} = 320\,\text{s}$ et $t_{40} = 410\,\text{s}$.

$$K = \frac{35}{10} = 3{,}5\,^\circ\text{C}/\% \qquad T = 5{,}5 \times (410 - 320) = 495\,\text{s}$$

$$\tau = 2{,}8 \times 320 - 1{,}8 \times 410 = 158\,\text{s}$$

Réglabilité $T/\tau \approx 3{,}1$: on choisit un **PID**. En structure mixte :

$$K_p = \frac{3{,}13 + 0{,}4}{1{,}2 \times 3{,}5} \approx 0{,}84\,\%/^\circ\text{C}$$

$$T_i = 495 + 0{,}4 \times 158 \approx 558\,\text{s} \qquad T_d = \frac{495 \times 158}{2{,}5 \times 495 + 158} \approx 56\,\text{s}$$

Méthode : régler une boucle en 4 étapes

1. Vérifier le sens d'action du procédé et régler le sens du régulateur.
2. Identifier K, T et τ par un essai en boucle ouverte (Broïda).
3. Calculer la réglabilité T/τ, choisir le correcteur et calculer ses réglages.
4. Passer en automatique et vérifier par un échelon de consigne : ε_s, D_1, $t_{5\,\%}$. Affiner si besoin : diminuer K_p ou augmenter T_i si la réponse oscille trop.

En ligne : simulateur de boucle PID (four régulé) : réglez K_p, T_i, T_d et observez écart statique, dépassement et temps de réponse ; identification de Broïda sur un enregistrement.

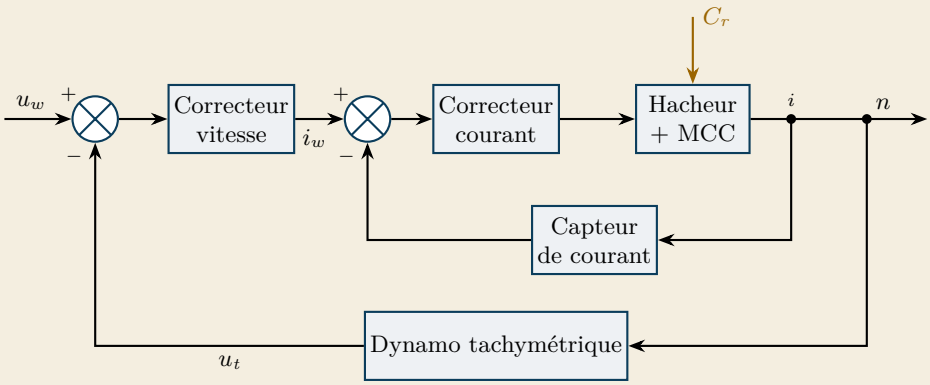
16.7 Exemples industriels

Régulation de température d'un four

Un four électrique est chauffé par des résistances alimentées par un **gradateur** commandé en 4–20 mA (ou par un relais statique en TOR) ; la température est mesurée par un **thermocouple** ou une sonde Pt100 et son transmetteur. Le procédé est direct, lent et retardé (inertie thermique, temps de diffusion de la chaleur) : on règle un PI ou un PID par la méthode de Broïda. Perturbations : ouverture de porte, charge froide, température ambiante. Ordres de grandeur : un four industriel de quelques centaines de litres a une constante de temps de 10 à 30 min et un retard de quelques minutes ; sa réglabilité est souvent comprise entre 3 et 10, d'où un PI ou un PID. Le gradateur est souvent commandé en train d'ondes (voir § 8.8) : il laisse passer un nombre entier de périodes du réseau sur une durée de cycle de quelques secondes, la proportion de périodes passantes étant égale à la commande y ; l'inertie thermique du four lisse ces impulsions de puissance.

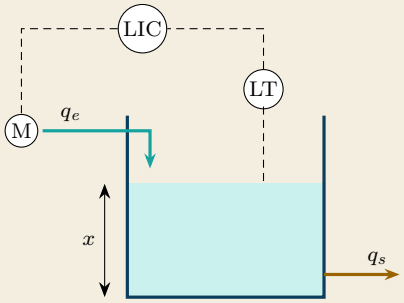
✗ **Piège classique** Placer le capteur loin des résistances (par exemple au fond d'une grande étuve) allonge le temps que met la chaleur à l'atteindre : le retard τ augmente, la réglabilité T/τ diminue et la boucle oscille. Il faut le placer dans une zone bien brassée.

Régulation de vitesse d'un moteur à courant continu



La vitesse n est mesurée par une dynamo tachymétrique (ou un codeur) qui fournit $u_t = k_t\, n$; la perturbation est le couple résistant C_r. Les variateurs utilisent une structure en **cascade** : une boucle de courant interne, très rapide, protège le moteur (limitation du courant) ; la boucle de vitesse externe lui fournit sa consigne. Avec une chaîne de retour $R(p) = k_t$ et une action intégrale, la vitesse atteinte vaut exactement $n_\infty = \dfrac{u_w}{k_t}$, quel que soit le couple de charge.

Régulation de niveau d'une cuve



LT : transmetteur de niveau ; LIC : régulateur indicateur de niveau ; M : pompe et variateur. Le niveau x d'une cuve de section S vérifie $S\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q_e - q_s$, soit :

$$x(p) = \frac{q_e(p) - q_s(p)}{S\,p}$$

Le procédé est un **intégrateur** : en chaîne ouverte, le moindre écart entre débits fait déborder ou vider la cuve.

Ex

Exemple Cuve de section $S = 10\,\mathrm{m}^2$, pompe telle que $q_e = k_q\,y$ avec $k_q = 0{,}001\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}/\%$, correcteur P de gain $K_p = 200\,\%/\mathrm{m}$.

$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{K_p\,k_q}{S\,p} = \frac{0{,}2}{10\,p}$$

contient un intégrateur : écart statique nul sur la consigne, avec $T_{BF} = \frac{S}{K_p\,k_q} = 50\,\mathrm{s}$. Mais si le soutirage augmente de $\Delta q_s = 0{,}02\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}$, la pompe doit débiter 20 % de plus, ce qui exige un écart permanent $\varepsilon = \frac{20}{200} = 0{,}1\,\mathrm{m}$: l'intégrateur du procédé, situé après la perturbation, ne l'annule pas. Il faut un **correcteur PI**.

Méthode : diagnostiquer une boucle en maintenance

1. **Mesure** : comparer la mesure affichée (PV) à un appareil de référence ; contrôler le courant du transmetteur (4–20 mA) et son étendue.
2. **Commande** : vérifier que la commande (OUT) n'est pas en butée à 0 % ou à 100 % ; si elle l'est, l'actionneur est sous-dimensionné, en défaut, ou le sens d'action est faux.
3. **Actionneur** : en mode manuel, modifier la commande et vérifier que la grandeur réglée réagit dans le bon sens.
4. **Réglages** : seulement ensuite, reprendre l'identification (Broïda) et les réglages K_p, T_i, T_d.

Ex

Exemple : chambre froide régulée en tout ou rien Une chambre froide doit rester à 3 °C ; le thermostat met le compresseur en marche au-dessus de 4 °C et l'arrête en dessous de 2 °C (hystérésis $\Delta = 2\,°\mathrm{C}$). Ici, le procédé est **inverse** (la commande fait baisser la température) : la marche est commandée quand la mesure dépasse le seuil haut. La température oscille entre 2 °C et 4 °C, un peu au-delà à cause du retard ; réduire Δ à 1 °C diminuerait l'ondulation mais doublerait à peu près le nombre de démarrages du compresseur, ce qui use le contacteur et le moteur.

L'essentiel

Chapitre 16

Boucle fermée, schémas blocs et critères de performance

Écart	$\varepsilon = w - x$
Mesure d'un transmetteur 4–20 mA	$x = x_{min} + \dfrac{I - 4}{16}\,(x_{max} - x_{min})$
Sens d'action	procédé direct $\Rightarrow$ régulateur inverse
Fonction de transfert	$T(p) = \dfrac{s(p)}{e(p)}$
Blocs en série, en parallèle	$T_1(p)\,T_2(p) \qquad T_1(p) + T_2(p)$
Boucle (formule de Black)	$\dfrac{T_1(p)}{1 + T_1(p)\,T_2(p)}$
Boucle ouverte	$\mathrm{FTBO}(p) = C(p)\,H(p)\,R(p)$
Boucle fermée	$\mathrm{FTBF}(p) = \dfrac{C(p)\,H(p)}{1 + C(p)\,H(p)\,R(p)}$
Retour unitaire	$\mathrm{FTBF}(p) = \dfrac{\mathrm{FTBO}(p)}{1 + \mathrm{FTBO}(p)}$
Écart statique	$\varepsilon_s = w - x_\infty$
Premier dépassement	$D_1 = \dfrac{x_{max} - x_\infty}{x_\infty - x_0} \times 100$
Temps de réponse à 5 %	x reste dans $x_\infty \pm 0{,}05\,(x_\infty - x_0)$

Précision, correcteurs et réglage par la méthode de Broïda

Écart statique, procédé du 1er ordre et correcteur P	$\varepsilon_s = \dfrac{\Delta w}{1 + K\,K_p}$
Écart statique, intégrateur dans la FTBO	$\varepsilon_s = 0$
Premier ordre et correcteur P	$K_{BF} = \dfrac{K\,K_p}{1 + K\,K_p} \qquad T_{BF} = \dfrac{T}{1 + K\,K_p}$
Premier ordre et PI ($T_i = T$)	$\text{FTBF}(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{T}{K\,K_p}\,p}$
PID mixte	$C(p) = K_p\left(1 + \dfrac{1}{T_i\,p} + T_d\,p\right)$
PI	$C(p) = K_p\,\dfrac{1 + T_i\,p}{T_i\,p}$
PID série	$C(p) = K_p\left(1 + \dfrac{1}{T_i\,p}\right)(1 + T_d\,p)$
Régulation TOR (procédé direct)	marche si $x < w - \dfrac{\Delta}{2}$ arrêt si $x > w + \dfrac{\Delta}{2}$
Modèle de Broïda	$H(p) = \dfrac{K\,e^{-\tau p}}{1 + T\,p} \qquad K = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$
Constante de temps, retard	$T = 5{,}5\,(t_{40} - t_{28}) \qquad \tau = 2{,}8\,t_{28} - 1{,}8\,t_{40}$
Choix du correcteur	$\dfrac{T}{\tau}$: >20 TOR 10–20 P 5–10 PI 2–5 PID
Réglage P et PI série	$K_p = \dfrac{0{,}8\,T}{K\,\tau} \qquad T_i = T$
Réglage PID série	$K_p = \dfrac{0{,}85\,T}{K\,\tau} \qquad T_i = T \qquad T_d = 0{,}4\,\tau$
Réglage PID mixte	$K_p = \dfrac{T/\tau + 0{,}4}{1{,}2\,K} \qquad T_i = T + 0{,}4\,\tau$
Réglage PID mixte (dérivée)	$T_d = \dfrac{T\,\tau}{2{,}5\,T + \tau}$

Exercices

Chapitre 16

Exercice 16.1 – Schéma fonctionnel d'une étuve de cuisson de peinture ★☆☆

Un équipementier automobile peint des pare-chocs, puis cuit la peinture dans une étuve à 80 °C. L'étuve est chauffée par des résistances alimentées par un gradateur, lui-même piloté par un régulateur. Une sonde Pt100 associée à un transmetteur 4–20 mA d'étendue 0 °C à 150 °C mesure la température de l'air. Les pare-chocs entrent froids dans l'étuve, par une porte qui s'ouvre à chaque chargement. Le nouveau technicien de maintenance doit comprendre la boucle avant d'intervenir.

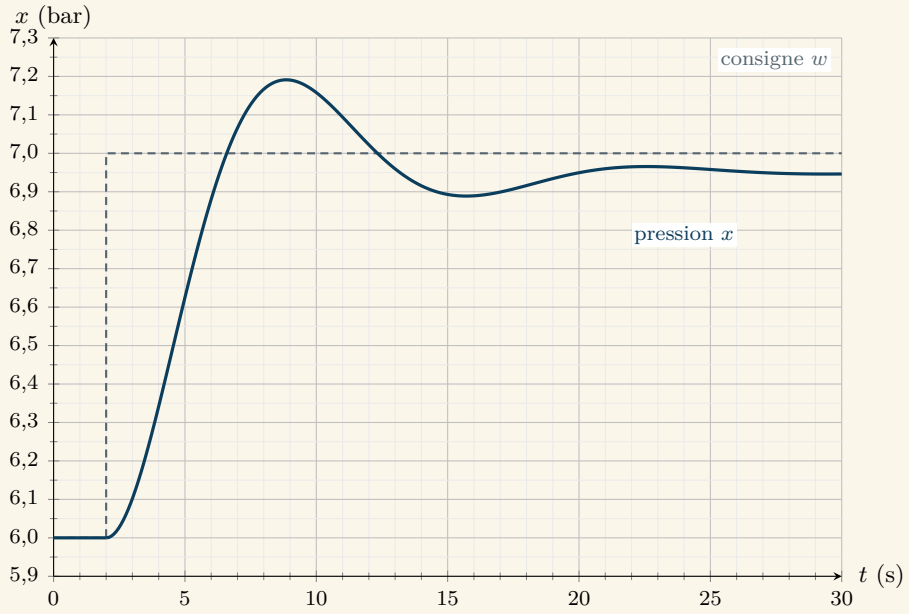
1. Préciser la grandeur réglée, la grandeur réglante, l'actionneur, le capteur et au moins deux perturbations.
2. Dessiner le schéma fonctionnel de la boucle en y faisant figurer w, ε, y, x et z.
3. La consigne reste fixée à 80 °C. S'agit-il d'une régulation ou d'un asservissement ? Pour une nouvelle peinture, la consigne doit suivre une rampe de montée de 20 °C à 120 °C en 10 min : que devient la réponse ?
4. Le transmetteur délivre $I = 12{,}4\,\text{mA}$. Calculer la mesure x, puis l'écart ε, en °C et en % de la consigne.
5. Le procédé est-il direct ou inverse ? En déduire le sens d'action à régler sur le régulateur.
6. Avant la mise en place du régulateur, un opérateur réglait le gradateur à la main sur 45 %. Expliquer ce qui se passait à chaque ouverture de porte.

→ corrigé p. 593

Exercice 16.2 – Réception d'une boucle de pression d'air comprimé ★☆☆

Une fonderie remplace le compresseur de son réseau d'air comprimé par une machine à vitesse variable, régulée en pression. À la réception du chantier, l'intégrateur fait un essai : la consigne de pression passe de 6,0 bar à 7,0 bar à l'instant $t = 2\,\text{s}$, et il enregistre la pression du réseau (ci-dessous). Le cahier des charges impose un écart statique inférieur à 2 % de la variation de consigne, un premier dépassement inférieur à 20 % et un temps de réponse à 5 % inférieur à 20 s. Le responsable maintenance vous demande de vérifier si la boucle peut être réceptionnée.

1. La boucle est-elle stable ? Justifier.
2. Relever la valeur finale x_∞. Calculer l'écart statique en bar et en % de la variation de consigne.
3. Relever la valeur maximale x_{max} et calculer le premier dépassement D_1.
4. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5 %, en expliquant la méthode.
5. Conclure sur la réception. Quelle action du correcteur faut-il ajouter ou renforcer pour chacun des critères non respectés ?



→ corrigé p. 594

Exercice 16.3 – Bain de dégraissage avant peinture ★★☆

Dans une ligne de traitement de surface, les pièces métalliques traversent un bain de dégraissage chauffé par un thermoplongeur. L'efficacité du dégraissage dépend fortement de la température : on veut pouvoir passer la consigne de 50 °C à 60 °C selon les séries, avec une erreur inférieure à 0,5 °C. Le régulateur actuel, réglé en proportionnel seul, laisse un écart que les opérateurs compensent en « trichant » sur la consigne. On vous demande d'étudier la boucle.

Données

- Autour du point de fonctionnement, le bain (thermoplongeur compris) a pour fonction de transfert $H(p) = \dfrac{K}{1+T\,p}$, avec $K = 1{,}6\,°\text{C}/\%$ et $T = 400\,\text{s}$; son retard est négligé.
- Retour unitaire ; échelon de consigne $\Delta w = 10\,°\text{C}$.

I- Correcteur proportionnel $C(p) = K_p$, avec $K_p = 2{,}5\,\%/°\text{C}$

1. Exprimer FTBO(p) puis FTBF(p), et la mettre sous la forme $\dfrac{K_{BF}}{1+T_{BF}\,p}$. Calculer K_{BF} et T_{BF}.
2. Calculer la variation de température obtenue en régime permanent et l'écart statique. Calculer le temps de réponse à 5 % et le comparer à celui du bain en chaîne ouverte.

3. Calculer la valeur minimale de K_p qui respecte l'erreur maximale de 0,5 °C. Calculer alors la variation de commande demandée au premier instant de l'échelon. Conclure.

II- Correcteur PI $C(p) = K_p \frac{1+T_i p}{T_i p}$, avec $K_p = 2{,}5\,\%/°\text{C}$ et $T_i = T$

4. Montrer que $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K K_p}{T p}$. Quel élément remarquable contient-elle ?

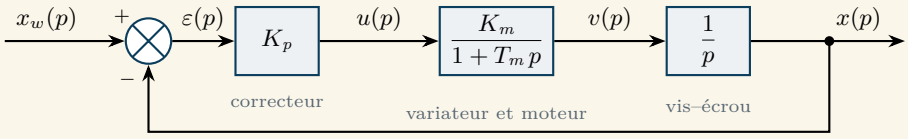
5. Établir $\text{FTBF}(p)$ et en déduire l'écart statique et le temps de réponse à 5 %.

6. Expliquer pourquoi les opérateurs n'auront plus besoin de « tricher » sur la consigne.

→ corrigé p. 595

Exercice 16.4 – Axe de positionnement d'un palettiseur ★★☆

Un palettiseur dépose des cartons sur une palette grâce à une pince montée sur un axe linéaire entraîné par un servomoteur. L'axe est asservi en position : la consigne x_w est envoyée par l'automate, un codeur mesure la position x. Lors des essais, la pince dépasse sa position de dépose et heurte les cartons déjà posés. Le constructeur vous demande de régler le gain du correcteur pour supprimer ce défaut sans trop ralentir la machine.



Données

- Correcteur proportionnel de gain K_p (en V/mm) ; u : tension de consigne de vitesse du variateur.
- Variateur et moteur : $K_m = 50\,\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$, $T_m = 0{,}08\,\text{s}$; v : vitesse de la pince ; la position est l'intégrale de la vitesse. Le retour (codeur) est unitaire.
- Second ordre : forme canonique $\dfrac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$, avec ω_0 la pulsation propre et m le coefficient d'amortissement.
- Premier dépassement : $D_1 = 100\,\exp\left(-\pi m/\sqrt{1-m^2}\right)$. Temps de réponse : $t_{5\,\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$ pour $m = 0{,}7$ et $t_{5\,\%} \approx \frac{10{,}8}{\omega_0}$ pour $m = 0{,}25$.

1. Exprimer $\text{FTBO}(p)$ en fonction de K_p, K_m et T_m.

2. Montrer que $\text{FTBF}(p) = \dfrac{1}{1 + \frac{p}{K_p K_m} + \frac{T_m p^2}{K_p K_m}}$. En déduire l'expression de ω_0 et celle de m.

3. Quel est l'écart statique pour un échelon de position ? Justifier sans calcul, puis vérifier sur $\text{FTBF}(p)$.

4. Le correcteur est réglé à $K_p = 1\,\text{V/mm}$. Calculer ω_0, m, puis le dépassement D_1 (en % et en mm) pour un déplacement de 50 mm. Expliquer le défaut constaté.

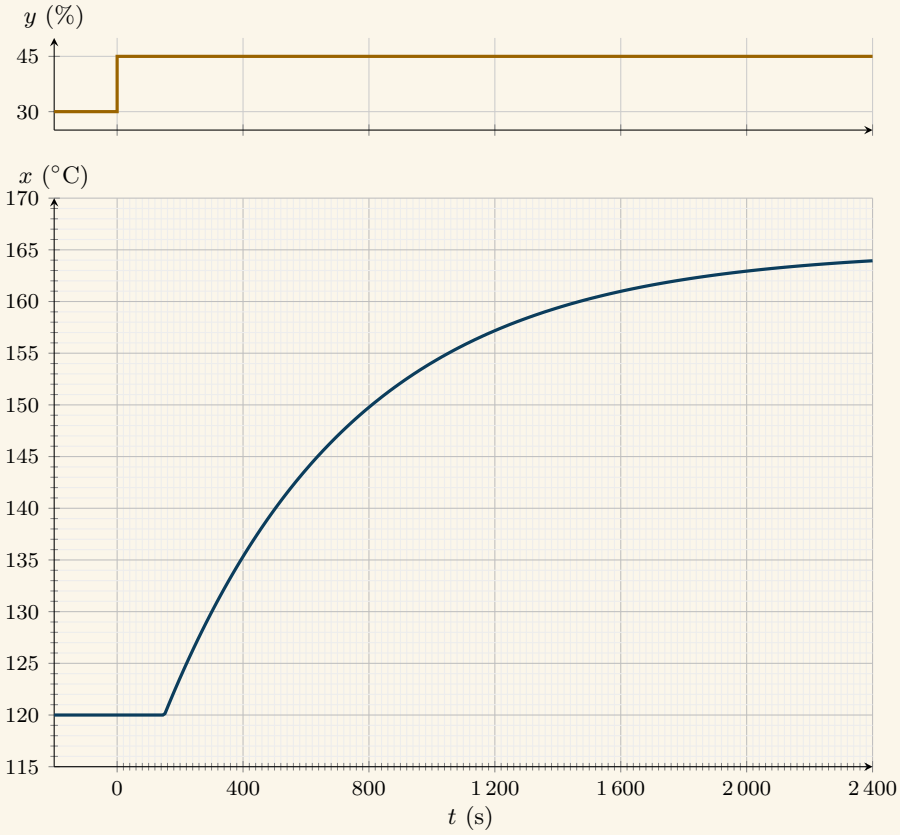
5. Calculer K_p pour obtenir $m = 0{,}7$. Calculer alors ω_0, le temps de réponse et le dépassement en mm.

6. Que devient la rapidité ? Proposer une solution pour être à la fois rapide et bien amorti.

→ corrigé p. 596

Exercice 16.5 – Identification et réglage d'un autoclave ★★★

Un sous-traitant aéronautique polymérise des pièces en matériau composite dans un autoclave : la température doit suivre très précisément le cycle imposé par le client, sous peine de rebut de pièces coûteuses. Après le remplacement des résistances chauffantes, la boucle de température oscille. Le responsable maintenance décide de refaire le réglage du régulateur (structure PID mixte) par la méthode de Broïda. Régulateur en mode manuel, la commande passe de 30 % à 45 % à $t = 0$; on enregistre la température.



A- Identification

1. Le procédé est-il stable ? Est-il direct ou inverse ? En déduire le sens d'action du régulateur.
2. Calculer le gain statique K du procédé.
3. Calculer les températures atteintes à 28 % et à 40 % de la variation, puis relever t_{28} et t_{40}.
4. En déduire la constante de temps T et le retard τ du modèle de Broïda. Écrire la fonction de transfert $H(p)$ du procédé.

B- Choix et réglage du correcteur

5. Calculer la réglabilité du procédé et justifier le choix d'un correcteur PID.
6. Calculer les réglages K_p, T_i et T_d pour la structure mixte, avec leurs unités.
7. Un technicien propose de se contenter d'un PI série. Calculer ses réglages. Quel est l'intérêt de l'action dérivée ici ?

C- Vérification

8. Le transmetteur 4–20 mA a pour étendue 0 °C à 200 °C. Quel courant délivre-t-il au début et à la fin de l'essai ?
9. Après réglage, un échelon de consigne fait apparaître un premier dépassement de 35 % alors que le cycle client tolère 10 %. Sur quels paramètres agir, et dans quel sens ?

→ corrigé p. 597

Exercice 16.6 – Stabilité d'un surpresseur d'eau ★★★

Un surpresseur alimente en eau les étages élevés d'un hôtel. Une pompe entraînée par un variateur de vitesse maintient la pression du réseau, mesurée par un capteur en sortie. Le technicien qui a mis en service l'installation a augmenté le gain du régulateur pour rendre la pression plus précise : depuis, la pression oscille et les clients se plaignent de « coups de bélier ». On vous demande de quantifier la stabilité de la boucle.

Données

- Correcteur proportionnel $C(p) = K_p$ (en %/bar) ; retour unitaire.
- Variateur, pompe et réseau : $H(p) = \dfrac{K}{(1+T\,p)^3}$ avec $K = 0{,}08\,\text{bar}/\%$ et $T = 0{,}5\,\text{s}$.
- Marges de stabilité (notions hors programme, données ici) : la boucle fermée est à la limite de stabilité si $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$ quand $\arg \text{FTBO}(j\omega) = -180°$; marge de gain $M_G = -20\log|\text{FTBO}(j\omega_{180})|$ où $\arg \text{FTBO}(j\omega_{180}) = -180°$; marge de phase $M_\Phi = 180° + \arg \text{FTBO}(j\omega_{0\,dB})$ où $|\text{FTBO}(j\omega_{0\,dB})| = 1$.

▷ Écart statique avec un correcteur P : $\varepsilon_s = \dfrac{\Delta w}{1 + K_{BO}}$, K_{BO} étant le gain statique de la FTBO.

▷ Le diagramme de Bode donné après les questions est celui de $\dfrac{1}{(1 + T\,p)^3}$, c'est-à-dire de la FTBO pour un gain statique $K_{BO} = 1$.

1. Exprimer FTBO(p) et son gain statique K_{BO} en fonction de K_p. Donner l'expression de son module et de son argument en fonction de ω.

2. Calculer la pulsation ω_{180} pour laquelle l'argument vaut $-180°$. Vérifier sur le diagramme.

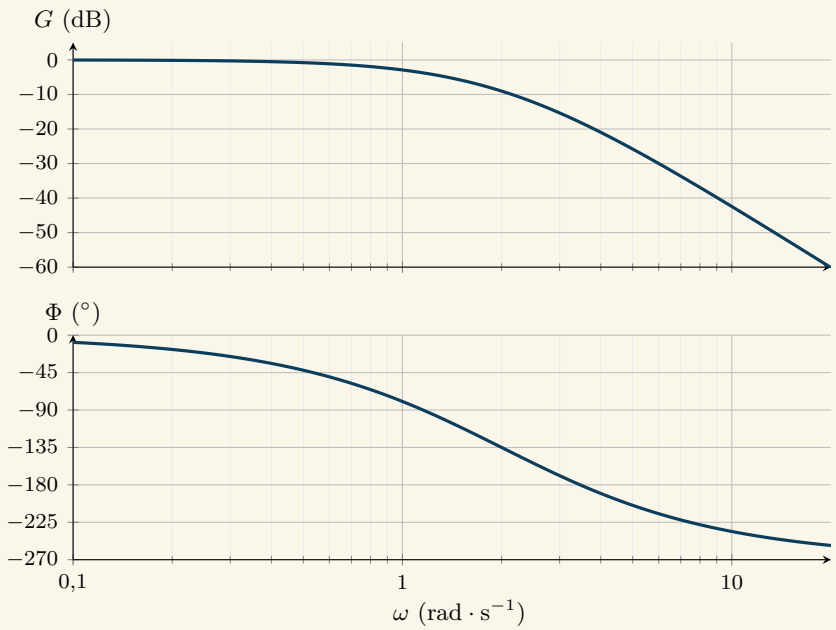
3. Montrer qu'à cette pulsation le module vaut $\dfrac{K_{BO}}{8}$. Vérifier la valeur en dB sur le diagramme.

4. En déduire le gain K_p à partir duquel la boucle devient instable, ainsi que la fréquence des oscillations à la limite. Le technicien avait réglé $K_p = 120\,\%/\text{bar}$: conclure.

5. Calculer K_p pour obtenir une marge de gain de 10 dB.

6. Avec ce réglage, calculer la pulsation $\omega_{0\,dB}$ puis la marge de phase. Retrouver ces valeurs sur le diagramme en expliquant comment on le lit lorsque $K_{BO} \neq 1$.

7. Calculer l'écart statique pour un échelon de consigne de 0,5 bar. Conclure : quel correcteur faut-il, et à quelle condition reste-t-il stable ?



→ corrigé p. 598

Sujets de type BTS

Chapitre 16

Sujet BTS 16.A – Régulation de vitesse d'un convoyeur d'emballage

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Dans une usine de produits laitiers, un convoyeur à bande amène les pots vers une étiqueteuse. La vitesse de la bande doit rester égale à la vitesse de l'étiqueteuse, sinon les étiquettes sont mal posées. Le convoyeur est entraîné par un moteur à courant continu alimenté par un hacheur. Aujourd'hui commandé en chaîne ouverte, il ralentit lorsque la bande est très chargée : on étudie sa régulation de vitesse.

Données

- Hacheur et moteur : la vitesse n (en tr/min) dépend de la tension de commande u_c ($0\,\text{V}$ à $10\,\text{V}$) ; on admet $H(p) = \dfrac{n(p)}{u_c(p)} = \dfrac{K_m}{1 + T_m\,p}$.
- Essai en chaîne ouverte, à vide : u_c passe de $0\,\text{V}$ à $4\,\text{V}$ à $t = 0$; la vitesse se stabilise à $600\,\text{tr/min}$; elle vaut $379\,\text{tr/min}$ à $t = 0{,}6\,\text{s}$ et $570\,\text{tr/min}$ à $t = 1{,}8\,\text{s}$.
- Dynamo tachymétrique : $u_t = k_t\,n$ avec $k_t = 6\,\text{V}$ pour $1\,000\,\text{tr/min}$.
- Vitesse voulue : $1\,000\,\text{tr/min}$; la consigne est une tension u_w. En charge nominale, en chaîne ouverte, la vitesse chute de $8\,\%$.
- Le comparateur élabore $\varepsilon = u_w - u_t$; le correcteur fournit u_c à partir de ε.

Partie A – Identification du procédé

A.1. Déterminer le gain statique K_m (en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$).

A.2. Montrer que la constante de temps vaut $T_m = 0{,}6\,\text{s}$. Vérifier la cohérence avec la mesure à $t = 1{,}8\,\text{s}$.

A.3. Quelle tension u_c faut-il appliquer en chaîne ouverte pour tourner à $1\,000\,\text{tr/min}$ à vide ? Quelle vitesse obtient-on en charge nominale ? Justifier l'intérêt d'une boucle fermée.

Partie B – Schéma bloc

B.1. Dessiner le schéma bloc de la boucle avec $C(p)$, $H(p)$ et $R(p)$, en indiquant les grandeurs $u_w(p)$, $\varepsilon(p)$, $u_c(p)$, $n(p)$ et $u_t(p)$. Donner $R(p)$ et calculer k_t en $\text{V} \cdot \text{min/tr}$.

B.2. Quelle tension de consigne u_w faut-il afficher pour obtenir $1\,000\,\text{tr/min}$ si l'écart est nul ?

B.3. Rappeler l'expression de $\text{FTBO}(p)$ et de $\text{FTBF}(p) = \dfrac{n(p)}{u_w(p)}$ en fonction de $C(p)$, $H(p)$ et $R(p)$.

Partie C – Correcteur proportionnel ($C(p) = K_p = 10$)

C.1. Calculer le gain statique K_{BO} de la boucle ouverte.

C.2. Montrer que $\text{FTBF}(p) = \dfrac{150}{1 + 0{,}06\,p}$ (en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$).

C.3. Pour $u_w = 6\,\text{V}$, calculer la vitesse atteinte en régime permanent, l'erreur de vitesse en % et le temps de réponse à 5 %.

C.4. Calculer K_p pour que l'erreur soit inférieure à 2 %. Calculer la tension u_c demandée à l'instant de l'échelon de consigne et conclure.

Partie D – Correcteur PI

On utilise $C(p) = K_p \dfrac{1 + T_i p}{T_i p}$ avec $T_i = T_m$.

D.1. Montrer que $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_p K_m k_t}{T_m p}$, puis que $\text{FTBF}(p) = \dfrac{1/k_t}{1 + T_{BF} p}$ avec $T_{BF} = \dfrac{T_m}{K_p K_m k_t}$.

D.2. En déduire la vitesse atteinte pour $u_w = 6\,\text{V}$. Que devient-elle en charge nominale ?

D.3. Calculer K_p pour obtenir un temps de réponse à 5 % de 0,15 s.

Partie E – Stabilité

E.1. On définit la marge de phase $M_\Phi = 180° + \arg \text{FTBO}(j\omega_{0\,dB})$, où $\omega_{0\,dB}$ est la pulsation pour laquelle $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$; on vise $M_\Phi \geq 45°$. Avec le réglage de D.3, calculer $\omega_{0\,dB}$ et la marge de phase. Conclure.

E.2. En réalité, la tension de la dynamo est filtrée : $R(p) = \dfrac{k_t}{1 + T_f p}$ avec $T_f = 10\,\text{ms}$. On admet que $\omega_{0\,dB}$ ne change pratiquement pas. Calculer la nouvelle marge de phase et conclure.

→ corrigé p. 599

Sujet BTS 16.B – Régulation de niveau d'une bâche d'eau potable

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Une station de production d'eau potable stocke l'eau traitée dans une bâche, d'où elle est reprise par les pompes de distribution vers la ville. Le niveau de la bâche doit rester proche de 3 m : trop bas, les pompes de distribution désamorcent ; trop haut, la bâche déborde. Le débit entrant est fourni par une pompe d'alimentation entraînée par un variateur de vitesse, commandée par un régulateur ; le débit soutiré q_s dépend de la consommation de la ville.

Données

- Bâche cylindrique à parois verticales, section $S = 20\,\text{m}^2$; niveau x (en m).

- ▷ Pompe d'alimentation et variateur : $q_e = k_q\, y$ avec $k_q = 0{,}002\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}/\%}$, y : commande en %.
- ▷ Transmetteur de niveau 4–20 mA, étendue 0 m à 5 m ; retour considéré comme unitaire.
- ▷ Débit soutiré habituel : $q_s = 0{,}08\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$; en pointe de consommation, il passe brusquement à $0{,}12\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$.

Partie A – Analyse de la boucle

A.1. Préciser la grandeur réglée, la grandeur réglante, l'actionneur et la perturbation. Dessiner le schéma fonctionnel.

A.2. Le procédé est-il direct ou inverse ? En déduire le sens d'action du régulateur.

A.3. Quel courant délivre le transmetteur pour un niveau de 2,5 m ? pour la consigne de 3 m ?

A.4. Calculer la commande y_0 qui maintient un niveau constant lorsque $q_s = 0{,}08\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$.

Partie B – Modèle et correcteur proportionnel

B.1. Justifier la relation $S\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q_e - q_s$, puis montrer que

$$x(p) = \frac{k_q\, y(p) - q_s(p)}{S\,p}$$

Compléter le schéma bloc. Pourquoi dit-on que le procédé est intégrateur ?

B.2. Avec $C(p) = K_p$, établir FTBO(p) et montrer que FTBF$(p) = \dfrac{1}{1 + T_{BF}\,p}$ avec $T_{BF} = \dfrac{S}{K_p\,k_q}$. Que vaut l'écart statique pour un échelon de consigne ?

B.3. Calculer K_p pour un temps de réponse à 5 % de 300 s.

B.4. Avec ce réglage, la consigne passe de 2,5 m à 3 m. Calculer la commande au premier instant. Y a-t-il saturation ?

Partie C – Pointe de consommation

C.1. Montrer qu'à consigne constante, $x(p) = \dfrac{-q_s(p)}{S\,p + K_p\,k_q}$ pour les variations autour du point de fonctionnement.

C.2. En déduire la baisse de niveau en régime permanent lors de la pointe de consommation. Retrouver ce résultat par un raisonnement sur la commande nécessaire.

C.3. Pourquoi l'intégrateur du procédé n'annule-t-il pas cet écart ?

Partie D – Correcteur PI
On utilise $C(p) = K_p \frac{1+T_i p}{T_i p}$ avec le K_p de B.3.

D.1. Établir FTBO(p) et montrer que $\text{FTBF}(p) = \dfrac{1+T_i p}{1+T_i p + \dfrac{S\,T_i}{K_p\,k_q}\,p^2}$.

D.2. Identifier la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement m du dénominateur, mis sous la forme $1 + \frac{2m}{\omega_0}\,p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$. Calculer T_i pour obtenir $m = 0{,}7$.

D.3. Montrer que l'écart dû à la pointe de consommation est maintenant nul en régime permanent.

D.4. Montrer que l'argument de FTBO$(j\omega)$ vaut $-180° + \arctan(\omega\,T_i)$. Que peut-on dire de la stabilité ? Sachant que $\omega_{0\,dB} \approx 0{,}011\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer la marge de phase $M_\Phi = 180° + \arg \text{FTBO}(j\omega_{0\,dB})$.

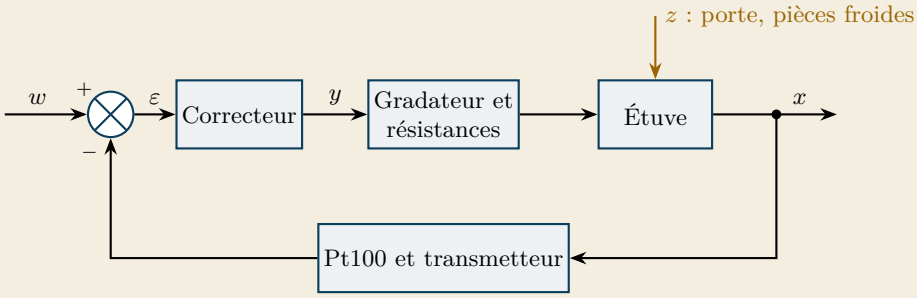
→ corrigé p. 601

Corrigés

✓ Corrigé de l'exercice 16.1 – Schéma fonctionnel d'une étuve de cuisson de peinture

1. Grandeur réglée x : la température de l'air de l'étuve. Grandeur réglante : la puissance de chauffe. Actionneur : le gradateur (préactionneur) et les résistances. Capteur : la sonde Pt100 et son transmetteur. Perturbations z : ouverture de la porte, entrée de pare-chocs froids, température de l'atelier, débit d'extraction des vapeurs de solvant.

2.



3. La consigne est fixe : c'est une **régulation**, dont le rôle est de compenser les perturbations. Si la consigne suit une rampe, la boucle devient un **asservissement** : la température doit suivre une consigne variable ; on s'intéresse alors à l'écart de traînage entre la consigne et la mesure pendant la montée.

4. Le courant varie de 16 mA pour 150 °C :

$$x = \frac{I-4}{16} \times 150 = \frac{12{,}4-4}{16} \times 150 \quad \text{soit} \quad \boxed{x = 78{,}75\,^\circ\text{C}}$$

$\varepsilon = w - x = 80 - 78{,}75$ soit $\boxed{\varepsilon = 1{,}25\,^\circ\text{C}}$, c'est-à-dire $\dfrac{1{,}25}{80} \approx 1{,}6\,\%$ de la consigne.

5. Quand la commande y augmente, la puissance de chauffe et donc la température augmentent : le procédé est **direct**. Le régulateur doit être réglé en **sens inverse** : si la mesure dépasse la consigne, la commande diminue.

6. En chaîne ouverte, la puissance de chauffe reste celle qui correspond à 45 %. À chaque ouverture de porte (et à chaque entrée de pièces froides), les pertes augmentent, la température baisse et rien ne la corrige : elle ne remonte qu'après la fermeture de la porte, lentement. La peinture des premières pièces de chaque chargement est mal cuite.

✓ Corrigé de l'exercice 16.2 – Réception d'une boucle de pression d'air comprimé

Méthode : exploiter un enregistrement de réception Repérer l'instant de l'échelon et les valeurs initiale et finale ; calculer la bande à 5 % **de la variation** $x_\infty - x_0$ (et non de la valeur finale) ; mesurer $t_{5\,\%}$ à partir de l'échelon. Comparer chaque critère au cahier des charges et conclure critère par critère.

1. Oui : les oscillations s'amortissent et la pression tend vers une valeur finale constante.

2. On lit $\boxed{x_\infty \approx 6{,}95\,\text{bar}}$. $\varepsilon_s = w - x_\infty = 7 - 6{,}95 = 0{,}05\,\text{bar}$, soit $\dfrac{0{,}05}{1} = 5\,\%$ de la variation de consigne : **critère non respecté** ($5\,\% > 2\,\%$).

3. On lit $x_{max} \approx 7{,}19\,\text{bar}$ (vers $t \approx 8{,}9\,\text{s}$).

$$D_1 = \frac{x_{max} - x_\infty}{x_\infty - x_0} \times 100 = \frac{7{,}19 - 6{,}95}{6{,}95 - 6} \times 100 \quad \text{soit} \quad \boxed{D_1 \approx 25\,\%}$$

Critère non respecté ($25\,\% > 20\,\%$).

4. La bande à 5 % vaut $x_\infty \pm 0{,}05 \times (6{,}95 - 6) = 6{,}95 \pm 0{,}047\,5$, soit de 6,90 bar à 7,00 bar. En parcourant l'enregistrement depuis la fin, on cherche le dernier instant où la courbe est hors de la bande : après le premier minimum (6,89 bar vers $t \approx 15{,}7\,\text{s}$, sous la bande), elle y rentre définitivement vers $t \approx 17{,}2\,\text{s}$ (le maximum suivant, 6,97 bar, reste dans la bande). Le temps de réponse se compte depuis l'échelon :

$$t_{5\,\%} \approx 17{,}2 - 2 \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{5\,\%} \approx 15\,\text{s}}$$

Critère respecté ($15\,\text{s} < 20\,\text{s}$).

5. La boucle **ne peut pas être réceptionnée**. Il faut une action intégrale (ou la renforcer en diminuant T_i) pour annuler l'écart statique ; pour réduire le dépassement, diminuer légèrement K_p ou ajouter une action dérivée. Renforcer l'intégrale augmente le dépassement : les deux réglages se font ensemble, puis on refait l'essai.

✓ Corrigé de l'exercice 16.3 – Bain de dégraissage avant peinture

I- Correcteur proportionnel

1. $K\,K_p = 1{,}6 \times 2{,}5 = 4$.

$$\text{FTBO}(p) = \frac{K\,K_p}{1+T\,p} = \frac{4}{1+400\,p}$$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1+\text{FTBO}(p)} = \frac{4}{1+400\,p+4} = \frac{4}{5+400\,p}$$

On divise par 5 : $\text{FTBF}(p) = \dfrac{0{,}8}{1+80\,p}$, soit $\boxed{K_{BF} = 0{,}8}$ et $\boxed{T_{BF} = 80\,\text{s}}$

2. En régime permanent ($p \to 0$) : $\Delta x = K_{BF}\,\Delta w = 0{,}8 \times 10 = 8\,^\circ\text{C}$: le bain se stabilise à 58 °C au lieu de 60 °C, d'où $\boxed{\varepsilon_s = 2\,^\circ\text{C}}$

$$t_{5\,\%} = 3\,T_{BF} = 240\,\text{s} \qquad \text{contre} \qquad 3\,T = 1\,200\,\text{s en chaîne ouverte}$$

La boucle fermée est 5 fois plus rapide ($1 + K\,K_p = 5$), mais pas précise.

3. $\varepsilon_s = \dfrac{\Delta w}{1+K\,K_p} \leq 0{,}5$ impose $1 + K\,K_p \geq \dfrac{10}{0{,}5} = 20$, soit $K\,K_p \geq 19$:

$$K_p \geq \frac{19}{1{,}6} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_p \geq 11{,}9\,\%/^\circ\text{C}}$$

Au premier instant, x n'a pas encore bougé : $\varepsilon = \Delta w = 10\,^\circ\text{C}$ et la commande augmente de $K_p\,\Delta w \approx 119\,\%$. C'est impossible : la commande sature à 100 % et le modèle linéaire ne s'applique plus. De plus, le retard réel du bain, négligé ici, rendrait la boucle oscillante avec un gain aussi élevé. Le correcteur P ne peut pas atteindre la précision demandée.

II- Correcteur PI

4. Avec $T_i = T$:

$$\text{FTBO}(p) = K_p\,\frac{1+T\,p}{T\,p} \times \frac{K}{1+T\,p} = \frac{K\,K_p}{T\,p} = \frac{4}{400\,p} = \frac{1}{100\,p}$$

Le terme $1 + T\,p$ se simplifie : la FTBO contient un **intégrateur** ($\frac{1}{p}$), apporté par l'action intégrale.

5.

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{1}{100\,p}}{1+\dfrac{1}{100\,p}} = \frac{1}{1+100\,p}$$

Gain statique 1, donc $\boxed{\varepsilon_s = 0}$ et $t_{5\,\%} = 3 \times 100$ soit $\boxed{t_{5\,\%} = 300\,\text{s}}$

La réponse est un peu plus lente qu'avec le P seul (300 s au lieu de 240 s) mais parfaitement précise. Au premier instant, la commande n'augmente que de $K_p\,\Delta w = 25\,\%$: pas de saturation.

6. Le bain atteint exactement la consigne affichée : il suffit d'afficher 60 °C. L'action intégrale continue de modifier la commande tant qu'il reste un écart ; elle corrige aussi les perturbations (charges froides, évaporation).

✓ Corrigé de l'exercice 16.4 – Axe de positionnement d'un palettiseur

1. Retour unitaire, trois blocs en série :

$$\boxed{\mathrm{FTBO}(p) = \frac{K_p\,K_m}{p\,(1+T_m\,p)}}$$

2. Formule de Black :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{\mathrm{FTBO}(p)}{1+\mathrm{FTBO}(p)} = \frac{K_pK_m}{p\,(1+T_m\,p)+K_pK_m} = \frac{K_pK_m}{K_pK_m+p+T_m\,p^2}$$

En divisant par K_pK_m, on obtient la forme demandée. Par identification avec $1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}$:

$$\frac{1}{\omega_0^2}=\frac{T_m}{K_pK_m}\ \Rightarrow\ \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{K_pK_m}{T_m}}} \qquad \frac{2m}{\omega_0}=\frac{1}{K_pK_m}\ \Rightarrow\ \boxed{m=\frac{1}{2\sqrt{K_pK_mT_m}}}$$

3. La FTBO contient un intégrateur (la vis transforme la vitesse en position) : $\boxed{\varepsilon_s = 0}$. Vérification : $\mathrm{FTBF}(0)=1$, la position finale est égale à la consigne.

4. $K_pK_m = 1\times 50 = 50\,\mathrm{s}^{-1}$:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{50}{0{,}08}}=25\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad m=\frac{1}{2\sqrt{50\times 0{,}08}}=\frac{1}{2\times 2}=0{,}25$$

$$D_1 = 100\,\exp\!\left(\frac{-\pi\times 0{,}25}{\sqrt{1-0{,}25^2}}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{D_1\approx 44\,\%}$$

Sur un déplacement de 50 mm, la pince dépasse de $0{,}444\times 50\approx 22\,\mathrm{mm}$: elle va plus loin que la position de dépose et heurte les cartons. Le gain est trop élevé, la boucle est trop peu amortie.

5. $m=0{,}7$ impose $K_pK_m=\dfrac{1}{4\,m^2\,T_m}=\dfrac{1}{4\times 0{,}49\times 0{,}08}\approx 6{,}38\,\mathrm{s}^{-1}$:

$$K_p=\frac{6{,}38}{50} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_p\approx 0{,}128\,\mathrm{V/mm}}$$

$\omega_0=\sqrt{\dfrac{6{,}38}{0{,}08}}\approx 8{,}93\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; $t_{5\,\%}\approx\dfrac{3}{8{,}93}\approx 0{,}34\,\mathrm{s}$; $D_1\approx 4{,}6\,\%$, soit $0{,}046\times 50\approx 2{,}3\,\mathrm{mm}$, que la pince absorbe sans choc.

6. Avec $K_p=1\,\mathrm{V/mm}$: $t_{5\,\%}\approx\dfrac{10{,}8}{25}\approx 0{,}43\,\mathrm{s}$. Le réglage à $m=0{,}7$ est donc **aussi rapide, et même plus** (0,34 s) : la réponse peu amortie monte vite mais oscille longtemps. Pour aller plus vite en restant amorti, il faut augmenter ω_0 sans diminuer m : ajouter une action dérivée (ou une boucle de vitesse interne, qui joue le même rôle), ou choisir un moteur plus dynamique (T_m plus petit).

✓ Corrigé de l'exercice 16.5 – Identification et réglage d'un autoclave

A- Identification

1. La température se stabilise à une nouvelle valeur : le procédé est **stable**. Elle augmente quand la commande augmente : il est **direct**, donc le régulateur doit être réglé en **sens inverse**.

2. $\Delta y = 45 - 30 = 15\,\%$ et $\Delta x = 165 - 120 = 45\,°\text{C}$:

$$K = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{45}{15} \quad \text{soit} \quad \boxed{K = 3\,°\text{C}/\%}$$

3. $x_{28} = 120 + 0{,}28 \times 45 = 132{,}6\,°\text{C}$ et $x_{40} = 120 + 0{,}40 \times 45 = 138\,°\text{C}$.

On lit sur l'enregistrement (temps comptés depuis l'échelon, appliqué à $t = 0$) : $t_{28} \approx 347\,\text{s}$ et $t_{40} \approx 456\,\text{s}$.

4.

$$T = 5{,}5\,(t_{40} - t_{28}) = 5{,}5 \times (456 - 347) \quad \text{soit} \quad \boxed{T \approx 600\,\text{s}}$$

$$\tau = 2{,}8\,t_{28} - 1{,}8\,t_{40} = 2{,}8 \times 347 - 1{,}8 \times 456 \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau \approx 151\,\text{s}}$$

$$H(p) = \frac{3\,e^{-151\,p}}{1 + 600\,p} \quad (°\text{C}/\%,\ \text{temps en s})$$

On vérifie sur la courbe que la température ne commence à monter qu'après environ 150 s : c'est le retard.

B- Choix et réglage du correcteur

5. $\dfrac{T}{\tau} = \dfrac{600}{151} \approx 3{,}97$: la réglabilité est comprise entre 2 et 5, le tableau de Broïda préconise un **PID**.

6. Structure mixte :

$$K_p = \frac{T/\tau + 0{,}4}{1{,}2\,K} = \frac{3{,}97 + 0{,}4}{1{,}2 \times 3} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_p \approx 1{,}21\,\%/°\text{C}}$$

$$T_i = T + 0{,}4\,\tau = 600 + 0{,}4 \times 151 \quad \text{soit} \quad \boxed{T_i \approx 660\,\text{s}}$$

$$T_d = \frac{T\,\tau}{2{,}5\,T + \tau} = \frac{600 \times 151}{2{,}5 \times 600 + 151} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_d \approx 55\,\text{s}}$$

7. PI série : $K_p = \dfrac{0{,}8\,T}{K\,\tau} = \dfrac{0{,}8 \times 600}{3 \times 151} \approx 1{,}06\,\%/°\text{C}$ et $T_i = T = 600\,\text{s}$.

Avec un retard important ($T/\tau < 5$), l'action dérivée anticipe : elle réagit dès que la température commence à monter, avant que l'écart ne s'inverse, ce qui permet un gain plus élevé, une réponse plus rapide et un dépassement plus faible. Elle est utilisable ici car une mesure de température est peu bruitée.

C- Vérification

8. $I = 4 + 16 \times \dfrac{x}{200}$:

début ($x = 120\,°\text{C}$) : $\boxed{I = 13{,}6\,\text{mA}}$ fin ($x = 165\,°\text{C}$) : $\boxed{I = 17{,}2\,\text{mA}}$

9. Le réglage de Broïda est un point de départ. Pour réduire le dépassement, on rend la boucle plus stable : **diminuer** K_p (par exemple de 20 % à 30 %) et/ou **augmenter** T_i (action intégrale moins forte) ; on peut aussi augmenter légèrement T_d. On refait un échelon de consigne après chaque modification.

✓ Corrigé de l'exercice 16.6 – Stabilité d'un surpresseur d'eau

1. $\text{FTBO}(p) = C(p)\,H(p) = \dfrac{K_p\,K}{(1+T\,p)^3}$, avec $\boxed{K_{BO} = 0{,}08\,K_p}$

$$|\text{FTBO}(j\omega)| = \frac{K_{BO}}{\left(\sqrt{1+(\omega T)^2}\right)^3} \qquad \arg \text{FTBO}(j\omega) = -3\arctan(\omega T)$$

2. $-3\arctan(\omega T) = -180° \;\Rightarrow\; \arctan(\omega T) = 60° \;\Rightarrow\; \omega T = \tan(60°) = \sqrt{3}$:

$$\omega_{180} = \frac{\sqrt{3}}{0{,}5} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_{180} \approx 3{,}46\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Sur le diagramme de phase, la courbe coupe $-180°$ vers $3{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ✓.

3. $1 + (\omega_{180}T)^2 = 1 + 3 = 4$, d'où $|\text{FTBO}| = \dfrac{K_{BO}}{\sqrt{4}^3} = \dfrac{K_{BO}}{8}$. Pour $K_{BO} = 1$: $20\log\frac{1}{8} \approx -18{,}1\,\text{dB}$, ce qu'on lit sur la courbe de gain à $3{,}46\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ✓.

4. Limite de stabilité : $\dfrac{K_{BO}}{8} = 1$, soit $K_{BO} = 8$ et

$$K_{p,lim} = \frac{8}{0{,}08} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_{p,lim} = 100\,\%/\text{bar}}$$

À la limite, la boucle oscille à ω_{180} : $f = \dfrac{3{,}46}{2\pi} \approx 0{,}55\,\text{Hz}$ (période 1,8 s).

Avec $K_p = 120\,\%/\text{bar}$: $K_{BO} = 9{,}6 > 8$, la boucle est **instable**. Les oscillations de pression croissent jusqu'à ce que le variateur sature : ce sont les « coups de bélier » ressentis dans l'hôtel.

5. $M_G = 20\log\dfrac{8}{K_{BO}} = 10\,\text{dB} \;\Rightarrow\; K_{BO} = \dfrac{8}{10^{0{,}5}} \approx 2{,}53$:

$$K_p = \frac{2{,}53}{0{,}08} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_p \approx 31{,}6\,\%/\text{bar}}$$

6. $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1 \;\Rightarrow\; \left(1+(\omega T)^2\right)^{3/2} = 2{,}53 \;\Rightarrow\; (\omega T)^2 = 2{,}53^{2/3} - 1 \approx 0{,}857$, soit $\omega T \approx 0{,}926$:

$$\omega_{0\,dB} = \frac{0{,}926}{0{,}5} \approx 1{,}85\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad M_\Phi = 180° - 3\arctan(0{,}926) \quad \text{soit} \quad \boxed{M_\Phi \approx 52°}$$

Lecture : le gain K_{BO} ajoute $20\log 2{,}53 \approx 8{,}1$ dB à la courbe fournie, sans changer la phase. La FTBO réelle vaut donc 0 dB là où la courbe tracée vaut $-8{,}1$ dB : on lit $\omega \approx 1{,}85\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, puis sur la courbe de phase $\Phi \approx -128°$, d'où $M_\Phi \approx 52°$.

7. $\varepsilon_s = \dfrac{\Delta w}{1+K_{BO}} = \dfrac{0{,}5}{1+2{,}53}$ soit $\boxed{\varepsilon_s \approx 0{,}14\,\text{bar}}$, soit 28 % de la variation de consigne : c'est inacceptable. On retrouve le dilemme stabilité–précision : le gain qui garantit la stabilité ne donne pas la précision.

Il faut un correcteur **PI**, dont l'intégrateur annule l'écart statique. L'action intégrale ajoute du déphasage (jusqu'à $-90°$ aux basses pulsations) : on choisit T_i assez grand (au moins de l'ordre de $\frac{4}{\omega_{0\,dB}} \approx 2\,\text{s}$) pour que ce déphasage reste faible à $\omega_{0\,dB}$, et on vérifie à nouveau les marges.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 16.A – Régulation de vitesse d'un convoyeur d'emballage

Partie A – Identification du procédé

A.1. En régime permanent : $K_m = \dfrac{\Delta n}{\Delta u_c} = \dfrac{600}{4}$ soit $\boxed{K_m = 150\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}}$

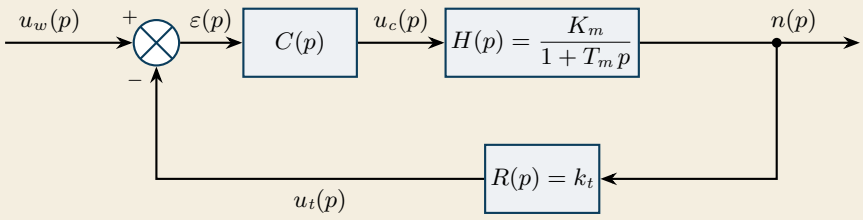
A.2. Pour un premier ordre, la sortie atteint 63 % de sa variation à $t = T_m$: $0{,}632 \times 600 \approx 379\,\text{tr/min}$, valeur atteinte à $t = 0{,}6\,\text{s}$, donc $\boxed{T_m = 0{,}6\,\text{s}}$

À $t = 3\,T_m = 1{,}8\,\text{s}$, elle doit atteindre 95 % : $0{,}95 \times 600 = 570\,\text{tr/min}$ ✓.

A.3. $u_c = \dfrac{1000}{150} \approx 6{,}67\,\text{V}$. En charge nominale, la vitesse chute de 8 % : $n = 920\,\text{tr/min}$. Rien ne mesure la vitesse, rien ne la corrige : la bande ralentit par rapport à l'étiqueteuse et les étiquettes sont mal posées. Une boucle fermée mesure la vitesse et augmente la commande pour compenser le couple de charge.

Partie B – Schéma bloc

B.1.



La dynamo est un gain pur : $R(p) = k_t = \dfrac{6}{1000}$ soit $\boxed{k_t = 0{,}006\,\text{V}\cdot\text{min/tr}}$

B.2. Écart nul : $u_w = u_t = k_t\,n = 0{,}006 \times 1000$ soit $\boxed{u_w = 6\,\text{V}}$

B.3. $\text{FTBO}(p) = C(p)\,H(p)\,R(p)$ et $\text{FTBF}(p) = \dfrac{n(p)}{u_w(p)} = \dfrac{C(p)\,H(p)}{1 + C(p)\,H(p)\,R(p)}$.

Partie C – Correcteur proportionnel

C.1. $K_{BO} = K_p\,K_m\,k_t = 10 \times 150 \times 0{,}006$ soit $\boxed{K_{BO} = 9}$

C.2.
$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{1500}{1 + 0{,}6\,p}}{1 + \dfrac{9}{1 + 0{,}6\,p}} = \frac{1500}{10 + 0{,}6\,p} = \frac{150}{1 + 0{,}06\,p}$$

C.3. $n_\infty = 150 \times 6$ soit $\boxed{n_\infty = 900\,\text{tr/min}}$ au lieu de 1 000 tr/min : l'erreur est de 100 tr/min, soit $\boxed{10\,\%}$

$T_{BF} = 0{,}06\,\text{s} \;\Rightarrow\; t_{5\,\%} = 3\,T_{BF} = 0{,}18\,\text{s}$ (contre $3\,T_m = 1{,}8\,\text{s}$ en chaîne ouverte).

C.4. L'erreur relative vaut $\dfrac{1}{1 + K_{BO}} \leq 0{,}02$, soit $K_{BO} \geq 49$:
$$K_p \geq \frac{49}{150 \times 0{,}006} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_p \geq 54{,}4}$$
À l'instant de l'échelon, $n = 0$ donc $\varepsilon = 6\,\text{V}$ et $u_c = 54{,}4 \times 6 \approx 327\,\text{V}$, alors que la commande est limitée à 10 V : le hacheur sature, le modèle linéaire ne s'applique plus. Le correcteur P ne permet pas d'atteindre la précision voulue.

Partie D – Correcteur PI

D.1.
$$\text{FTBO}(p) = K_p\,\frac{1 + T_m\,p}{T_m\,p} \times \frac{K_m}{1 + T_m\,p} \times k_t = \frac{K_p\,K_m\,k_t}{T_m\,p} = \frac{K_{BO}}{T_m\,p}$$
$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{K_p\,K_m}{T_m\,p}}{1 + \dfrac{K_{BO}}{T_m\,p}} = \frac{K_p\,K_m}{K_{BO} + T_m\,p} = \frac{1/k_t}{1 + \dfrac{T_m}{K_{BO}}\,p}$$
car $\dfrac{K_p\,K_m}{K_{BO}} = \dfrac{1}{k_t}$: on retrouve $T_{BF} = \dfrac{T_m}{K_p\,K_m\,k_t}$.

D.2. $n_\infty = \dfrac{u_w}{k_t} = \dfrac{6}{0{,}006}$ soit $\boxed{n_\infty = 1\,000\,\text{tr/min}}$: l'écart statique est nul. En charge nominale, l'intégrateur du correcteur, placé en amont du point où agit le couple de charge, augmente la commande jusqu'à annuler l'écart : la vitesse revient à 1 000 tr/min.

D.3. $t_{5\,\%} = 3\,T_{BF} = 0{,}15\,\text{s} \;\Rightarrow\; T_{BF} = 0{,}05\,\text{s}$, d'où $K_{BO} = \dfrac{T_m}{T_{BF}} = \dfrac{0{,}6}{0{,}05} = 12$ et
$$K_p = \frac{12}{150 \times 0{,}006} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_p \approx 13{,}3}$$

Partie E – Stabilité

E.1. $\text{FTBO}(p) = \dfrac{12}{0{,}6\,p} = \dfrac{20}{p}$: $|\text{FTBO}(j\omega)| = \dfrac{20}{\omega} = 1$ pour $\boxed{\omega_{0\,dB} = 20\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

L'argument d'un intégrateur vaut $-90°$ à toute pulsation : $\boxed{M_\Phi = 90°}$. La phase n'atteint jamais $-180°$ (marge de gain infinie) : la boucle est très stable, sans dépassement (la FTBF est un premier ordre).

E.2. Le filtre ajoute un déphasage $-\arctan(T_f\omega)$; à $\omega_{0\,dB} \approx 20\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$: $\arctan(0{,}01 \times 20) = \arctan(0{,}2) \approx 11{,}3°$.

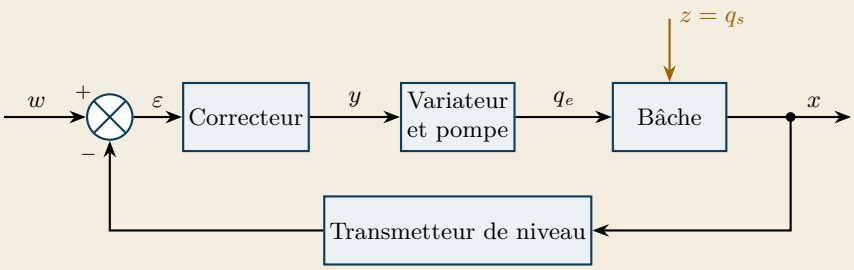
$$M_\Phi \approx 90° - 11{,}3° \quad \text{soit} \quad \boxed{M_\Phi \approx 79°}$$

La marge reste très confortable (bien au-delà de 45°) : le réglage est validé. Le filtre, indispensable pour éliminer l'ondulation de la dynamo, ne compromet pas la stabilité.

✓ Corrigé du sujet BTS 16.B – Régulation de niveau d'une bâche d'eau potable

Partie A – Analyse de la boucle

A.1. Grandeur réglée : le niveau x de la bâche. Grandeur réglante : le débit entrant q_e. Actionneur : la pompe d'alimentation et son variateur. Perturbation : le débit soutiré q_s (consommation de la ville).



A.2. Quand y augmente, le débit entrant augmente et le niveau monte : le procédé est **direct**, le régulateur doit être réglé en **sens inverse**.

A.3. $I = 4 + 16 \times \dfrac{x}{5}$: pour 2,5 m, $\boxed{I = 12\,\text{mA}}$; pour 3 m, $\boxed{I = 13{,}6\,\text{mA}}$

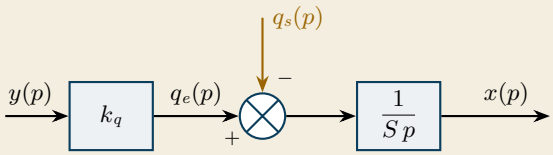
A.4. Le niveau est constant si $q_e = q_s$, soit $k_q\,y_0 = 0{,}08$:

$$y_0 = \frac{0{,}08}{0{,}002} \quad \text{soit} \quad \boxed{y_0 = 40\,\%}$$

Au point de fonctionnement, la pompe tourne donc à 40 % de sa capacité : il reste une réserve de 60 % pour faire face aux pointes de consommation.

Partie B – Modèle et correcteur proportionnel

B.1. Le volume d'eau vaut $V = S\,x$ (parois verticales) ; sa variation par unité de temps est la différence des débits : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = S\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q_e - q_s$. Avec la variable de Laplace (dériver revient à multiplier par p) : $S\,p\,x(p) = k_q\,y(p) - q_s(p)$, d'où le résultat.



Le niveau est l'**intégrale** de la différence des débits : tant que $q_e \neq q_s$, il monte ou descend sans jamais se stabiliser. Le bloc $\frac{1}{S\,p}$ est un intégrateur.

B.2. $\mathrm{FTBO}(p) = K_p \times k_q \times \dfrac{1}{S\,p} = \dfrac{K_p\,k_q}{S\,p}$; avec un retour unitaire :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{K_p\,k_q}{S\,p}}{1 + \dfrac{K_p\,k_q}{S\,p}} = \frac{K_p\,k_q}{S\,p + K_p\,k_q} = \frac{1}{1 + \dfrac{S}{K_p\,k_q}\,p}$$

Gain statique 1 (intégrateur dans la FTBO) : $\boxed{\varepsilon_s = 0}$ pour un échelon de consigne.

B.3. $t_{5\,\%} = 3\,T_{BF} = 300\,\mathrm{s} \;\Rightarrow\; T_{BF} = 100\,\mathrm{s}$:

$$K_p = \frac{S}{k_q\,T_{BF}} = \frac{20}{0{,}002 \times 100} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_p = 100\,\%/\mathrm{m}}$$

B.4. Au premier instant, $\varepsilon = 0{,}5\,\mathrm{m}$: $y = y_0 + K_p\,\varepsilon = 40 + 100 \times 0{,}5 = 90\,\%$. C'est inférieur à $100\,\%$: **pas de saturation**, mais la marge est faible ; un échelon de consigne plus grand ferait saturer la pompe.

Partie C – Pointe de consommation

C.1. Consigne constante ($w(p) = 0$ pour les variations) : $x(p) = \dfrac{k_q\,y(p) - q_s(p)}{S\,p}$ avec $y(p) = -K_p\,x(p)$. D'où $S\,p\,x(p) = -K_p\,k_q\,x(p) - q_s(p)$ et

$$x(p) = \frac{-q_s(p)}{S\,p + K_p\,k_q}$$

C.2. En régime permanent ($p \to 0$) : $\Delta x = -\dfrac{\Delta q_s}{K_p\,k_q} = -\dfrac{0{,}04}{100 \times 0{,}002}$ soit $\boxed{\Delta x = -0{,}2\,\mathrm{m}}$: le niveau se stabilise à $2{,}8\,\mathrm{m}$.

Raisonnement sur la commande : pour retrouver un niveau constant, il faut $q_e = 0{,}12\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$, donc $y = 60\,\%$, soit $20\,\%$ de plus. Avec un correcteur P, $\Delta y = K_p\,\varepsilon$: il faut un écart permanent $\varepsilon = \dfrac{20}{100} = 0{,}2\,\mathrm{m}$ ✓.

C.3. L'intégrateur du procédé est placé **après** le point où agit la perturbation : il intègre $q_e - q_s$ et impose seulement que les débits s'égalisent en régime permanent. Le supplément de commande nécessaire ne peut venir que d'un écart non nul, le correcteur P ne « mémorisant » rien. Il faut un intégrateur **en amont** de la perturbation, dans le correcteur.

Partie D – Correcteur PI

D.1.
$$\text{FTBO}(p) = K_p \frac{1+T_i p}{T_i p} \times \frac{k_q}{S p} = \frac{K_p k_q (1+T_i p)}{S T_i p^2}$$

Formule de Black : $\text{FTBF}(p) = \dfrac{K_p k_q (1+T_i p)}{S T_i p^2 + K_p k_q (1+T_i p)}$; on divise par $K_p k_q$.

D.2. Par identification : $\dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{S T_i}{K_p k_q}$ et $\dfrac{2m}{\omega_0} = T_i$, d'où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_p k_q}{S T_i}} \qquad m = \frac{T_i \omega_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_p k_q T_i}{S}}$$

$m = 0{,}7$: $T_i = \dfrac{4 m^2 S}{K_p k_q} = \dfrac{4 \times 0{,}49 \times 20}{0{,}2}$ soit $\boxed{T_i = 196\,\text{s}}$

D.3. À consigne constante :
$$x(p) = \frac{-\frac{1}{S p}}{1+\text{FTBO}(p)}\, q_s(p) = \frac{-T_i p}{S T_i p^2 + K_p k_q (1+T_i p)}\, q_s(p)$$

Le numérateur contient p : pour $p \to 0$, la fraction tend vers 0, donc $\boxed{\Delta x_\infty = 0}$.
L'action intégrale augmente la commande de 20 % et la maintient, même une fois l'écart annulé.

D.4. $\arg \text{FTBO}(j\omega) = \arg(1 + j\omega T_i) - \arg\big((j\omega)^2\big) = \arctan(\omega T_i) - 180°$.

Comme $\arctan(\omega T_i) > 0$, la phase reste toujours au-dessus de $-180°$: la marge de gain est infinie et la boucle est stable quel que soit K_p.

$$M_\Phi = \arctan(\omega_{0\,dB} T_i) = \arctan(0{,}011 \times 196) \quad \text{soit} \quad \boxed{M_\Phi \approx 65°}$$

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ établir un schéma fonctionnel, calculer FTBO(p) et FTBF(p) ; ex. 16.1 à 16.4
- ☐ évaluer les performances et la stabilité d'une boucle ; ex. 16.2, 16.6, sujet A
- ☐ choisir et régler un correcteur par la méthode de Broïda. ex. 16.5

Notes

CHAPITRE

17

Mesure et incertitudes

Évaluer, composer et exploiter l'incertitude d'une mesure

Dans ce chapitre

- Vocabulaire : mesurande, erreur, justesse, fidélité
- Incertitude de type A : série de mesures
- Incertitude de type B : notice, résolution, classe
- Composition des incertitudes
- Incertitude élargie, écriture d'un résultat, z-score
- Régression linéaire ; multimètre, pince, wattmètre

Objectifs

- ✓ Calculer l'incertitude-type d'une série de mesures ou d'un appareil
- ✓ Composer les incertitudes d'une grandeur calculée
- ✓ Écrire un résultat et le comparer à une référence
- ✓ Exploiter une régression linéaire

Ressources en ligne

Flashez ce code pour ouvrir la **fiche interactive** du chapitre, puis :

- le QCM d'auto-évaluation ;
- les TP virtuels associés ;
- le podcast du chapitre ;
- tous les exercices du polycopié numérique.

Pour réviser

Les boîtes à formules

Mon chantier : mission 17

Cours

Chapitre 17

Aucune mesure n'est exacte : deux techniciens qui mesurent la même tension avec deux multimètres différents n'affichent pas tout à fait la même valeur. En électrotechnique, on mesure pourtant tous les jours pour décider : réceptionner une installation, vérifier une prise de terre, contrôler le rendement d'un moteur, valider un compteur. Ce chapitre donne les outils pour **chiffrer la qualité** d'une mesure, puis pour **prendre une décision** en tenant compte de cette qualité.

17.1 Le vocabulaire de la mesure

Mesurande, valeur vraie et erreur

D

Définition Le **mesurande** est la grandeur que l'on veut mesurer, définie avec précision : par exemple « la valeur efficace de la tension entre phase et neutre au tableau divisionnaire, à 10 h ». Sa **valeur vraie** est inaccessible.
L'**erreur de mesure** est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie : erreur $= x_{mesure} - x_{vrai}$. Comme la valeur vraie est inconnue, l'erreur l'est aussi.
L'**incertitude de mesure** est un paramètre positif qui caractérise l'étendue des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer au mesurande. Contrairement à l'erreur, elle se **calcule**.

On ne cherche donc pas « la » valeur exacte du mesurande, mais un **intervalle** dans lequel elle se trouve avec une bonne probabilité. Un résultat de mesure comporte toujours trois éléments : une valeur, une incertitude et une unité.

Erreurs aléatoires et erreurs systématiques

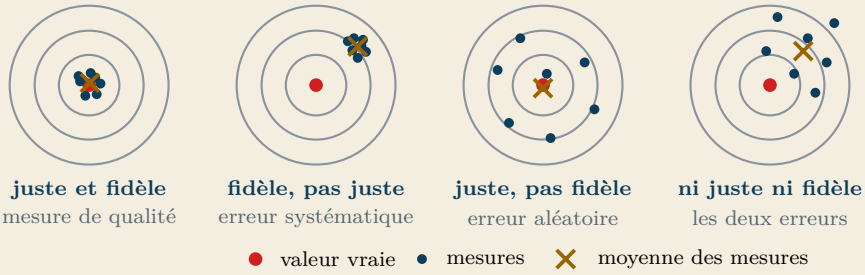
	Erreur aléatoire	**Erreur systématique**
Comportement	varie de façon imprévisible d'une mesure à l'autre	décale toutes les mesures dans le même sens
Exemples	position du conducteur dans les mâchoires d'une pince, fluctuations du réseau, bruit, lecture d'une aiguille	zéro d'une pince continue mal réglé, appareil mal étalonné, résistance des cordons oubliée, mauvaise méthode
Remède	répéter la mesure et faire la moyenne	corriger la méthode, réétalonner l'appareil

Ex

Exemple : la pince oubliée Un technicien mesure un courant continu avec une pince à effet Hall sans avoir fait le zéro : la pince indique 0,15 A alors qu'aucun courant ne circule. Toutes ses mesures sont décalées de +0,15 A : c'est une **erreur systématique**. Répéter dix fois la mesure ne la fait pas disparaître ; il suffit en revanche d'appuyer sur la touche ZERO avant de refermer la pince sur le câble.

Justesse et fidélité

On représente souvent les mesures par des impacts sur une cible dont le centre est la valeur vraie.



D

Définition Une méthode de mesure est **fidèle** si des mesures répétées sont **peu dispersées** : la fidélité est liée aux erreurs aléatoires et se chiffre par l'écart-type. Elle est **juste** si la **moyenne** des mesures est proche de la valeur vraie : la justesse est liée aux erreurs systématiques. On la vérifie en mesurant un étalon dont la valeur est connue.

\+

Répétabilité, reproductibilité, exactitude – hors programme La métrologie distingue la **répétabilité** (fidélité avec le même opérateur, le même appareil, dans les mêmes conditions) et la **reproductibilité** (opérateurs, appareils ou laboratoires différents). Une méthode à la fois juste et fidèle est dite **exacte**.

✗

Piège classique Ne pas confondre **erreur** (inconnue, avec un signe) et **incertitude** (calculée, toujours positive). Éviter aussi le mot « précision » pour parler du résultat : il désigne, dans une notice, la tolérance garantie par le constructeur de l'appareil.

Deux façons d'évaluer une incertitude

	Type A	**Type B**
Quand ?	on dispose d'une **série** de mesures répétées	on ne dispose que d'**une seule** mesure
Comment ?	traitement statistique : moyenne et écart-type	à partir des informations disponibles : notice, résolution, classe, certificat d'étalonnage
Résultat	$u(\bar{x}) = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$	$u(x) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}$

Dans les deux cas, on obtient une **incertitude-type**, notée $u(x)$ (u pour *uncertainty*), qui a la même unité que x. Elle joue le rôle d'un écart-type : c'est la « largeur » typique de la dispersion des valeurs attribuables au mesurande.

17.2 Incertitude de type A : série de mesures

Moyenne et écart-type expérimental

On réalise n mesures indépendantes x_1, x_2, …, x_n du même mesurande, dans les mêmes conditions.

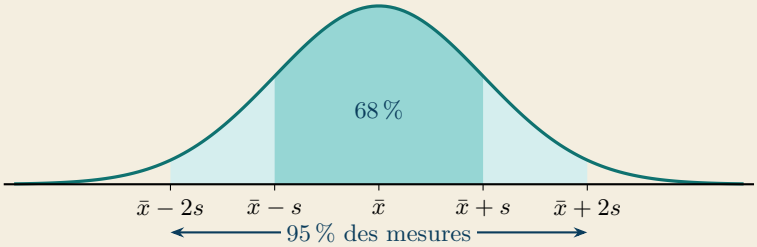
À retenir

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

La **moyenne** $\bar{x}$ est la meilleure estimation du mesurande. L'**écart-type expérimental** s (même unité que x) chiffre la dispersion des mesures.

On divise par $n-1$ et non par n : la moyenne a été calculée à partir des mêmes données, ce qui fait « perdre » un degré de liberté. Pour une petite série, diviser par n sous-estimerait la dispersion.

Quand le nombre de mesures est grand, leur répartition prend souvent la forme d'une courbe en cloche (loi normale, ou loi de Gauss) :



Pour une loi normale, environ 68 % des mesures se trouvent dans $[\bar{x} - s\,;\, \bar{x} + s]$ et 95 % dans $[\bar{x} - 2s\,;\, \bar{x} + 2s]$. Une mesure isolée à plus de $3s$ de la moyenne est suspecte (erreur de lecture, de calibre, de branchement).

Incertitude-type de la moyenne

La moyenne de n mesures est moins dispersée qu'une mesure isolée : les erreurs aléatoires se compensent en partie.

À retenir · Incertitude de type A

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Pour diviser l'incertitude par 2, il faut 4 fois plus de mesures ; pour la diviser par 10, il en faut 100 fois plus.

L'écart-type s caractérise la **méthode** : il se stabilise quand n augmente. C'est l'incertitude sur la **moyenne** qui diminue comme $1/\sqrt{n}$. La répétition ne réduit que les erreurs aléatoires : une erreur systématique reste entière, quel que soit le nombre de mesures.

Ex

Exemple : courant à vide d'un moteur asynchrone Huit binômes mesurent, avec des pinces différentes (conditions modifiées), le courant d'un moteur tournant à vide. Ils obtiennent (en A) : 2,46 ; 2,51 ; 2,48 ; 2,44 ; 2,50 ; 2,47 ; 2,53 ; 2,45.

$$\bar{I} = \frac{19{,}84}{8} = 2{,}480\,\text{A} \qquad s \approx 0{,}031\,2\,\text{A}$$

$$u(\bar{I}) = \frac{0{,}031\,2}{\sqrt{8}} \approx 0{,}011\,0\,\text{A}$$

On écrira $I_0 = (2{,}480 \pm 0{,}012)\,\text{A}$ (voir l'écriture d'un résultat au paragraphe 17.5).

Méthode : moyenne et écart-type à la calculatrice

- **Casio** : MENU, application *Statistique* ; saisir les valeurs dans List 1 ; CALC puis SET (1Var XList : List1, 1Var Freq : 1) ; 1-VAR ; lire $\bar{x}$ et s_x.
- **TI** : stats, *Modifier*, saisir dans L1 ; stats, CALC, *Stats 1-Var* ; lire $\bar{x}$ et S_x.
- **NumWorks** : application *Statistiques*, colonne V1 ; onglet *Stats* : lire la moyenne et l'« écart type échantillon s ».
- **Tableur** : `=MOYENNE(A1:A8)` et `=ECARTYPE.STANDARD(A1:A8)`.

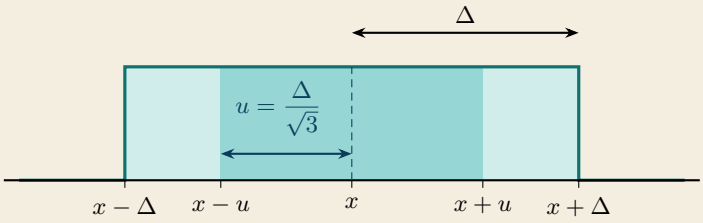
Vérifier que le nombre n affiché est le bon (pas d'anciennes valeurs dans la liste).

Piège classique La calculatrice affiche deux écarts-types. Il faut prendre s_x (Casio), S_x (TI) ou s (NumWorks), calculé avec $n-1$, et **pas** σ_x, calculé avec n. Dans l'exemple, $\sigma_x \approx 0{,}029\,2$ A : l'incertitude serait sous-estimée d'environ 6,5 %. Et ne pas oublier de diviser s par $\sqrt{n}$!

17.3 Incertitude de type B : mesure unique

Le principe : la loi uniforme

Quand on ne fait qu'une mesure, on utilise les informations sur l'appareil. Le constructeur garantit en général que l'écart entre la valeur affichée et la valeur vraie ne dépasse pas une borne Δ : la valeur vraie est quelque part dans l'intervalle $[x-\Delta\,;x+\Delta]$, sans position privilégiée. On modélise cette situation par une **loi uniforme** (rectangulaire), dont l'écart-type vaut $\Delta/\sqrt{3}$.



toutes les valeurs de l'intervalle $\pm\Delta$ sont également probables

★ **À retenir · Incertitude de type B**

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Δ : demi-largeur de l'intervalle garanti (précision constructeur, demi-graduation, demi-résolution…).

Appareil numérique : la notice

D **Définition** L'**unité de représentation** (UR, ou « digit ») est la plus petite variation affichable **sur le calibre utilisé**. Sur un afficheur 4 000 points, le calibre 40 V affiche 39,99 au maximum : 1 UR = 0,01 V ; sur le calibre 400 V, 1 UR = 0,1 V.

★ **À retenir** La notice donne la précision sous la forme $\pm(p\,\%$ de la lecture $+\, n$ UR) :

$$\Delta = \frac{p}{100} \times \text{lecture} + n \times \text{UR} \qquad u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Ex **Exemple : alimentation 24 V d'une armoire** Sur le calibre 40 V continu (1 UR = 0,01 V, précision $\pm(0{,}5\,\% + 2\,\text{UR})$), le multimètre affiche $U = 24{,}18$ V :

$$\Delta = 0{,}005 \times 24{,}18 + 2 \times 0{,}01 \approx 0{,}141\ \text{V}$$

$$u(U) = \frac{0{,}141}{\sqrt{3}} \approx 0{,}081\ \text{V}$$

L'incertitude relative vaut $\dfrac{0{,}081}{24{,}18} \approx 0{,}34\,\%$.

✗ **Piège classique** Prendre le calibre trop grand. La même tension lue sur le calibre 400 V (1 UR = 0,1 V) donne $\Delta = 0{,}005 \times 24{,}2 + 2 \times 0{,}1 \approx 0{,}32$ V, soit une incertitude plus de deux fois plus grande. On choisit **le plus petit calibre supérieur à la valeur mesurée**.

Résolution, lecture d'une graduation

Si l'on ne connaît que la résolution q d'un afficheur (sans notice), ou si l'on lit une valeur sur une échelle graduée de pas q, la valeur vraie est dans un intervalle de largeur q, soit $\Delta = q/2$:

★ **À retenir**

$$u = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{q}{\sqrt{12}} \qquad \text{double lecture (départ et arrivée) : } u = \sqrt{2} \times \frac{q}{\sqrt{12}}$$

Ex

Exemple Un tachymètre optique affiche la vitesse au tr/min près : $u = \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0{,}29\,\text{tr/min}$. La lecture d'un index de compteur au centième de kW·h au début puis à la fin d'un essai donne $u = \sqrt{2} \times \frac{0{,}01}{\sqrt{12}} \approx 0{,}004\,1\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

+

Appareil analogique : la classe – hors programme Pour un appareil à aiguille, la précision est donnée par sa **classe** (0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2,5) : c'est l'erreur maximale en pourcentage du **calibre**, quelle que soit la déviation :

$$\Delta = \frac{\text{classe} \times \text{calibre}}{100} \qquad u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Ampèremètre ferromagnétique de classe 1,5, calibre 10 A : $\Delta = 0{,}15\,\text{A}$ et $u = 0{,}087\,\text{A}$, quelle que soit la lecture. Pour $I = 6{,}2\,\text{A}$, l'incertitude relative vaut 1,4 % ; pour $I = 1{,}5\,\text{A}$, elle atteint 5,8 % : on choisit le calibre pour que l'aiguille dévie au-delà des deux tiers de l'échelle.

Les appareils de l'électrotechnicien

Le tableau donne des précisions **typiques** ; il faut toujours lire la notice de l'appareil utilisé, car elles dépendent du calibre, de la fréquence et du type de signal. La pince ampèremétrique est la moins précise : son indication dépend de la position du conducteur dans les mâchoires et des champs parasites (conducteurs voisins) ; il faut refermer complètement les mâchoires et centrer le câble. Un multimètre « RMS » (ou TRMS) mesure la vraie valeur efficace (voir § 5.2), même pour un signal non sinusoïdal ; un multimètre non RMS n'est juste qu'en sinusoïdal.

Appareil	Grandeur	Précision typique
Multimètre, position DC	tension continue	$\pm(0{,}5\,\% + 2\,\text{UR})$
Multimètre RMS, position AC	tension efficace à 50 Hz	$\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$
Multimètre, position A	courant (en série, avec fusible)	$\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$
Pince ampèremétrique	courant efficace, sans ouvrir le circuit	$\pm(2{,}0\,\% + 5\,\text{UR})$
Wattmètre, analyseur	puissance active	$\pm(1{,}0\,\% + 5\,\text{UR})$
Tachymètre optique	vitesse de rotation	$\pm(0{,}05\,\% + 1\,\text{UR})$

Ex

Exemple : courant d'un groupe de ventilation Une pince (calibre 40 A, 1 UR = 0,01 A, $\pm(2\,\% + 5\,\text{UR})$) indique $I = 12{,}60\,\text{A}$:

$$\Delta = 0{,}02 \times 12{,}60 + 5 \times 0{,}01 \approx 0{,}302\,\text{A}$$

$$u(I) = \frac{0{,}302}{\sqrt{3}} \approx 0{,}17\,\text{A}\ (1{,}4\,\%)$$

Combiner type A et type B – hors programme Quand on fait une série de mesures avec le **même** appareil, la moyenne réduit les erreurs aléatoires, mais pas l'erreur propre à l'appareil, qui décale toutes les mesures de la même façon. On combine alors les deux évaluations : $u(x) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$. En pratique, l'un des deux termes est souvent nettement plus grand que l'autre et impose sa valeur.

17.4 Composition des incertitudes

Une grandeur est souvent **calculée** à partir de plusieurs mesures : $P = U\,I$, $R = U/I$, $\eta = P_u/P_a$… Si les mesures sont indépendantes, leurs incertitudes se combinent **quadratiquement** (comme les côtés d'un triangle rectangle) : elles ne s'ajoutent pas simplement, car il est peu probable que toutes les erreurs soient maximales et de même sens en même temps.

Somme et différence

À retenir

$$q = a + b \quad \text{ou} \quad q = a - b \qquad \Longrightarrow \qquad u(q) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$$

On compose les incertitudes **absolues**.

Exemple : chute de tension dans un câble On mesure la tension au départ ($U_1 = 231{,}2\,\text{V}$) et à l'arrivée ($U_2 = 226{,}8\,\text{V}$) d'une ligne, avec un multimètre sur le calibre 400 V AC ($\pm(1\,\% + 3\,\text{UR})$, $1\ \text{UR} = 0{,}1\,\text{V}$) : $u(U_1) \approx 1{,}51\,\text{V}$ et $u(U_2) \approx 1{,}48\,\text{V}$.

$$\Delta U = U_1 - U_2 = 4{,}4\,\text{V} \qquad u(\Delta U) = \sqrt{1{,}51^2 + 1{,}48^2} \approx 2{,}12\,\text{V}$$

L'incertitude relative atteint près de 50 % ! Mesurée **directement** entre le départ et l'arrivée de la phase (calibre 4 V, $\pm(0{,}5\,\% + 2\,\text{UR})$, $1\ \text{UR} = 0{,}001\,\text{V}$), la chute de tension vaut $\Delta U = 4{,}412\,\text{V}$ avec $u = 0{,}014\,\text{V}$, soit 0,3 %.

Piège classique La différence de deux grandeurs voisines est toujours très imprécise en valeur relative. Quand c'est possible, on mesure directement la différence (chute de tension, pertes) plutôt que de la calculer.

Produit et quotient

À retenir

$$q = a \times b \quad \text{ou} \quad q = \frac{a}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u(q)}{q} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$$

On compose les incertitudes **relatives**. Un coefficient constant connu exactement (2π, $\sqrt{3}$, $1/60$) ne change pas l'incertitude relative.

Ex

Exemple : puissance d'une résistance chauffante en continu Voltmètre : $U = 48{,}3\,\text{V}$, calibre 400 V, 1 UR $= 0{,}1\,\text{V}$, $\pm(0{,}5\,\% + 2\,\text{UR})$; ampèremètre : $I = 10{,}42\,\text{A}$, calibre 20 A, 1 UR $= 0{,}01\,\text{A}$, $\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$.

$$u(U) = \frac{0{,}005\,0 \times 48{,}3 + 0{,}2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}255\,\text{V}\ (0{,}53\,\%)$$

$$u(I) = \frac{0{,}010 \times 10{,}42 + 0{,}03}{\sqrt{3}} \approx 0{,}077\,5\,\text{A}\ (0{,}74\,\%)$$

$$P = U\,I \approx 503{,}3\,\text{W} \qquad \frac{u(P)}{P} = \sqrt{0{,}53^2 + 0{,}74^2}\,\% \approx 0{,}91\,\%$$

$$u(P) \approx 4{,}6\,\text{W}$$

+

Puissances et formule générale – hors programme Pour $q = a^\alpha\,b^\beta$, chaque incertitude relative est multipliée par son exposant :

$$\frac{u(q)}{q} = \sqrt{\left(\alpha\,\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\beta\,\frac{u(b)}{b}\right)^2}$$

Pour $P = R\,I^2$, l'incertitude relative sur I compte **double** : avec la mesure de courant ci-dessus et $R = 4{,}63\,\Omega$ à $0{,}02\,\Omega$ près (0,43 %) :

$$\frac{u(P)}{P} = \sqrt{0{,}43^2 + (2 \times 0{,}74)^2}\,\% \approx 1{,}5\,\%$$

la méthode $P = U\,I$ est meilleure.
Toutes ces formules sont des cas particuliers de la **formule générale** : si $q = f(a, b\ldots)$ avec des mesures indépendantes,

$$u(q) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 u(a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 u(b)^2 + \ldots}$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ (dérivée partielle) est la dérivée de f par rapport à a, les autres grandeurs étant considérées comme des constantes. Exemple : pour la force électromotrice $E = U - R\,I$ d'un moteur à courant continu, $u(E) = \sqrt{u(U)^2 + I^2\,u(R)^2 + R^2\,u(I)^2}$.

✎

Méthode : composer des incertitudes en 4 étapes

1. Écrire la relation qui donne le résultat à partir des grandeurs mesurées.
2. Calculer l'incertitude-type de chaque grandeur mesurée (type A ou type B) et, pour un produit ou un quotient, son incertitude relative.
3. Composer avec la formule adaptée (absolues pour une somme ou une différence, relatives pour un produit ou un quotient).
4. Repérer le **terme dominant** : c'est la mesure qu'il faut améliorer en priorité. Améliorer les autres ne sert presque à rien, car les termes sont élevés au carré.

✗ **Piège classique** Additionner directement les incertitudes ($0{,}53 + 0{,}74 = 1{,}27\,\%$) surestime le résultat. Composer des incertitudes absolues pour un produit (des volts avec des ampères !) n'a pas de sens.

17.5 Écrire un résultat de mesure

Chiffres significatifs

D **Définition** Les **chiffres significatifs** d'un nombre sont tous ses chiffres à partir du premier chiffre non nul en partant de la gauche. 0,082 0 en compte 3 (8, 2 et 0) ; 24,18 en compte 4 ; $3{,}0 \times 10^3$ en compte 2.

Les zéros situés à gauche ne sont pas significatifs, mais ceux de droite le sont : écrire 2,480 A signifie que le millième d'ampère a un sens, ce qui n'est pas le cas de 2,48 A.

L'incertitude-type $u(x)$ définit un intervalle $x \pm u(x)$. Pour une distribution gaussienne, il contient la valeur vraie avec une probabilité d'environ 68 %, et $x \pm 2u(x)$ d'environ 95 % ; pour une loi uniforme, $\pm 2u(x)$ couvre déjà tout l'intervalle. C'est $x \pm 2u(x)$ que l'on utilise pour prendre une décision (réception, conformité).

\+ **Incertitude élargie** – hors programme Les normes appellent **incertitude élargie** le produit $U_e(x) = k \times u(x)$, où k est le **facteur d'élargissement** : $k = 2$ pour un niveau de confiance d'environ 95 % (valeur usuelle), $k = 3$ pour environ 99,7 %. On écrit alors $x = x_{mesure} \pm U_e(x)$ en précisant « $k = 2$ ». Les certificats d'étalonnage la notent souvent $U(x)$; dans ce livre, l'indice e évite la confusion avec une tension. Avec des incertitudes élargies, les laboratoires comparent deux résultats par

$$E_n = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{U_e(x_1)^2 + U_e(x_2)^2}}$$

Ils sont compatibles si $E_n \leq 1$, ce qui équivaut à $z \leq 2$.

Règles d'écriture

★ **À retenir**

$$x = x_{mesure} \pm u(x) \quad \text{(unité)}$$

- ▷ l'incertitude est arrondie **par excès** à **un ou deux** chiffres significatifs ;
- ▷ la valeur est arrondie **au même rang** (même nombre de décimales) que l'incertitude ;
- ▷ valeur et incertitude ont la même unité et la même puissance de 10.

Ex

Exemple Valeur calculée $\bar{R} = 220{,}175\,\Omega$, incertitude-type $u = 0{,}262\,4\,\Omega$: on arrondit l'incertitude par excès à $0{,}27\,\Omega$, puis la valeur au centième :

$$R = (220{,}18 \pm 0{,}27)\,\Omega \qquad \text{incertitude relative : } \frac{u(R)}{R} = \frac{0{,}27}{220{,}18} \approx 0{,}12\,\%$$

Écriture	Commentaire
$R = (220{,}175\,0 \pm 0{,}262\,4)\,\Omega$	trop de chiffres : l'incertitude ne se connaît pas à 0,1 % près
$R = 220 \pm 0{,}27\,\Omega$	valeur et incertitude ne sont pas au même rang
$R = 220{,}18 \pm 270\,\text{m}\Omega$	unités différentes
$R = 220{,}18 \pm 0{,}27$	unité oubliée
$R = (220{,}18 \pm 0{,}27)\,\Omega$	✓ correct

✗

Piège classique Garder tous les chiffres dans les calculs intermédiaires et n'arrondir qu'à la fin. Arrondir à chaque étape accumule des erreurs d'arrondi. Ne pas non plus donner une valeur avec plus de décimales que l'appareil n'en affiche quand il s'agit d'une mesure unique : $U = (24{,}18 \pm 0{,}09)\,\text{V}$ (incertitude arrondie à un chiffre significatif) plutôt que $(24{,}180 \pm 0{,}082)\,\text{V}$ (une incertitude-type de $0{,}081\,3\,\text{V}$ arrondie par excès).

17.6 Comparer à une valeur de référence

Le z-score

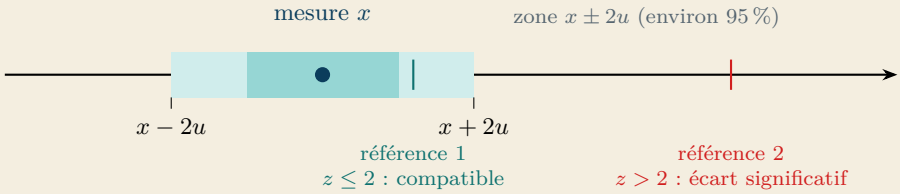
Une mesure ne tombe jamais exactement sur la valeur attendue (valeur de plaque, valeur tabulée, consigne). Pour savoir si l'écart est « normal », on l'exprime en nombre d'incertitudes-types : c'est le **z-score**, ou écart normalisé.

★

À retenir · Écart normalisé (z-score)

$$z = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)} \qquad z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

(à gauche : comparaison à une référence connue exactement ; à droite : comparaison de deux mesures)
$z \leq 2$: résultat **compatible** avec la référence ; $z > 2$: écart **significatif**, il faut chercher une erreur systématique ou une incertitude sous-estimée.



Ex **Exemple : résistance de freinage d'un variateur** Une résistance marquée $R_n = 47\,\Omega$ ($\pm 10\,\%$) est mesurée : $R = (48{,}6 \pm 0{,}4)\,\Omega$ (incertitude-type).

$$z = \frac{|48{,}6 - 47|}{0{,}4} = 4 > 2$$

L'écart est **significatif** : la résistance ne vaut pas $47\,\Omega$. Elle est pourtant **conforme** à sa tolérance de fabrication, puisque $R \pm 2u = [47{,}8\,;49{,}4\,\Omega]$ est inclus dans la tolérance $[42{,}3\,;51{,}7\,\Omega]$: sa valeur réelle est simplement différente de la valeur nominale, ce que la tolérance autorise.

Ex **Exemple : deux groupes de TP, deux méthodes** Deux groupes mesurent la résistance d'un enroulement de moteur. Le groupe 1, par une série de mesures à l'ohmmètre, obtient $R_1 = (2{,}846 \pm 0{,}012)\,\Omega$; le groupe 2, par la méthode voltampèremétrique, obtient $R_2 = (2{,}81 \pm 0{,}03)\,\Omega$.

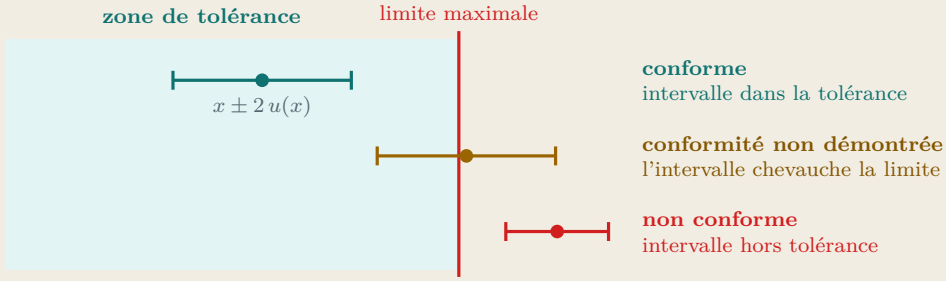
$$z = \frac{|2{,}846 - 2{,}81|}{\sqrt{0{,}012^2 + 0{,}03^2}} = \frac{0{,}036}{0{,}032} \approx 1{,}1 \leq 2$$

Les deux résultats sont **compatibles** : l'écart de $36\,\text{m}\Omega$ s'explique par les incertitudes déclarées. Ce constat ne prouve pas la justesse des deux méthodes : un biais commun passerait inaperçu.

✗ **Piège classique** « Compatible avec la valeur nominale » et « conforme à la tolérance » sont deux questions différentes. Le z-score compare deux valeurs compte tenu de l'incertitude de mesure ; la tolérance est un intervalle fixé par le constructeur ou le cahier des charges.

\+ **Décider de la conformité** – hors programme Pour vérifier qu'une grandeur respecte une limite (résistance de prise de terre inférieure à $100\,\Omega$, tension d'alimentation dans $24\,\text{V} \pm 1\,\%$…), on compare l'intervalle $[x - 2\,u(x)\,;x + 2\,u(x)]$ (environ $95\,\%$) à la zone de tolérance.

- ▷ tout l'intervalle est dans la zone de tolérance : la grandeur est **conforme** ;
- ▷ tout l'intervalle est hors de la zone de tolérance : elle est **non conforme** ;
- ▷ l'intervalle chevauche une limite : la **conformité n'est pas démontrée**.



Dans le cas intermédiaire, la mesure ne permet pas de conclure : on refait la mesure avec un appareil plus précis, ou l'on applique la règle prévue par le contrat. Pour pouvoir contrôler une tolérance, il faut un moyen de mesure dont l'incertitude $2\,u$ est nettement plus petite que cette tolérance (au moins 3 à 4 fois).

17.7 Régression linéaire

Principe

Pour vérifier une loi linéaire (loi d'Ohm, $E = k\,n$ d'une machine à courant continu (voir § 6.2), sensibilité d'un capteur…) et en déterminer les coefficients, on relève une série de points $(x_k\,;y_k)$ et l'on cherche la droite qui passe au plus près de tous les points.

Définition La **régression linéaire** (méthode des moindres carrés) détermine la droite $y = a\,x + b$ qui rend minimale la somme des carrés des écarts verticaux entre les points et la droite. a est le coefficient directeur, b l'ordonnée à l'origine. Le **coefficient de détermination** r^2 (entre 0 et 1) indique dans quelle mesure les points sont alignés.

Méthode : régression linéaire à la calculatrice

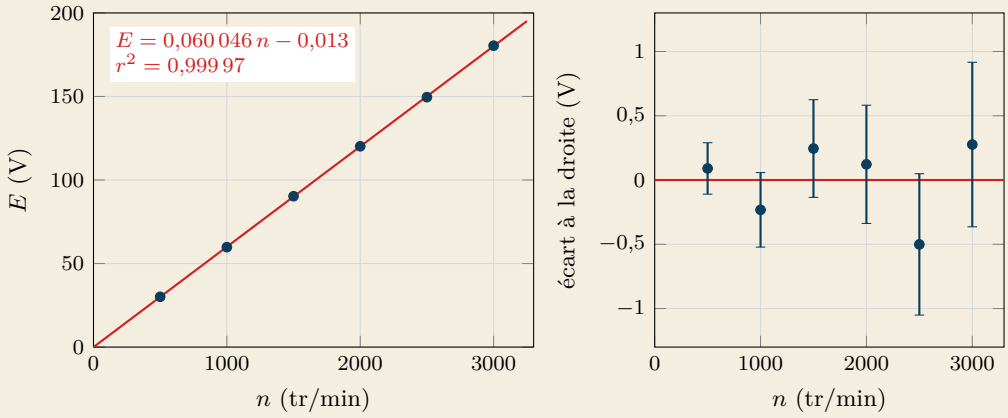
- **Casio** : application *Statistique* ; abscisses dans List 1, ordonnées dans List 2 ; CALC, REG, X, ax+b ; lire a, b et r^2.
- **TI** : stats, *Modifier* : abscisses dans L1, ordonnées dans L2 ; stats, CALC, *RégLin(ax+b)* avec Xliste : L1 et Yliste : L2. Si r^2 ne s'affiche pas, activer les diagnostics statistiques dans l'écran mode.
- **NumWorks** : application *Régressions* ; colonnes X1 et Y1 ; onglet *Graphique*, *Régression*, *Linéaire* ; l'onglet *Stats* affiche a, b et r^2.
- **Tableur** : nuage de points, courbe de tendance linéaire avec affichage de l'équation et de R^2, ou fonction `DROITEREG`.

Toujours tracer le nuage de points : la calculatrice donne une droite même pour des points qui ne sont pas alignés.

Exemple : étalonnage d'une dynamo tachymétrique

Sur un banc d'essai, la dynamo tachymétrique fournit une tension continue E proportionnelle à la vitesse de rotation n. On relève E (voltmètre, $u(E)$ de 0,2 V à 0,6 V selon la valeur) pour six vitesses imposées :

n (tr/min)	500	1000	1500	2000	2500	3000
E (V)	30,1	59,8	90,3	120,2	149,6	180,4



À droite : écarts entre les mesures et la droite (résidus), avec leurs barres d'incertitude $\pm u(E)$. À l'échelle du graphique de gauche, ces barres seraient invisibles.

La calculatrice donne $a \approx 0{,}060\,046\,\text{V/(tr/min)}$, $b \approx -0{,}013\,\text{V}$ et $r^2 \approx 0{,}999\,97$. Les écarts entre les points et la droite ne dépassent guère 0,5 V, de l'ordre des incertitudes de mesure. L'ordonnée à l'origine est négligeable devant les tensions mesurées : on retient le modèle linéaire $E = k\,n$ avec $k \approx 60{,}0\,\text{V}$ pour $1\,000\,\text{tr/min}$, valeur annoncée par le constructeur.

À retenir · Valider un modèle linéaire

- la droite passe par (presque) toutes les barres d'incertitude ;
- les points sont répartis de part et d'autre de la droite, **sans courbure** systématique ;
- r^2 est proche de 1 (critère nécessaire mais **pas suffisant** à lui seul) ;
- si b est compatible avec 0 (petit devant les valeurs mesurées ou devant son incertitude), le modèle est $y = a\,x$.

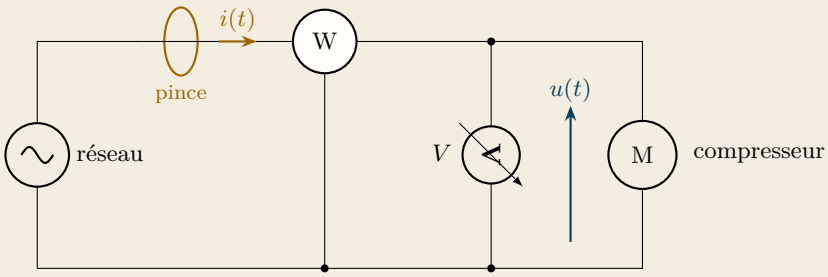
Piège classique Un r^2 de 0,999 ne prouve pas que la loi est linéaire : des points légèrement incurvés (saturation d'un circuit magnétique (voir § 7.4), par exemple) donnent aussi un r^2 très proche de 1. Il faut toujours **regarder le graphique** et la répartition des écarts.

Le tableur (fonction `DROITEREG`, avec l'option statistiques) fournit aussi les incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$ des coefficients : on peut alors comparer a à une valeur de référence par un z-score, ou tester si b est compatible avec 0 ($|b| \leq 2\,u(b)$).

En ligne : simulateur de série de mesures (évolution de s et de u avec n), calculateur de type B, composition $P = U\,I$, z-score interactif, calculateur d'arrondi, procédures pour Casio, TI et NumWorks, et QCM d'auto-évaluation.

17.8 Synthèse : mesures sur un moteur monophasé

Un technicien vérifie le facteur de puissance (voir § 1.7) d'un compresseur monophasé dont la plaque annonce $\cos(\Phi) = 0{,}80$. Il utilise un multimètre RMS, une pince ampèremétrique et un wattmètre.



Méthode : la démarche complète d'un mesurage

1. **Définir le mesurande** et la grandeur de référence éventuelle (plaque, consigne, tolérance du cahier des charges).
2. **Choisir les appareils et les calibres** : appareil RMS en alternatif, plus petit calibre supérieur à la valeur, ampèremètre en série plutôt que pince si la précision compte.
3. **Évaluer chaque incertitude-type** : type A si l'on dispose d'une série, type B à partir de la notice.
4. **Composer** les incertitudes pour la grandeur calculée et repérer le terme dominant.
5. **Écrire le résultat** : valeur, incertitude (incertitude-type, ou $2u$ pour un intervalle à 95 %), unité, avec les bons arrondis.
6. **Conclure** : z-score par rapport à la référence, ou position de l'intervalle $x \pm 2u$ par rapport à la tolérance. Une conclusion se rédige en une phrase : « compatible », « écart significatif », « conforme », « conformité non démontrée ».

Exemple : facteur de puissance d'un compresseur **Mesures.** Multimètre (calibre 400 V AC, $\pm(1\,\%+3\,\text{UR})$, 1 UR = 0,1 V) : $U = 229{,}4\,\text{V}$; pince (calibre 40 A, $\pm(2\,\%+5\,\text{UR})$, 1 UR = 0,01 A) : $I = 6{,}84\,\text{A}$; wattmètre ($\pm(1{,}5\,\%+5\,\text{UR})$, 1 UR = 1 W) : $P = 1\,236\,\text{W}$.

Incertitudes-types (type B).

$$u(U) = \frac{2{,}594}{\sqrt{3}} \approx 1{,}50\,\text{V}\ (0{,}65\,\%) \qquad u(I) = \frac{0{,}186\,8}{\sqrt{3}} \approx 0{,}108\,\text{A}\ (1{,}58\,\%)$$

$$u(P) = \frac{23{,}54}{\sqrt{3}} \approx 13{,}6\,\text{W}\ (1{,}10\,\%)$$

Ex **Facteur de puissance.**

$$\cos(\Phi) = \frac{P}{U\,I} = \frac{1236}{229{,}4 \times 6{,}84} \approx 0{,}787\,7$$

C'est un quotient de trois grandeurs mesurées :

$$\frac{u(\cos(\Phi))}{\cos(\Phi)} = \sqrt{0{,}65^2 + 1{,}58^2 + 1{,}10^2}\ \% \approx 2{,}03\,\%$$

$$u(\cos(\Phi)) \approx 0{,}016$$

Résultat. $\cos(\Phi) = 0{,}788 \pm 0{,}016$; l'intervalle à 95 % est $0{,}788 \pm 0{,}032$.
Comparaison.

$$z = \frac{|0{,}787\,7 - 0{,}80|}{0{,}016} \approx 0{,}8 \leq 2$$

La mesure est compatible avec la plaque. Le terme dominant est la pince : pour affiner, il faudrait mesurer le courant avec un ampèremètre en série.

✗ **Piège classique** Mesurer un courant continu avec une pince ordinaire. Une pince « à transformateur » ne mesure que l'alternatif ; en continu (bus d'un variateur, batterie, induit d'une machine à courant continu), il faut une pince **à effet Hall**, réglée au zéro avant chaque mesure.

Ex **Exemple : améliorer la mesure** On remplace la pince par un multimètre en position A, branché en série (calibre 10 A, $\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$, 1 UR = 0,01 A) :

$$u(I) = \frac{0{,}068\,4 + 0{,}03}{\sqrt{3}} \approx 0{,}057\,\text{A}$$

soit 0,83 % au lieu de 1,58 %.

$$\frac{u(\cos(\Phi))}{\cos(\Phi)} = \sqrt{0{,}65^2 + 0{,}83^2 + 1{,}10^2}\ \% \approx 1{,}52\,\%$$

$$u(\cos(\Phi)) \approx 0{,}012$$

La demi-largeur de l'intervalle à 95 % ($2u$) passe de 0,032 à 0,025. Le wattmètre devient le terme dominant : il est inutile de chercher un ampèremètre encore meilleur.

Ex **Exemple : conclusion rédigée pour le compresseur** « Le facteur de puissance mesuré vaut $\cos(\Phi) = 0{,}788 \pm 0{,}016$ (incertitude-type). L'écart avec la valeur de plaque 0,80 correspond à un z-score de 0,8 : la mesure est compatible avec la plaque, le compresseur fonctionne normalement. L'incertitude est dominée par la pince ampèremétrique ; une mesure du courant en série la réduirait d'un quart. »
Une bonne conclusion donne : résultat, incertitude, unité, référence, critère et décision.

L'essentiel

Chapitre 17

Vocabulaire, incertitudes de type A et de type B

Erreur de mesure	erreur $= x_{mesure} - x_{vrai}$
Fidélité, justesse	fidèle : faible dispersion juste : $\bar{x} \approx x_{vrai}$
Moyenne	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$
Écart-type expérimental	$s = \sqrt{\dfrac{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$ $(s_x,\ S_x)$
Répartition des mesures	$\bar{x} \pm s$: 68 % $\bar{x} \pm 2s$: 95 %
Type A (série de n mesures)	$u(\bar{x}) = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
Type B (mesure unique)	$u(x) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}$
Appareil numérique	$\Delta = \dfrac{p}{100} \times \text{lecture} + n \times \text{UR}$
Unité de représentation (UR)	plus petite variation affichée sur le calibre
Graduation q	$u = \dfrac{q}{\sqrt{12}}$ double lecture : $u = \sqrt{2}\,\dfrac{q}{\sqrt{12}}$

Composition, écriture et comparaison d'un résultat

Somme, différence	$u(a \pm b) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$
Produit, quotient	$\dfrac{u(q)}{q} = \sqrt{\left(\dfrac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{u(b)}{b}\right)^2}$
Écriture d'un résultat	$x = x_{mesure} \pm u(x)$ (unité)
Arrondis	u par excès (1 ou 2 chiffres) ; x au même rang
Incertitude relative	$\dfrac{u(x)}{\lvert x \rvert}$ (en %)
z-score (référence)	$z = \dfrac{\lvert x - x_{ref} \rvert}{u(x)}$
z-score (deux mesures)	$z = \dfrac{\lvert x_1 - x_2 \rvert}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$
Compatibilité	$z \leq 2$ compatible $\quad z > 2$ écart significatif
Régression linéaire	$y = a\,x + b \quad r^2 \approx 1$
Modèle linéaire $y = a\,x$	b compatible avec 0

Exercices

Chapitre 17

Exercice 17.1 – Contrôle d'une alimentation 24 V ★☆☆

Dans une usine de conditionnement de produits laitiers, les automates et les capteurs d'une ligne sont alimentés par une alimentation à découpage 24 V continu. Depuis quelques semaines, plusieurs détecteurs inductifs tombent en panne prématurément. Le cahier des charges de la ligne impose une tension de $24\,\text{V} \pm 1\,\%$ en sortie d'alimentation. Le technicien de maintenance mesure cette tension au multimètre et doit dire si l'alimentation doit être réglée.

Données

- Multimètre 4 000 points, position DC ; précision $\pm(0{,}5\,\%$ de la lecture $+$ 2 UR).
- Calibre 40 V : 1 UR $= 0{,}01$ V ; calibre 400 V : 1 UR $= 0{,}1$ V.
- Sur le calibre 40 V, l'appareil affiche $U = 24{,}47$ V.
- Incertitude élargie : $U_e = 2\,u$; l'intervalle $x \pm U_e$ contient la valeur vraie avec une probabilité d'environ 95 %.
- Règle de décision : la grandeur est conforme si tout l'intervalle $x \pm 2\,u(x)$ est dans la zone de tolérance, non conforme s'il est entièrement en dehors ; sinon, la conformité n'est pas démontrée.

1. Quel est le mesurande ? L'évaluation de l'incertitude est-elle de type A ou de type B ? Justifier.
2. Calculer la précision Δ de l'appareil, puis l'incertitude-type $u(U)$.
3. Écrire le résultat de la mesure (incertitude arrondie à un chiffre significatif), puis calculer l'incertitude relative.
4. Sur le calibre 400 V, l'appareil affiche $U = 24{,}5$ V. Calculer la nouvelle incertitude-type et l'incertitude relative. Quel calibre fallait-il choisir ?
5. Calculer l'incertitude élargie $U_e(U)$ pour $k = 2$ (mesure sur le calibre 40 V), puis l'intervalle correspondant.
6. Déterminer la zone de tolérance du cahier des charges. L'alimentation est-elle conforme ? Que doit faire le technicien ?

→ corrigé p. 631

Exercice 17.2 – Deux contrôleurs de différentiels ★☆☆

Une entreprise d'installation électrique fait vérifier chaque année ses contrôleurs d'installation, qui mesurent notamment le temps de déclenchement des interrupteurs différentiels. Le responsable qualité branche successivement deux contrôleurs, A (récent) et B (plus ancien), sur un simulateur étalon qui coupe le circuit exactement $t_{ref} = 40{,}0$ ms après l'apparition du défaut (incertitude négligeable). Il réalise dix

mesures avec chaque contrôleur et doit décider si l'un d'eux doit être envoyé en réétalonnage.

A (ms)	40,6	39,4	41,1	40,2	39,8	40,9	39,6	40,5	41,3	39,9
B (ms)	43,4	43,7	43,2	43,6	43,5	43,3	43,8	43,4	43,6	43,5

1. Pourquoi les dix mesures faites avec un même contrôleur ne sont-elles pas identiques ? De quel type d'erreur s'agit-il ?
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer pour le contrôleur A la moyenne $\bar{t}_A$ et l'écart-type expérimental s_A. Quelle ligne de la calculatrice faut-il lire ?
3. Calculer l'incertitude-type $u(\bar{t}_A)$ et écrire le résultat.
4. Reprendre les questions 2 et 3 pour le contrôleur B.
5. Calculer le z-score de chaque contrôleur par rapport à t_{ref}. Conclure.
6. Lequel des deux contrôleurs est le plus fidèle ? Lequel est le plus juste ? Quelle opération faut-il faire sur le contrôleur B ?
7. Combien de mesures faudrait-il faire avec le contrôleur A pour diviser son incertitude-type par 3 ?

→ corrigé p. 632

Exercice 17.3 – Puissance d'une résistance de thermoformeuse ★★☆

Une entreprise de plasturgie fabrique des barquettes alimentaires par thermoformage : une feuille de plastique est chauffée par des résistances infrarouges avant d'être moulée. La production constate que certaines barquettes sont mal formées sur un côté de la machine. Le technicien soupçonne une résistance qui aurait perdu de la puissance ; sa plaque indique 2 000 W sous 230 V ($\pm 5\,\%$). Il mesure la puissance absorbée par deux méthodes avec les appareils de l'atelier.

Données

- Multimètre RMS, calibre 400 V AC (1 UR = 0,1 V, $\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$) : $U = 230{,}2\,\text{V}$.
- Pince ampèremétrique, calibre 40 A (1 UR = 0,01 A, $\pm(2{,}0\,\% + 5\,\text{UR})$) : $I = 8{,}52\,\text{A}$.
- Wattmètre numérique (1 UR = 1 W, $\pm(1{,}0\,\% + 5\,\text{UR})$) : $P_w = 1\,958\,\text{W}$.
- Règle de décision : la grandeur est conforme si tout l'intervalle $x \pm 2\,u(x)$ est dans la zone de tolérance, non conforme s'il est entièrement en dehors ; sinon, la conformité n'est pas démontrée.

I- Méthode voltampèremétrique

1. La résistance est un récepteur purement résistif. Justifier que sa puissance active s'écrit $P = U\,I$.
2. Calculer les incertitudes-types $u(U)$ et $u(I)$, puis les incertitudes relatives correspondantes.

3. Calculer P, puis son incertitude-type $u(P)$. Écrire le résultat.

4. Quelle mesure limite la qualité du résultat ? Justifier.

II- Méthode wattmétrique et conclusion

5. Calculer l'incertitude-type $u(P_w)$ et écrire le résultat de la mesure au wattmètre.

6. Les deux méthodes donnent-elles des résultats compatibles ? Justifier par un z-score.

7. Comparer P_w à la puissance de plaque à l'aide d'un z-score, puis vérifier si la résistance respecte sa tolérance. Peut-on affirmer que la résistance a perdu de la puissance ?

→ corrigé p. 633

Exercice 17.4 – Prise de terre d'un bâtiment agricole ★★☆

Une coopérative agricole construit un hangar de stockage de céréales équipé de séchoirs et de convoyeurs. L'installation est en schéma TT : la sécurité des personnes repose sur la prise de terre et sur les dispositifs différentiels. Le maître d'ouvrage impose dans son cahier des charges une résistance de prise de terre $R_T \leq 100\,\Omega$, et demande que la conformité soit démontrée avec une incertitude élargie ($k = 2$). L'électricien mesure R_T par la méthode voltampèremétrique : il injecte un courant I entre la prise de terre et un piquet auxiliaire, et mesure la tension U entre la prise de terre et un piquet de potentiel.

Données

- Voltmètre, calibre 40 V AC (1 UR = 0,01 V, $\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$).
- Ampèremètre, calibre 400 mA AC (1 UR = 0,1 mA, $\pm(1{,}5\,\% + 3\,\text{UR})$).
- Mesure de réception (printemps) : $U = 7{,}86$ V et $I = 92{,}4$ mA.
- Incertitude élargie : $U_e = 2\,u$; l'intervalle $x \pm U_e$ contient la valeur vraie avec une probabilité d'environ 95 %.
- Règle de décision : la grandeur est conforme si tout l'intervalle $x \pm U_e$ est dans la zone de tolérance, non conforme s'il est entièrement en dehors ; sinon, la conformité n'est pas démontrée.

I- Mesure de réception

1. Calculer $R_T = \dfrac{U}{I}$.

2. Calculer les incertitudes-types $u(U)$ et $u(I)$, puis l'incertitude-type $u(R_T)$.

3. Calculer l'incertitude élargie ($k = 2$) et écrire le résultat. La conformité au cahier des charges est-elle démontrée ?

4. Le bureau de contrôle mesure la même prise de terre avec un telluromètre : $R'_T = 88\,\Omega$ (1 UR = 1 Ω, $\pm(2\,\% + 3\,\text{UR})$). Les deux mesures sont-elles compatibles ?

II- Contrôle en fin d'été

Après un été très sec, l'électricien refait la mesure avec les mêmes appareils et les mêmes calibres : $U = 8{,}95\,\text{V}$ et $I = 90{,}4\,\text{mA}$.

5. Calculer la nouvelle valeur de R_T, son incertitude-type et son incertitude élargie ($k = 2$).
6. La conformité est-elle encore démontrée ? Que conseiller au maître d'ouvrage ?
7. L'augmentation de la résistance de terre entre le printemps et la fin de l'été est-elle significative ? Justifier par le calcul et l'interpréter physiquement.

→ corrigé p. 634

Exercice 17.5 – Étalonnage d'un capteur de courant à effet Hall ★★☆

Un fabricant de variateurs de vitesse contrôle en sortie de chaîne les capteurs de courant à effet Hall qui équipent ses produits. Le capteur délivre une tension U_s image du courant I ; sa documentation annonce une sensibilité de $100\,\text{mV/A}$ et une tension nulle à courant nul. Sur le banc de contrôle, une source de courant étalon impose des courants connus (incertitude négligeable) et un multimètre (calibre 4 V DC, 1 UR = 1 mV, $\pm(0{,}5\,\%+3\,\text{UR})$) mesure U_s. Le technicien doit valider le capteur et établir la relation à programmer dans le variateur.

I (A)	0	2	4	6	8	10
U_s (V)	0,012	0,208	0,405	0,611	0,806	1,004

1. Calculer l'incertitude-type $u(U_s)$ pour la première et la dernière mesure.
2. À la calculatrice, réaliser la régression linéaire $U_s = a\,I + b$. Donner a, b et r^2.
3. Calculer l'écart entre la mesure et le modèle pour $I = 6\,\text{A}$ (c'est l'écart le plus grand). Le comparer à l'incertitude de mesure. Le modèle linéaire est-il validé ?
4. Le tableur (fonction `DROITEREG`) indique $u(a) = 0{,}000\,33\,\text{V/A}$ et $u(b) = 0{,}002\,0\,\text{V}$. La sensibilité mesurée est-elle compatible avec la documentation ?
5. L'ordonnée à l'origine est-elle compatible avec 0 ? Quelle conséquence pour le capteur ?
6. En fonctionnement, le capteur délivre $U_s = 0{,}655\,\text{V}$. Calculer le courant à l'aide du modèle obtenu, puis avec les données de la documentation. Calculer l'écart relatif et conclure sur l'intérêt de l'étalonnage.

→ corrigé p. 635

Exercice 17.6 – Rendement d'un moteur asynchrone sur banc d'essai ★★★

Un réparateur de moteurs électriques rebobine un moteur asynchrone triphasé de 7,5 kW pour un client industriel, qui exige un rendement au moins égal à celui d'origine. La plaque annonce $\eta_n = 89{,}6\,\%$ au point nominal. Sur le banc d'essai, le moteur est chargé par un frein à poudre ; on mesure la puissance électrique absorbée,

le couple et la vitesse de rotation. Le technicien doit déterminer le rendement avec son incertitude, puis comparer deux méthodes de détermination.

Données

- ▷ Wattmètre triphasé numérique (1 UR = 1 W, $\pm(1{,}0\,\% + 10\,\text{UR})$) : $P_a = 8\,370\,\text{W}$.
- ▷ Couplemètre d'étendue de mesure $100\,\text{N}\cdot\text{m}$, précision $\pm 0{,}2\,\%$ de la pleine échelle : $C = 49{,}1\,\text{N}\cdot\text{m}$.
- ▷ Tachymètre optique (1 UR = 1 tr/min, $\pm(0{,}05\,\% + 1\,\text{UR})$) : $n = 1\,458\,\text{tr/min}$.
- ▷ Incertitude élargie : $U_e = 2\,u$; l'intervalle $x \pm U_e$ contient la valeur vraie avec une probabilité d'environ 95 %.

A- Puissances

1. Calculer l'incertitude-type $u(P_a)$ et l'incertitude relative correspondante.

2. Calculer les incertitudes-types $u(C)$ et $u(n)$, puis les incertitudes relatives.

3. Calculer la vitesse angulaire Ω et la puissance utile $P_u = C\,\Omega$, puis l'incertitude-type $u(P_u)$.

B- Rendement par la méthode directe

4. Calculer le rendement $\eta = \dfrac{P_u}{P_a}$ et son incertitude-type $u(\eta)$. Quelle mesure pèse le plus ?

5. Calculer l'incertitude élargie ($k = 2$) et écrire le résultat en pourcentage.

6. Le rendement mesuré est-il compatible avec la valeur de plaque ?

C- Méthode des pertes

7. On pourrait calculer les pertes par différence : $p = P_a - P_u$. Calculer p et son incertitude-type. Commenter l'incertitude relative obtenue.

8. La norme préconise plutôt de mesurer les pertes séparément (pertes Joule, pertes fer et mécaniques, pertes supplémentaires). On obtient $p' = 880\,\text{W}$ avec $u(p') = 30\,\text{W}$. On admet que le rendement $\eta' = 1 - \dfrac{p'}{P_a}$ a pour incertitude-type

$$u(\eta') = \sqrt{\left(\frac{u(p')}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{p'\,u(P_a)}{P_a^2}\right)^2}$$

Expliquer pourquoi $u(P_a)$ y est multipliée par le petit rapport p'/P_a.

9. Calculer η' et $u(\eta')$. Comparer avec la méthode directe : les deux résultats sont-ils compatibles ? Quelle méthode est la plus précise, et pourquoi ?

→ corrigé p. 636

Sujets de type BTS

Chapitre 17

Sujet BTS 17.A – Vérification d'un sous-compteur d'énergie

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure

Un atelier d'injection plastique veut connaître la consommation de chacune de ses machines pour réduire sa facture d'énergie. Un sous-compteur numérique monophasé de classe 1 (erreur maximale admise : $\pm 1\,\%$ de l'énergie comptée) a été installé sur la ligne qui alimente un sécheur de granulés. Avant d'exploiter les relevés, le responsable maintenance demande de vérifier ce compteur avec les appareils portables de l'atelier. Le sécheur fonctionne en régime stable pendant toute la durée des essais.

Données

- Multimètre RMS, calibre 400 V AC : 1 UR = 0,1 V, précision $\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$.
- Pince ampèremétrique, calibre 40 A AC : 1 UR = 0,01 A, précision $\pm(2{,}0\,\% + 5\,\text{UR})$.
- Wattmètre numérique : 1 UR = 1 W, précision $\pm(1{,}0\,\% + 5\,\text{UR})$.
- Index du sous-compteur affiché au centième de kW · h. Chronomètre : incertitude négligeable.
- Incertitude élargie : $U_e = 2\,u$; l'intervalle $x \pm U_e$ contient la valeur vraie avec une probabilité d'environ 95 %.

Partie A – Mesure de la tension

Le multimètre indique $U = 228{,}7\,\text{V}$.

A.1. Préciser le mesurande. Pourquoi faut-il utiliser un multimètre RMS ?

A.2. Calculer l'incertitude-type $u(U)$ et l'incertitude relative. Écrire le résultat.

Partie B – Mesure du courant

L'indication de la pince dépend de la position du câble dans ses mâchoires. Le technicien ouvre et referme la pince huit fois en déplaçant le câble ; il lit (en A) :

14,62	14,48	14,71	14,55	14,66	14,50	14,59	14,69

B.1. Quel type d'erreur la position du câble introduit-elle ? Comment la répétition permet-elle d'en tenir compte ?

B.2. Calculer la moyenne $\bar{I}$, l'écart-type expérimental s et l'incertitude de type A u_A.

B.3. Calculer l'incertitude de type B u_B due à la précision de la pince (pour la valeur $\bar{I}$).

B.4. Justifier qu'il faut combiner les deux incertitudes, selon $u(I) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$. Calculer $u(I)$ et écrire le résultat. Quel terme domine ?

Partie C – Puissance et facteur de puissance

Le wattmètre indique $P = 3\,216\,\text{W}$.

C.1. Calculer l'incertitude-type $u(P)$ et l'incertitude relative.

C.2. Calculer la puissance apparente $S = U\,\bar{I}$ et son incertitude-type.

C.3. Calculer le facteur de puissance $\cos(\Phi) = \dfrac{P}{S}$ et son incertitude élargie ($k = 2$). Écrire le résultat.

Partie D – Contrôle du sous-compteur

Pendant $\Delta t = 2{,}00\,\text{h}$, l'index du sous-compteur passe de $1\,254{,}37\,\text{kW}\cdot\text{h}$ à $1\,260{,}85\,\text{kW}\cdot\text{h}$.

D.1. Calculer l'énergie E_c comptée et son incertitude-type due à la lecture des index.

D.2. Calculer l'énergie de référence $E_{ref} = P\,\Delta t$, son incertitude-type et son incertitude élargie ($k = 2$).

D.3. Calculer l'écart relatif entre E_c et E_{ref}, puis le z-score. Les deux valeurs sont-elles compatibles ?

D.4. Peut-on conclure, avec ce matériel, que le compteur respecte sa classe ? Quelle caractéristique doit avoir un appareil de référence pour vérifier un compteur de classe 1 ?

→ corrigé p. 637

Sujet BTS 17.B – Banc d'essai d'un moteur à courant continu

Sujet inédit dans l'esprit de l'épreuve E4.1 – environ 1 heure 15

Une entreprise de maintenance remet en état le moteur à courant continu (excitation séparée, maintenue constante) de l'enrouleur d'une ligne de tréfilage. Le procès-verbal d'essai doit donner la résistance d'induit, la constante de force électromotrice et la vitesse en charge, avec leurs incertitudes.

Données

- Plaque et données constructeur : $U_n = 220\,\text{V}$; $I_n = 18{,}2\,\text{A}$; résistance d'induit à chaud $R = 0{,}125\,\Omega$; $E = k'\,n$ avec $k' = 0{,}100\,\text{V}$ par tr/min.
- Résistance du cuivre à la température θ : $R_\theta = R_{20}\big(1 + \alpha\,(\theta - 20\,^\circ\text{C})\big)$ avec $\alpha = 3{,}9 \times 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$; induit chaud : $\theta \approx 70\,^\circ\text{C}$.
- Voltmètre DC : calibre 4 V (1 UR = 1 mV) et calibre 400 V (1 UR = 0,1 V) ; précision $\pm(0{,}5\,\% + 2\,\text{UR})$.
- Ampèremètre DC : calibre 20 A (1 UR = 0,01 A) ; précision $\pm(1{,}0\,\% + 3\,\text{UR})$.
- Tachymètre optique : 1 UR = 1 tr/min ; précision $\pm(0{,}05\,\% + 1\,\text{UR})$.
- Incertitude élargie : $U_e = 2\,u$; l'intervalle $x \pm U_e$ contient la valeur vraie avec une probabilité d'environ 95 %.

Partie A – Résistance d'induit

Moteur chaud et rotor bloqué, on fait passer dans l'induit un courant continu $I = 15{,}04\,\text{A}$ et on mesure directement aux bornes des balais $U_R = 1{,}860\,\text{V}$ (calibre 4 V).

A.1. Pourquoi mesure-t-on cette résistance avec un courant de plusieurs ampères et un voltmètre branché directement sur les balais, plutôt qu'avec un ohmmètre ?

A.2. Calculer R, son incertitude-type et son incertitude élargie ($k = 2$). Écrire le résultat.

A.3. La valeur mesurée est-elle compatible avec la donnée du constructeur ?

A.4. Pourquoi la mesure est-elle faite moteur chaud ? Estimer la valeur que l'on mesurerait à froid (20 °C). L'écart serait-il significatif ?

Partie B – Constante de force électromotrice

Moteur à vide, on relève la tension d'induit U, assimilée à E (voir B.4), pour plusieurs vitesses.

n (tr/min)	400	800	1200	1600	2000	2400
U (V)	40,3	79,6	120,4	159,5	199,8	239,2

B.1. Réaliser la régression linéaire $E = a\,n + b$; donner a, b et r^2.

B.2. Le tableur donne $u(a) = 0{,}000\,24$ V par tr/min et $u(b) = 0{,}37\,\text{V}$. Montrer que le modèle $E = k'\,n$ est acceptable et donner k' avec son incertitude-type.

B.3. La constante mesurée est-elle compatible avec celle du constructeur ?

B.4. Le courant absorbé à vide vaut environ 1 A. Justifier l'approximation $E \approx U$.

Partie C – Vitesse prévue en charge

Le moteur est alimenté sous $U = 220{,}0\,\text{V}$ (calibre 400 V) et absorbe $I = 18{,}20\,\text{A}$.

C.1. Exprimer la force électromotrice E en fonction de U, R et I, puis la calculer.

C.2. Calculer $u(U)$ et $u(I)$. On admet que

$$u(E) = \sqrt{u(U)^2 + I^2\,u(R)^2 + R^2\,u(I)^2}$$

Calculer $u(E)$. Quel terme est prépondérant ?

C.3. En déduire la vitesse prévue

$$n = \frac{E}{k'}$$

(avec k' mesuré en partie B) et son incertitude élargie ($k = 2$).

C.4. Calculer la puissance électromagnétique

$$P_{em} = E\,I$$

et son incertitude-type. Écrire le résultat.

Partie D – Vérification

Dans ces conditions, le tachymètre indique $n_m = 2\,172\,\text{tr/min}$.

D.1. Calculer l'incertitude-type de cette mesure.

D.2. La vitesse mesurée est-elle compatible avec la vitesse prévue ? Laquelle des deux incertitudes domine la comparaison ?

D.3. Rédiger la conclusion du procès-verbal d'essai, en donnant chaque résultat (résistance d'induit, constante k', vitesse en charge) avec son incertitude élargie.

→ corrigé p. 639

Corrigés

✓ Corrigé de l'exercice 17.1 – Contrôle d'une alimentation 24 V

1. Le mesurande est la tension continue en sortie de l'alimentation, mesurée à ses bornes, la ligne étant en fonctionnement. On ne fait qu'**une seule** mesure : l'incertitude est évaluée à partir de la notice de l'appareil, c'est une évaluation de **type B**.

2. Sur le calibre 40 V, 2 UR = 0,02 V :

$$\Delta = \frac{0{,}5}{100} \times 24{,}47 + 0{,}02 \approx 0{,}142\,\text{V}$$

$$u(U) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}142\,4}{\sqrt{3}} \quad \text{soit} \quad \boxed{u(U) \approx 0{,}082\,\text{V}}$$

3. Incertitude arrondie par excès à un chiffre significatif : 0,09 V ; la valeur est au centième :

$$\boxed{U = (24{,}47 \pm 0{,}09)\,\text{V}} \qquad \frac{u(U)}{U} = \frac{0{,}082\,2}{24{,}47} \approx 0{,}34\,\%$$

4. Sur le calibre 400 V, 2 UR = 0,2 V : $\Delta = 0{,}005 \times 24{,}5 + 0{,}2 \approx 0{,}323\,\text{V}$ et

$$u(U) = \frac{0{,}322\,5}{\sqrt{3}} \approx 0{,}19\,\text{V} \qquad \frac{u(U)}{U} \approx 0{,}76\,\%$$

L'incertitude est plus de deux fois plus grande : le terme « n UR » devient prépondérant. Il fallait choisir le **calibre** 40 V, le plus petit calibre supérieur à la tension mesurée.

5. $U_e(U) = 2 \times 0{,}082\,2 \approx 0{,}164\,\text{V}$, arrondie par excès à $\boxed{U_e(U) = 0{,}17\,\text{V}}$ ($k = 2$). L'intervalle est

$$[24{,}47 - 0{,}17\,;\,24{,}47 + 0{,}17] = [24{,}30\,\text{V}\,;\,24{,}64\,\text{V}]$$

6. Zone de tolérance : $24 \times 0{,}99 = 23{,}76\,\text{V}$ à $24 \times 1{,}01 = 24{,}24\,\text{V}$.

Tout l'intervalle $[24{,}30\,;24{,}64]$ est au-dessus de $24{,}24\,\text{V}$: l'alimentation est **non conforme**, même en tenant compte de l'incertitude de mesure. Le technicien doit régler la tension de sortie (potentiomètre de réglage en face avant) vers $24{,}0\,\text{V}$, puis refaire la mesure. Une surtension permanente peut expliquer le vieillissement prématuré des détecteurs. Après réglage à $24{,}00\,\text{V}$, la même mesure (incertitude élargie $\pm 0{,}17\,\text{V}$, intervalle $[23{,}83\,;24{,}17\,\text{V}]$) suffira à démontrer la conformité, car la tolérance ($\pm 0{,}24\,\text{V}$) est plus large que l'incertitude élargie.

✓ Corrigé de l'exercice 17.2 – Deux contrôleurs de différentiels

1. Chaque mesure est affectée d'**erreurs aléatoires** (instant exact de détection du défaut et de la coupure, échantillonnage du contrôleur, bruit électrique) qui varient de façon imprévisible d'une mesure à l'autre. La série permet une évaluation de **type A**. Le simulateur étant étalon, cette dispersion provient du contrôleur lui-même.

2. Mode statistique, une variable, $n = 10$:

$$\bar{t}_A = \frac{403{,}3}{10} = \boxed{\bar{t}_A = 40{,}33\,\text{ms}} \qquad \boxed{s_A \approx 0{,}653\,\text{ms}}$$

On lit s_x (Casio), S_x (TI) ou l'« écart type échantillon s » (NumWorks), et non $\sigma_x \approx 0{,}620\,\text{ms}$. On vérifie aussi que la calculatrice affiche bien $n = 10$ (aucune valeur oubliée ni ancienne valeur restée dans la liste).

3. $u(\bar{t}_A) = \dfrac{s_A}{\sqrt{10}} = \dfrac{0{,}653}{\sqrt{10}} \approx 0{,}207\,\text{ms}$, arrondie par excès à $0{,}21\,\text{ms}$:

$$\boxed{t_A = (40{,}33 \pm 0{,}21)\,\text{ms}}$$

4. Pour B : $\bar{t}_B = \dfrac{435}{10} = 43{,}50\,\text{ms}$; $s_B \approx 0{,}183\,\text{ms}$; $u(\bar{t}_B) = \dfrac{0{,}183}{\sqrt{10}} \approx 0{,}058\,\text{ms}$:

$$\boxed{t_B = (43{,}500 \pm 0{,}058)\,\text{ms}}$$

5.

$$z_A = \frac{|40{,}33 - 40{,}0|}{0{,}207} \approx \boxed{z_A \approx 1{,}6 \leq 2} \qquad z_B = \frac{|43{,}50 - 40{,}0|}{0{,}057\,7} \approx \boxed{z_B \approx 61 > 2}$$

Le contrôleur A donne un résultat **compatible** avec la référence ; l'écart du contrôleur B est très **significatif** : il vaut une soixantaine d'incertitudes-types et ne peut en aucun cas s'expliquer par les erreurs aléatoires.

6. Le plus **fidèle** est B : son écart-type ($0{,}18\,\text{ms}$) est plus de trois fois plus petit que celui de A. Le plus **juste** est A : sa moyenne est compatible avec la valeur vraie, alors que B présente une **erreur systématique** d'environ $+3{,}5\,\text{ms}$. Il faut envoyer B en **réétalonnage** (ou corriger ses mesures de $-3{,}5\,\text{ms}$). Cet écart ne remet pas en cause les contrôles déjà faits (la limite réglementaire est de plusieurs centaines de millisecondes), mais un appareil de contrôle doit être juste. B illustre la cible « fidèle, pas juste » du cours ; A, la cible « juste, peu fidèle ».

7. u varie comme $1/\sqrt{n}$: pour diviser u par 3, il faut multiplier n par $3^2 = 9$, soit $\boxed{n = 90 \text{ mesures}}$ (l'écart-type s, caractéristique de la méthode, restant le même). Neuf fois plus de mesures, c'est neuf fois plus de temps d'essai : il est souvent plus efficace d'améliorer la fidélité de la méthode que de multiplier les mesures.

✓ Corrigé de l'exercice 17.3 – Puissance d'une résistance de thermoformeuse

I- Méthode voltampèremétrique

1. Pour un récepteur purement résistif, la tension et le courant sont en phase : $\Phi = 0$ et $\cos(\Phi) = 1$. Donc $P = U\,I\cos(\Phi) = U\,I$.

2. Évaluations de type B :

$$\Delta_U = 0{,}010 \times 230{,}2 + 3 \times 0{,}1 \approx 2{,}60\,\text{V} \qquad u(U) = \frac{2{,}602}{\sqrt{3}} \approx 1{,}50\,\text{V} \quad (0{,}65\,\%)$$

$$\Delta_I = 0{,}020 \times 8{,}52 + 5 \times 0{,}01 \approx 0{,}220\,\text{A} \qquad u(I) = \frac{0{,}220\,4}{\sqrt{3}} \approx 0{,}127\,\text{A} \quad (1{,}49\,\%)$$

3. $P = 230{,}2 \times 8{,}52 \approx 1\,961{,}3\,\text{W}$. C'est un **produit** : on compose les incertitudes **relatives**.

$$\frac{u(P)}{P} = \sqrt{0{,}65^2 + 1{,}49^2}\ \% \approx 1{,}63\,\% \qquad u(P) = 1\,961{,}3 \times 0{,}016\,3 \approx 32{,}0\,\text{W}$$

$$\boxed{P = (1\,961 \pm 32)\,\text{W}}$$

4. Les carrés des incertitudes relatives valent 0,43 pour U et 2,23 pour I : la **pince** représente plus de 80 % de la somme. C'est elle qui limite la qualité du résultat ; un multimètre plus précis n'améliorerait presque rien.

II- Méthode wattmétrique et conclusion

5. $\Delta_P = 0{,}010 \times 1958 + 5 \times 1 = 24{,}6\,\text{W}$; $u(P_w) = \dfrac{24{,}58}{\sqrt{3}} \approx 14{,}2\,\text{W}$ (0,72 %), arrondie par excès à 15 W :

$$\boxed{P_w = (1\,958 \pm 15)\,\text{W}}$$

6. Comparaison de deux mesures :

$$z = \frac{|1\,961{,}3 - 1958|}{\sqrt{32{,}0^2 + 14{,}2^2}} = \frac{3{,}3}{35} \approx \boxed{z \approx 0{,}09 \leq 2}$$

Les deux méthodes sont **compatibles**. La méthode wattmétrique est la plus précise (0,72 % contre 1,63 %).

7. Par rapport à la plaque : $z = \dfrac{|1958 - 2000|}{14{,}2} \approx \boxed{z \approx 3{,}0 > 2}$. L'écart ($-2{,}1\,\%$) est **significatif** : la puissance réelle n'est pas 2 000 W.

Tolérance : $2000 \pm 5\,\%$, soit de 1 900 W à 2 100 W. Même avec l'intervalle à 95 % ($1958 \pm 2 \times 14{,}2$, soit $1958 \pm 29\,\text{W}$), la résistance est **conforme** à sa tolérance.

On ne peut donc pas affirmer qu'elle a perdu de la puissance : sa valeur réelle diffère de la valeur nominale, ce que la tolérance de fabrication autorise. Pour conclure à un vieillissement, il faudrait une mesure de référence faite à la mise en service, ou comparer avec les autres résistances de la machine (la tension à leurs bornes doit aussi être vérifiée).

✓ Corrigé de l'exercice 17.4 – Prise de terre d'un bâtiment agricole

I- Mesure de réception

1. $R_T = \dfrac{U}{I} = \dfrac{7{,}86}{0{,}092\,4}$ soit $\boxed{R_T \approx 85{,}06\,\Omega}$

2. Type B :

$$\Delta_U = 0{,}010 \times 7{,}86 + 3 \times 0{,}01 \approx 0{,}109\,\text{V} \qquad u(U) \approx 0{,}062\,7\,\text{V} \quad (0{,}80\,\%)$$

$$\Delta_I = 0{,}015 \times 92{,}4 + 3 \times 0{,}1 \approx 1{,}69\,\text{mA} \qquad u(I) \approx 0{,}973\,\text{mA} \quad (1{,}05\,\%)$$

Quotient : $\dfrac{u(R_T)}{R_T} = \sqrt{0{,}80^2 + 1{,}05^2}\ \% \approx 1{,}32\,\%$, d'où $\boxed{u(R_T) \approx 1{,}12\,\Omega}$

3. $U_e = 2 \times 1{,}124 \approx 2{,}25\,\Omega$, arrondie par excès à $2{,}3\,\Omega$:

$$\boxed{R_T = (85{,}1 \pm 2{,}3)\,\Omega\ (k = 2)}$$

La borne haute de l'intervalle, $87{,}4\,\Omega$, est inférieure à $100\,\Omega$: la **conformité est démontrée**.

4. Telluromètre : $\Delta' = 0{,}02 \times 88 + 3 \times 1 = 4{,}76\,\Omega$, $u(R'_T) = 2{,}75\,\Omega$.

$$z = \frac{|88 - 85{,}06|}{\sqrt{2{,}75^2 + 1{,}12^2}} = \frac{2{,}94}{2{,}97} \approx \boxed{z \approx 1{,}0 \leq 2}$$

Les deux mesures sont **compatibles**.

II- Contrôle en fin d'été

5. $R_T = \dfrac{8{,}95}{0{,}090\,4} \approx 99{,}00\,\Omega$; $u(U) \approx 0{,}069\,0\,\text{V}$ $(0{,}77\,\%)$; $u(I) \approx 0{,}956\,\text{mA}$ $(1{,}06\,\%)$:

$$\frac{u(R_T)}{R_T} \approx 1{,}31\,\% \qquad u(R_T) \approx 1{,}30\,\Omega \qquad \boxed{R_T = (99{,}0 \pm 2{,}6)\,\Omega\ (k = 2)}$$

6. L'intervalle $[96{,}4\,\Omega\,;\,101{,}6\,\Omega]$ **chevauche** la limite de $100\,\Omega$: la conformité **n'est plus démontrée** (sans que la non-conformité soit prouvée). Il faut améliorer la prise de terre : ajouter un piquet relié en parallèle, planté à une distance du premier au moins égale à deux fois sa longueur, ou enfoncer un piquet plus long jusqu'aux couches humides du sol.

7. Différence de deux mesures indépendantes : on compose les incertitudes absolues.

$$\Delta R = 99{,}00 - 85{,}06 = 13{,}9\,\Omega \qquad u(\Delta R) = \sqrt{1{,}12^2 + 1{,}30^2} \approx 1{,}72\,\Omega$$

$$z = \frac{13{,}9}{1{,}72} \approx \boxed{z \approx 8 > 2}$$

L'augmentation est **significative** : elle n'est pas due aux incertitudes de mesure. Le sol sec conduit moins bien le courant (sa résistivité augmente) : la résistance d'une prise de terre varie avec les saisons. C'est pourquoi il faut la dimensionner avec une marge et la contrôler périodiquement, de préférence en période sèche.

✓ Corrigé de l'exercice 17.5 – Étalonnage d'un capteur de courant à effet Hall

1. Pour $U_s = 0{,}012\,\text{V}$: $\Delta = 0{,}005 \times 0{,}012 + 3 \times 0{,}001 \approx 3{,}06\,\text{mV}$, $\boxed{u \approx 1{,}8\,\text{mV}}$

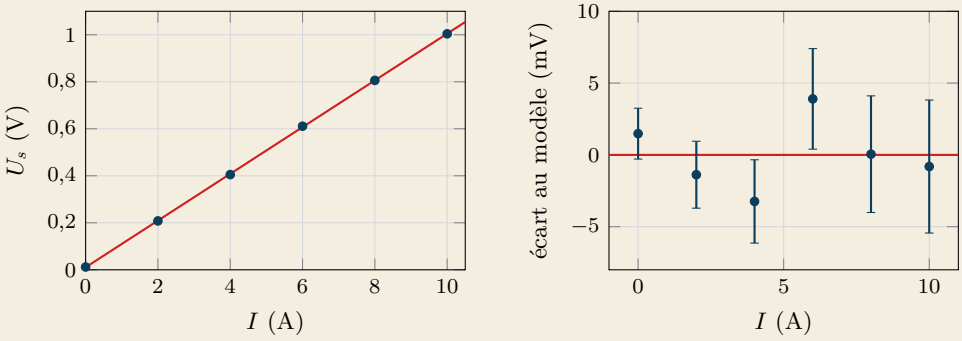
Pour $U_s = 1{,}004\,\text{V}$: $\Delta = 0{,}005 \times 1{,}004 + 0{,}003 \approx 8{,}02\,\text{mV}$, $\boxed{u \approx 4{,}6\,\text{mV}}$

2. Régression linéaire (I en abscisses, U_s en ordonnées) :

$$\boxed{a \approx 0{,}099\,43\,\text{V/A}} \qquad \boxed{b \approx 0{,}010\,5\,\text{V}} \qquad \boxed{r^2 \approx 0{,}999\,96}$$

3. Modèle pour $I = 6\,\text{A}$: $0{,}099\,43 \times 6 + 0{,}010\,5 \approx 0{,}607\,1\,\text{V}$; écart : $0{,}611 - 0{,}607\,1 \approx 3{,}9\,\text{mV}$.

L'incertitude-type de cette mesure vaut $\dfrac{0{,}005 \times 0{,}611 + 0{,}003}{\sqrt{3}} \approx 3{,}5\,\text{mV}$: l'écart le plus grand est du même ordre (moins de $2u$). Les autres écarts sont plus petits, de signes alternés, sans courbure ; avec r^2 très proche de 1, le **modèle linéaire est validé**.



À droite : écarts au modèle avec leurs barres $\pm u(U_s)$; tous les écarts restent inférieurs à $2\,u(U_s)$, sans tendance ni courbure.

4.

$$z = \frac{|0{,}099\,43 - 0{,}100|}{0{,}000\,33} \approx \boxed{z \approx 1{,}7 \leq 2}$$

La sensibilité ($\approx 99{,}4\,\text{mV/A}$) est **compatible** avec la documentation.

5. $z = \dfrac{|0{,}010\,5 - 0|}{0{,}002\,0} \approx 5{,}3 > 2$: l'ordonnée à l'origine n'est **pas** compatible avec 0. Le capteur présente une **tension de décalage** (offset) d'environ 10 mV, visible d'ailleurs sur la mesure à courant nul. Il faut garder le modèle $U_s = a\,I + b$, ou compenser l'offset dans le variateur.

6. Avec le modèle étalonné :

$$I = \frac{U_s - b}{a} = \frac{0{,}655 - 0{,}010\,5}{0{,}099\,43} \quad \text{soit} \quad \boxed{I \approx 6{,}48\,\text{A}}$$

Avec la documentation : $I = \dfrac{0{,}655}{0{,}100} = 6{,}55\,\text{A}$, soit un écart relatif de $+1{,}1\,\%$. Sans étalonnage, le variateur surestimerait le courant de plus de $1\,\%$ (et beaucoup plus pour les petits courants, à cause de l'offset) : l'étalonnage individuel améliore nettement la justesse de la mesure.

✓ Corrigé de l'exercice 17.6 – Rendement d'un moteur asynchrone sur banc d'essai

A- Puissances

1. $\Delta_{P_a} = 0{,}010 \times 8370 + 10 \times 1 = 93{,}7\,\text{W}$; $u(P_a) = \dfrac{93{,}7}{\sqrt{3}} \approx \boxed{u(P_a) \approx 54{,}1\,\text{W}}$ $(0{,}65\,\%)$.

2. Couplemètre : $\Delta_C = 0{,}002 \times 100 = 0{,}2\,\text{N}\cdot\text{m}$ (en pourcentage de la **pleine échelle**, comme une classe), $u(C) = \dfrac{0{,}2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}115\,\text{N}\cdot\text{m}$ $(0{,}235\,\%)$.

Tachymètre : $\Delta_n = 0{,}000\,5 \times 1458 + 1 \approx 1{,}73\,\text{tr/min}$, $u(n) \approx 1{,}00\,\text{tr/min}$ $(0{,}068\,\%)$.

3. $\Omega = \dfrac{2\pi\, n}{60} = \dfrac{2\pi \times 1458}{60} \approx 152{,}68\,\text{rad/s}$; $P_u = C\,\Omega = 49{,}1 \times 152{,}68 \approx 7\,497\,\text{W}$.

$2\pi/60$ est exact : $\dfrac{u(\Omega)}{\Omega} = \dfrac{u(n)}{n}$. Produit :

$$\frac{u(P_u)}{P_u} = \sqrt{0{,}235^2 + 0{,}068^2}\ \% \approx 0{,}245\,\% \qquad \boxed{u(P_u) \approx 18{,}4\,\text{W}}$$

B- Rendement par la méthode directe

4. $\eta = \dfrac{7497}{8370} \approx 0{,}895\,7$. Le rendement est un produit et quotient de trois mesures (C, n, P_a) :

$$\frac{u(\eta)}{\eta} = \sqrt{0{,}235^2 + 0{,}068^2 + 0{,}646^2}\ \% \approx 0{,}69\,\% \qquad \boxed{u(\eta) \approx 0{,}006\,2}$$

Les carrés valent 0,055, 0,005 et 0,417 : c'est la mesure de la **puissance absorbée** qui pèse le plus.

5. $U_e(\eta) = 2 \times 0{,}006\,19 \approx 0{,}012\,4$, soit $1{,}24\,\%$ arrondi par excès à $1{,}3\,\%$:

$$\boxed{\eta = (89{,}6 \pm 1{,}3)\,\%\ (k = 2)}$$

6. $z = \dfrac{|0{,}895\,7 - 0{,}896|}{0{,}006\,2} \approx 0{,}06 \leq 2$: le rendement mesuré est **compatible** avec la plaque. Le rebobinage n'a pas dégradé le rendement, à la précision de la mesure près.

C- Méthode des pertes

7. $p = 8370 - 7497 \approx 873\,\text{W}$; différence : $u(p) = \sqrt{54{,}1^2 + 18{,}4^2} \approx 57\,\text{W}$, soit 6,5 %.

Les pertes sont la différence de deux grandeurs voisines : leur incertitude relative est dix fois plus grande que celle des puissances mesurées. Cette méthode ne permet pas de connaître les pertes avec précision.

8. Le second terme s'écrit $\frac{p'}{P_a} \times \frac{u(P_a)}{P_a}$: l'incertitude relative sur P_a est multipliée par $\frac{p'}{P_a} = \frac{880}{8370} \approx 0{,}105$. Le rendement ne dépend de P_a qu'à travers le petit terme p'/P_a : une erreur relative sur P_a ne se retrouve que dix fois plus petite sur η'.

D'où vient cette relation ? – hors programme Elle découle de la formule générale de composition : $\frac{\partial \eta'}{\partial p'} = -\frac{1}{P_a}$ et $\frac{\partial \eta'}{\partial P_a} = +\frac{p'}{P_a^2}$, d'où

$$u(\eta')^2 = \left(\frac{u(p')}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{p'\,u(P_a)}{P_a^2}\right)^2$$

9. $\eta' = 1 - \dfrac{880}{8370} \approx 0{,}894\,9$;

$$u(\eta') = \sqrt{\left(\frac{30}{8370}\right)^2 + \left(\frac{880 \times 54{,}1}{8370^2}\right)^2} = \sqrt{0{,}003\,58^2 + 0{,}000\,68^2} \approx \boxed{u(\eta') \approx 0{,}003\,7}$$

soit $\eta' = (89{,}49 \pm 0{,}73)\,\%$ $(k = 2)$.

$z = \dfrac{|0{,}895\,7 - 0{,}894\,9|}{\sqrt{0{,}006\,2^2 + 0{,}003\,7^2}} \approx 0{,}1 \leq 2$: les deux méthodes sont **compatibles**.

La méthode des pertes est presque **deux fois plus précise**. L'incertitude sur P_a n'intervient que multipliée par $p'/P_a \approx 0{,}1$: une erreur de 1 % sur P_a ne change η' que d'environ 0,1 %, alors qu'elle change η de 1 % dans la méthode directe. C'est pourquoi les normes privilégient la méthode des pertes pour les moteurs à haut rendement.

Sujets de type BTS

✓ Corrigé du sujet BTS 17.A – Vérification d'un sous-compteur d'énergie

Partie A – Mesure de la tension

A.1. Le mesurande est la valeur efficace de la tension entre phase et neutre en amont du sécheur, pendant l'essai. Un multimètre RMS mesure la vraie valeur efficace même si la tension n'est pas parfaitement sinusoïdale (harmoniques dus aux équipements électroniques de l'atelier).

A.2. $\Delta_U = 0{,}010 \times 228{,}7 + 3 \times 0{,}1 \approx 2{,}59\,\text{V}$; $u(U) = \dfrac{2{,}587}{\sqrt{3}} \approx 1{,}49\,\text{V}$ (0,65 %) :

$$\boxed{U = (228{,}7 \pm 1{,}5)\,\text{V}}$$

Partie B – Mesure du courant

B.1. La position du câble introduit une **erreur aléatoire** : elle change de façon imprévisible à chaque fermeture de la pince. En répétant la mesure et en prenant la moyenne, on réduit son effet et on l'évalue statistiquement (type A).

B.2. Calculatrice, $n = 8$:

$$\bar{I} = \frac{116{,}80}{8} = \boxed{\bar{I} = 14{,}600\ \text{A}} \qquad s \approx 0{,}085\,5\ \text{A}$$

$$u_A = \frac{0{,}085\,5}{\sqrt{8}} \approx \boxed{u_A \approx 0{,}030\ \text{A}}$$

B.3. $\Delta = 0{,}020 \times 14{,}60 + 5 \times 0{,}01 = 0{,}342\ \text{A}$; $\quad u_B = \dfrac{0{,}342}{\sqrt{3}} \approx \boxed{u_B \approx 0{,}197\ \text{A}}$

B.4. Toutes les mesures sont faites avec la **même** pince : son erreur d'étalonnage décale toutes les lectures de la même façon et n'est pas réduite par la moyenne. On combine donc les deux évaluations :

$$u(I) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0{,}030^2 + 0{,}197^2} \approx 0{,}200\ \text{A} \qquad \boxed{I = (14{,}60 \pm 0{,}20)\ \text{A}}$$

Le terme de type B (précision de la pince) **domine** très largement : répéter davantage la mesure ne servirait à rien.

Partie C – Puissance et facteur de puissance

C.1. $\Delta_P = 0{,}010 \times 3216 + 5 \times 1 \approx 37{,}2\ \text{W}$;

$u(P) = \dfrac{37{,}16}{\sqrt{3}} \approx \boxed{u(P) \approx 21{,}5\ \text{W}}$ (0,67 %).

C.2. $S = U\,\bar{I} = 228{,}7 \times 14{,}60 \approx 3\,339\ \text{VA}$. Produit :

$$\frac{u(S)}{S} = \sqrt{\left(\frac{1{,}494}{228{,}7}\right)^2 + \left(\frac{0{,}200}{14{,}60}\right)^2} = \sqrt{0{,}65^2 + 1{,}37^2}\ \% \approx 1{,}52\,\%$$

$$\boxed{u(S) \approx 51\ \text{VA}}$$

C.3. $\cos(\Phi) = \dfrac{3216}{3339} \approx 0{,}963\,2$; quotient de deux grandeurs indépendantes (P est mesurée par le wattmètre, S par le multimètre et la pince) :

$$\frac{u(\cos\Phi)}{\cos\Phi} = \sqrt{0{,}67^2 + 1{,}52^2}\ \% \approx 1{,}66\,\% \qquad u(\cos\Phi) \approx 0{,}016$$

$U_e = 2 \times 0{,}016\,0 \approx 0{,}032$:

$$\boxed{\cos(\Phi) = 0{,}963 \pm 0{,}032\ (k = 2)}$$

Le sécheur, essentiellement résistif, a un bon facteur de puissance.

Partie D – Contrôle du sous-compteur

D.1. $E_c = 1\,260{,}85 - 1\,254{,}37 = \boxed{E_c = 6{,}48\,\text{kW}\cdot\text{h}}$

Double lecture d'un index au pas $q = 0{,}01\,\text{kW}\cdot\text{h}$:

$$u(E_c) = \sqrt{2} \times \frac{0{,}01}{\sqrt{12}} \approx 0{,}004\,1\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

D.2. $E_{ref} = P\,\Delta t = 3{,}216 \times 2{,}00 = \boxed{E_{ref} = 6{,}432\,\text{kW}\cdot\text{h}}$

Δt est connu sans incertitude notable, donc

$$\frac{u(E_{ref})}{E_{ref}} = \frac{u(P)}{P} = 0{,}67\,\% \qquad u(E_{ref}) \approx 0{,}043\,\text{kW}\cdot\text{h}$$

et $U_e \approx 0{,}086\,\text{kW}\cdot\text{h}$ ($k = 2$), soit $1{,}33\,\%$ de E_{ref}.

D.3. Écart relatif : $\dfrac{6{,}48 - 6{,}432}{6{,}432} \approx +0{,}75\,\%$.

$$z = \frac{|6{,}48 - 6{,}432|}{\sqrt{0{,}042\,9^2 + 0{,}004\,1^2}} = \frac{0{,}048}{0{,}043\,1} \approx \boxed{z \approx 1{,}1 \leq 2}$$

Le compteur et la référence sont **compatibles**.

D.4. L'écart mesuré ($+0{,}75\,\%$) est inférieur à $1\,\%$, mais l'incertitude élargie de la référence ($1{,}33\,\%$) est **plus grande** que la tolérance à vérifier : l'erreur réelle du compteur pourrait atteindre $0{,}75 + 1{,}33 \approx 2\,\%$ sans que l'on puisse le détecter. On ne peut donc pas conclure que le compteur respecte sa classe.

Pour vérifier une tolérance de $1\,\%$, il faut une référence dont l'incertitude élargie est **3 à 4 fois plus petite**, de l'ordre de $0{,}3\,\%$ au plus : un compteur étalon ou un analyseur de puissance de classe 0,2. L'essai réalisé montre seulement que le compteur ne présente pas de défaut grossier.

✓ Corrigé du sujet BTS 17.B – Banc d'essai d'un moteur à courant continu

Partie A – Résistance d'induit

A.1. La résistance d'induit est très faible (environ $0{,}1\,\Omega$) : avec un ohmmètre, la résistance des cordons et des contacts s'y ajouterait (**erreur systématique**). Avec un fort courant et une tension prise directement sur les balais (montage « quatre fils »), les cordons n'interviennent plus et la tension est assez grande pour être lue avec une bonne précision relative.

A.2. $R = \dfrac{U_R}{I} = \dfrac{1{,}860}{15{,}04} \approx 0{,}123\,67\,\Omega$.

$\Delta_U = 0{,}005 \times 1{,}860 + 2 \times 0{,}001 = 11{,}3\,\text{mV}$, $u(U_R) \approx 6{,}52\,\text{mV}$ $(0{,}35\,\%)$;

$\Delta_I = 0{,}010 \times 15{,}04 + 3 \times 0{,}01 \approx 0{,}180\,\text{A}$, $u(I) \approx 0{,}104\,\text{A}$ (0,69 %).

$$\frac{u(R)}{R} = \sqrt{0{,}35^2 + 0{,}69^2}\ \% \approx 0{,}78\,\% \qquad u(R) \approx 0{,}000\,96\,\Omega \qquad U_e \approx 0{,}001\,9\,\Omega$$

$$\boxed{R = (0{,}123\,7 \pm 0{,}002\,0)\,\Omega\ (k=2)}$$

A.3. $z = \dfrac{|0{,}123\,67 - 0{,}125|}{0{,}000\,96} \approx \boxed{z \approx 1{,}4 \leq 2}$: la mesure est **compatible** avec la donnée du constructeur.

A.4. La résistance du cuivre augmente avec la température : on la mesure chaud pour connaître sa valeur en fonctionnement (c'est elle qui intervient dans $E = U - R\,I$). À froid :

$$R_{20} = \frac{R_{70}}{1 + \alpha\,(70 - 20)} = \frac{0{,}123\,67}{1 + 3{,}9 \times 10^{-3} \times 50} \approx 0{,}103\,5\,\Omega$$

soit environ 16 % de moins : cet écart (20 mΩ) vaut une vingtaine d'incertitudes-types, il est très significatif. Utiliser la résistance froide fausserait le calcul de E en charge.

Partie B – Constante de force électromotrice

B.1. Régression linéaire (n en abscisses, E en ordonnées) :

$$\boxed{a \approx 0{,}099\,586\ \text{V par tr/min}} \qquad \boxed{b \approx 0{,}38\,\text{V}} \qquad \boxed{r^2 \approx 0{,}999\,98}$$

B.2. $|b| = 0{,}38\,\text{V} \leq 2\,u(b) = 0{,}74\,\text{V}$: l'ordonnée à l'origine est **compatible avec 0** . Les écarts à la droite (au plus 0,52 V) sont de l'ordre de l'incertitude des mesures de tension, sans courbure, et $r^2 \approx 1$: le modèle $E = k'\,n$ est acceptable, avec

$$\boxed{k' = 0{,}099\,59 \pm 0{,}000\,24\ \text{V par tr/min}}$$

B.3. $z = \dfrac{|0{,}099\,586 - 0{,}100|}{0{,}000\,24} \approx \boxed{z \approx 1{,}7 \leq 2}$: la constante est **compatible** avec celle du constructeur, mais de justesse ; on retient la valeur mesurée pour la suite.

B.4. À vide, $U = E + R\,I_0$: la chute $R\,I_0$ (quelques centièmes de volt pour I_0 de l'ordre de l'ampère) est négligeable devant E, très inférieure à l'incertitude de lecture de U. On peut donc confondre E et U.

Partie C – Vitesse prévue en charge

C.1. Loi des mailles dans l'induit (convention récepteur) : $U = E + R\,I$, d'où

$$E = U - R\,I = 220{,}0 - 0{,}123\,67 \times 18{,}20 \approx 220 - 2{,}25 \quad \text{soit} \quad \boxed{E \approx 217{,}75\,\text{V}}$$

C.2. Évaluations de type B :

$$u(U) = \frac{0{,}005 \times 220 + 0{,}2}{\sqrt{3}} = \frac{1{,}3}{\sqrt{3}} \approx 0{,}751\,\text{V}$$

$$u(I) = \frac{0{,}010 \times 18{,}20 + 0{,}03}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}212}{\sqrt{3}} \approx 0{,}122\,\text{A}$$

Avec la relation donnée :

$$u(E) = \sqrt{u(U)^2 + I^2\,u(R)^2 + R^2\,u(I)^2}$$

$$u(E) = \sqrt{0{,}563 + 0{,}000\,31 + 0{,}000\,23} \approx \boxed{u(E) \approx 0{,}751\,\text{V}}$$

Le terme dû à U est **prépondérant** : la chute de tension $R\,I$ (2,25 V) est petite devant U, donc ses incertitudes comptent peu.

C.3. $n = \dfrac{E}{k'} = \dfrac{217{,}75}{0{,}099\,586} \approx 2\,186{,}6\,\text{tr/min}$. Quotient :

$$\frac{u(n)}{n} = \sqrt{\left(\frac{0{,}751}{217{,}75}\right)^2 + \left(\frac{0{,}000\,24}{0{,}099\,586}\right)^2} = \sqrt{0{,}345^2 + 0{,}241^2}\ \% \approx 0{,}42\,\%$$

$u(n) \approx 9{,}2\,\text{tr/min}$ et $U_e = 2 \times 9{,}20 \approx 18{,}4\,\text{tr/min}$, arrondie à 19 tr/min :

$$\boxed{n = (2\,187 \pm 19)\,\text{tr/min}\ (k = 2)}$$

C.4. $P_{em} = E\,I = 217{,}75 \times 18{,}20 \approx 3\,963\,\text{W}$. Produit de E (0,345 %) et de I (0,672 %) :

$$\frac{u(P_{em})}{P_{em}} = \sqrt{0{,}345^2 + 0{,}672^2}\ \% \approx 0{,}76\,\% \qquad \boxed{P_{em} = (3\,963 \pm 30)\,\text{W}}$$

Partie D – Vérification

D.1. $\Delta = 0{,}000\,5 \times 2172 + 1 \approx 2{,}09\,\text{tr/min}$; $u(n_m) = \dfrac{2{,}086}{\sqrt{3}} \approx \boxed{u(n_m) \approx 1{,}2\,\text{tr/min}}$

D.2. Comparaison de deux déterminations :

$$z = \frac{|2\,186{,}6 - 2172|}{\sqrt{1{,}2^2 + 9{,}20^2}} = \frac{14{,}6}{9{,}28} \approx \boxed{z \approx 1{,}6 \leq 2}$$

La vitesse mesurée est **compatible** avec la vitesse prévue. L'incertitude de la vitesse prévue (9,2 tr/min) domine largement celle du tachymètre (1,2 tr/min).

D.3. Procès-verbal : $R = (0{,}123\,7 \pm 0{,}002\,0)\,\Omega$, $k' = 0{,}099\,6 \pm 0{,}000\,5$ V par tr/min, $n = (2\,172 \pm 3)$ tr/min sous 220 V et 18,2 A (incertitudes élargies) : le moteur est conforme au modèle du constructeur.

Bilan du chapitre : je sais...

- ☐ distinguer erreur et incertitude, justesse et fidélité ; — ex. 17.2
- ☐ calculer une incertitude de type A ou de type B ; — ex. 17.1 à 17.4, sujet A
- ☐ composer les incertitudes d'une grandeur calculée ; — ex. 17.6, sujet B
- ☐ écrire un résultat, le comparer à une référence (z-score), décider d'une conformité ; — ex. 17.1, 17.3 à 17.6
- ☐ exploiter une régression linéaire. — ex. 17.5, sujet B

Réussir l'épreuve E4

La physique appliquée est évaluée à l'écrit dans l'épreuve E4 « Conception – étude préliminaire » : une épreuve ponctuelle de **4 heures** qui mêle physique appliquée et électrotechnique autour d'une **installation réelle** (station de pompage, hôpital, parc de loisirs, usine…). Ce qui suit rassemble la méthode qui fait gagner des points, quel que soit le sujet.

Le sujet en un coup d'œil

Présentation	le contexte de l'installation, l'objectif de l'étude et le plan du sujet (parties A, B, C…).
Questionnement	les questions, regroupées en parties ; chaque partie traite un problème technique et mobilise souvent plusieurs chapitres.
Dossier technique	schémas, plaques signalétiques, extraits de catalogues, relevés, normes (par exemple EN 50160). C'est là que se trouvent les données.
Documents réponses	schémas ou tableaux à compléter, **à rendre avec la copie**.

Les parties sont conçues pour être **largement indépendantes** : quand une partie a besoin d'un résultat précédent, le sujet le redonne souvent (« on prendra… »).

Gérer les quatre heures

Méthode : un plan de vol pour 4 heures

1. **15 à 20 minutes de lecture** : lisez la présentation, survolez toutes les questions, repérez les documents réponses et les données du dossier technique. Notez sur le brouillon les grandeurs utiles de chaque plaque signalétique.
2. **Répartissez le temps** entre les parties, à peu près en proportion du nombre de questions, et écrivez l'heure de fin prévue de chaque partie en haut du brouillon.
3. **Commencez par la partie que vous maîtrisez le mieux** : les parties sont indépendantes, l'ordre n'a pas d'importance pour le correcteur, à condition de bien numéroter.
4. **Bloqué plus de 5 minutes ?** Passez à la question suivante ; utilisez la valeur redonnée par le sujet, ou une valeur plausible que vous signalez clairement (« en prenant $P = 10\,\text{kW}$ »).
5. **Gardez 15 minutes** à la fin pour compléter les documents réponses et relire les unités.

Lire le dossier technique

- **Plaque signalétique** : tension nominale (et couplage), courant nominal, puissance **utile** pour un moteur (mécanique, sur l'arbre), puissance **apparente** pour un transformateur, $\cos(\Phi)$, vitesse nominale, rendement. Voir les chapitres 3, 4 et 6.
- **Extrait de catalogue** : repérez la colonne qui correspond à la question (puissance, calibre, section) ; on choisit en général la première valeur **supérieure ou égale** au besoin.
- **Courbe ou relevé** : lisez les axes (grandeur et unité), relevez des points précis et tracez vos constructions sur le document réponse.
- **Norme** : la question demande presque toujours de **comparer** une valeur calculée à une limite (creux de tension, THD, chute de tension, éclairement…). Écrivez la comparaison.

Rédiger une réponse qui rapporte tous les points

★

À retenir · Les quatre temps d'une réponse

1. la **relation littérale**, avec les notations du sujet ;
2. l'**application numérique**, valeurs et unités cohérentes ;
3. le **résultat** avec son unité et un nombre raisonnable de chiffres significatifs (2 ou 3) ;
4. une **phrase de conclusion** qui répond à la question posée (« le transformateur convient », « la norme est respectée »).

Ex

Exemple : vérifier un transformateur *Question : le transformateur de* 100 kVA, 400 V *au secondaire, peut-il alimenter un atelier qui absorbe* $P = 72\,\text{kW}$ *avec* $\cos(\Phi) = 0{,}8$ *?*

$S = \dfrac{P}{\cos(\Phi)} = \dfrac{72}{0{,}8} = 90\,\text{kVA}$. Comme $S = 90\,\text{kVA} < S_n = 100\,\text{kVA}$, **le transformateur convient**, avec une marge de 10 %.

Les erreurs qui coûtent le plus de points

✗

Pièges fréquents à l'examen

- ▷ Confondre **tension simple** V et **tension composée** $U = \sqrt{3}\,V$ en triphasé, ou oublier le $\sqrt{3}$ dans $P = \sqrt{3}\,U\,I\cos(\Phi)$.
- ▷ Mélanger **valeur maximale** et **valeur efficace** ($U_{max} = U\sqrt{2}$ en sinusoïdal).
- ▷ Utiliser une vitesse en tr/min dans $P = C\,\Omega$: Ω est en rad/s, $\Omega = \dfrac{2\pi n}{60}$.

✗

- ▷ Prendre la puissance **utile** d'un moteur pour sa puissance **absorbée** (il faut diviser par le rendement).
- ▷ Écrire un rendement supérieur à 1, un cos(Φ) supérieur à 1, un glissement négatif pour un moteur : ces résultats signalent une erreur, cherchez-la.
- ▷ Oublier de rendre les **documents réponses** ou d'y reporter les constructions.
- ▷ Laisser une question sans **conclusion** alors qu'elle demande « conclure », « justifier », « choisir ».

Contrôler ses résultats en dix secondes

✓ **Unités** : le résultat a-t-il l'unité attendue ? (W, VA, VAR, kW · h, N · m…)

✓ **Ordre de grandeur** : un moteur d'atelier fait quelques kW à quelques centaines de kW ; un courant de ligne en BT est rarement au-delà de quelques centaines d'ampères ; un rendement de machine est compris entre 80 % et 98 %.

✓ **Cohérence** : une valeur trouvée dans une partie doit rester compatible avec la suivante (le courant calculé doit être inférieur au calibre de la protection, la puissance absorbée supérieure à la puissance utile…).

S'entraîner

Les sujets des sessions 2008 à 2026, classés par chapitre, sont recensés dans l'annexe suivante (p. 645). En fin de chaque chapitre de ce livre, les deux sujets « type BTS » reprennent le même format sur un seul chapitre ; ils existent aussi en version interactive sur le site, avec des valeurs renouvelées à chaque tirage (générateur d'exercices, rubrique « Sujet blanc type BTS »).

Les annales du BTS chapitre par chapitre

Les sujets officiels de 2008 à 2026 (Métropole, Nouvelle-Calédonie, Polynésie) sont découpés en parties : pour chaque chapitre, les parties où il est **dominant**, puis celles où il intervient **aussi**. Avant 2022, ce sont des sujets de l'ancien BTS ; depuis 2022, des épreuves E4 du diplôme rénové. Sujets et corrigés : site, page « Annales du BTS ».



Chapitre 1 · Électricité de base — 2 parties

2009 ·	Métropole	Partie D	Alimentation en énergie du puits L4
2018 ·	Métropole	Partie B	Étude des résistances de chauffe

Chapitre 2 · Systèmes triphasés équilibrés — 9 parties

2011 ·	N.-Calédonie	Partie C	Étude énergétique du variateur de la soufflante principale
2022 ·	N.-Calédonie	Partie C	Mode de fonctionnement secours
2023 ·	N.-Calédonie	Partie C	Système de compensation d'énergie réactive
2023 ·	N.-Calédonie	Partie D	Câble reliant la microcentrale au transformateur
2024 ·	Métropole	Partie A	Taux de charge du transformateur
2025 ·	Métropole	Partie A	Alimentation du site
2025 ·	Métropole	Partie B	Dimensionnement du nouveau départ
2026 ·	Métropole	Partie A	Capacité de l'installation à intégrer la nouvelle unité de refroidissement
2026 ·	Métropole	Partie B	Rétablissement du taux de charge des transformateurs HTA/BT

Aussi : 2011 N.-Cal. A ; 2017 N.-Cal. B ; 2018 Mét. B ; 2021 Mét. D ; 2021 Pol. A ; 2022 Mét. C ; 2023 Mét. C

Chapitre 3 · Transformateur monophasé — aucune partie dominante

Chapitre 4 · Transformateur triphasé — 13 parties

2010 ·	Métropole	Partie D	Mise en parallèle d'un deuxième transformateur
2014 ·	Polynésie	Partie C	Couplage de l'alternateur au réseau 63 kV
2015 ·	N.-Calédonie	Partie 3	Alimentation du moteur du ventilateur pendant le démarrage
2016 ·	Métropole	Partie D	Transformateur HTA/BT
2018 ·	Polynésie	Partie C	Alimentation du poste écluse et étude du transformateur 5,5 kV / 400 V
2019 ·	Polynésie	Partie A	Étude du transformateur triphasé
2020 ·	N.-Calédonie	Partie C	Transformateur et protections de l'installation
2021 ·	Métropole	Partie C	Le transformateur permet-il d'assurer l'alimentation de l'installation ?
2021 ·	Polynésie	Partie C	Alimentation des variateurs de vitesse
2022 ·	Métropole	Partie C	Transformateur et protections
2023 ·	Métropole	Partie C	Puissance nécessaire au fonctionnement des auxiliaires

2023 ·	Métropole	Partie D	Protection du poste de livraison et de l'alternateur contre les courts-circuits
2024 ·	Métropole	Partie B	Alimentation de la ligne d'impression A30

Chapitre 5 · Qualité de l'énergie électrique — 14 parties

2010 ·	Métropole	Partie C	Conséquences de l'utilisation du variateur de vitesse (harmoniques)
2011 ·	N.-Calédonie	Partie E	Influence du chauffage et du variateur sur le réseau
2012 ·	N.-Calédonie	Partie C	Fonctionnement en cas de pénurie d'eau liquide
2013 ·	Métropole	Partie B	Dimensionnement du conducteur de neutre avec des gradateurs
2014 ·	Métropole	Partie D	Commande et régulation
2014 ·	N.-Calédonie	Partie C	Grandeurs électriques en entrée du variateur
2015 ·	Métropole	Partie E	Qualité de l'énergie électrique
2016 ·	Polynésie	Partie D	Étude du variateur
2017 ·	Métropole	Partie C	Qualification électrique de l'installation
2019 ·	N.-Calédonie	Partie E	Étude de la consommation d'un variateur
2019 ·	Polynésie	Partie C	Étude de la qualité de l'énergie électrique
2020 ·	Métropole	Partie C	Qualité de l'énergie et groupe moteur-variateur
2020 ·	Polynésie	Partie C	Évaluer la qualité de l'énergie électrique
2021 ·	Métropole	Partie D	Améliorer la qualité de l'énergie

Aussi : 2009 Mét. D ; 2010 N.-Cal. C ; 2015 Pol. B ; 2020 N.-Cal. B ; 2023 N.-Cal. C

Chapitre 6 · Convertisseurs électromécaniques — 31 parties

2008 ·	N.-Calédonie	Partie B	Pilotage de la machine asynchrone lors des phases de montée et descente
2009 ·	Métropole	Partie B	Solution pour obtenir un débit variable
2009 ·	N.-Calédonie	Partie B	Étude énergétique de la solution actuelle (moteurs à rotor bobiné)
2010 ·	Métropole	Partie B	Amélioration du bilan énergétique (variateur de vitesse)
2010 ·	N.-Calédonie	Partie A	Amélioration de la productivité
2011 ·	Métropole	Partie B	Détermination de la puissance électrique disponible
2012 ·	Métropole	Partie A	Cogénération de l'énergie électrique
2014 ·	Métropole	Partie C	Génératrice de type MADA
2014 ·	N.-Calédonie	Partie B	Dimensionnement et commande des machines asynchrones
2014 ·	Polynésie	Partie B	Étude du refroidissement de l'alternateur
2015 ·	Métropole	Partie A	Caractéristiques du groupe électrogène
2015 ·	Métropole	Partie D	Réglage du facteur de puissance du groupe couplé au réseau
2015 ·	Polynésie	Partie B	Étude du redresseur mécanique DIMECO
2016 ·	Métropole	Partie B	Étude du moteur asynchrone
2016 ·	N.-Calédonie	Partie B	Étude de la régulation de niveau
2017 ·	Métropole	Partie B	Étude du moto-variateur
2017 ·	N.-Calédonie	Partie B	Étude de la génératrice asynchrone
2017 ·	Polynésie	Partie B	Comparaison de deux modes d'alimentation des surpresseurs
2017 ·	Polynésie	Partie D	Alimentation de secours du prétraitement
2018 ·	Métropole	Partie D	Étude du moteur du ventilateur de refroidissement
2018 ·	N.-Calédonie	Partie A	Étude du convoyage et du moteur synchrone
2018 ·	N.-Calédonie	Partie C	Association variateur, machine asynchrone et compresseur à vis
2018 ·	Polynésie	Partie B	Comparaison entre l'ancienne motorisation et le nouveau moteur asynchrone du treuil
2019 ·	Métropole	Partie B	Modélisation d'un alternateur et réglage de sa tension de sortie

2019 ·	Métropole	Partie D	Étude de l'entraînement du convoyeur
2019 ·	N.-Calédonie	Partie D	Moteur asynchrone
2019 ·	Polynésie	Partie B	Variation de vitesse des moteurs pour le retordage
2020 ·	Polynésie	Partie B	Plage de fréquences d'alimentation des moteurs des cuves de 80 hl
2021 ·	Métropole	Partie B	Valider le choix du moteur en respectant le CCTP
2021 ·	Polynésie	Partie B	Influence du changement de la commande des motopompes
2022 ·	N.-Calédonie	Partie A	Satisfaction client et optimisation énergétique du télésiège

Aussi : 2008 Mét. B ; 2009 N.-Cal. C ; 2012 Mét. B ; 2013 N.-Cal. A ; 2019 Mét. A ; 2020 Mét. C

Chapitre 7 · Électromagnétisme

aucune partie dominante

Chapitre 8 · Électronique de puissance

7 parties

2008 ·	N.-Calédonie	Partie C	Gestion de l'énergie lors de la phase de descente
2009 ·	N.-Calédonie	Partie C	Étude de la solution proposée (moteurs à cage et variateur de vitesse)
2010 ·	N.-Calédonie	Partie C	Alimentation électrique de la machine
2011 ·	N.-Calédonie	Partie A	Étude énergétique du nouveau réchauffeur
2013 ·	N.-Calédonie	Partie B	Étude du banc de test du climatiseur Soprano
2016 ·	Métropole	Partie C	Étude du variateur de vitesse
2017 ·	N.-Calédonie	Partie C	Validation du mode secouru

Aussi : 2011 N.-Cal. C ; 2012 N.-Cal. C ; 2013 Mét. B ; 2016 N.-Cal. B ; 2017 Mét. C ; 2018 Mét. B ; 2020 N.-Cal. A

Chapitre 9 · Mécanique des fluides

25 parties

2008 ·	Métropole	Partie A	Comment garantir la hauteur d'un jet d'eau ?
2009 ·	Métropole	Partie A	Choix de la pompe
2010 ·	Métropole	Partie A	Dimensionnement du moto-ventilateur
2011 ·	Métropole	Partie A	Détermination de la puissance mécanique disponible
2014 ·	Métropole	Partie A	Puissance maximale récupérable
2014 ·	Métropole	Partie B	Vitesse fixe ou vitesse variable
2014 ·	Polynésie	Partie A	Détermination de la puissance hydraulique mise en jeu
2015 ·	Métropole	Partie C	Dimensionnement du réseau fioul
2015 ·	N.-Calédonie	Partie 1	Bilan énergétique de la soufflerie
2015 ·	N.-Calédonie	Partie 2	Pilotage du ventilateur
2016 ·	Métropole	Partie A	Dimensionnement des motoventilateurs
2016 ·	N.-Calédonie	Partie A	Étude des problématiques et des solutions
2016 ·	Polynésie	Partie A	Valider la qualité du tri
2016 ·	Polynésie	Partie B	Optimiser la consommation énergétique de l'aspiration principale
2017 ·	Métropole	Partie A	Étude de la centrale de traitement de l'air (CTA)
2017 ·	N.-Calédonie	Partie A	Étude hydraulique et dimensionnement de la pompe inversée (PaT)
2017 ·	Polynésie	Partie A	Capacité de traitement en cas de fortes pluviométries
2019 ·	N.-Calédonie	Partie C	Étude de la pression hydraulique fournie par une pompe
2020 ·	Métropole	Partie A	Faut-il ajouter une quatrième pompe pour l'horizon 2030 ?
2020 ·	N.-Calédonie	Partie B	Installation hydraulique et contrôle du débit
2021 ·	Métropole	Partie A	Valider le choix de la pompe afin d'assurer la vidange du bassin
2022 ·	Métropole	Partie B	Pompes de circulation
2023 ·	N.-Calédonie	Partie A	Production d'électricité
2025 ·	Métropole	Partie C	Caractérisation de la motopompe

2025 · Métropole Partie D Contrôle de débit et économies d'énergie

Aussi : 2010 N.-Cal. A ; 2012 N.-Cal. B ; 2018 Mét. D ; 2018 Pol. A ; 2020 Pol. A ; 2022 N.-Cal. D

Chapitre 10 · Mécanique du solide — 14 parties

2008 · N.-Calédonie Partie A Étude mécanique et dimensionnement de la motorisation
2009 · N.-Calédonie Partie A Chaîne cinématique : performances mécaniques nécessaires au déplacement du pont
2010 · N.-Calédonie Partie B Mise en sécurité de la machine (freinage)
2012 · Métropole Partie B Augmentation de la productivité
2012 · N.-Calédonie Partie B Fonctionnement en haute saison
2013 · Métropole Partie A Étude mécanique et dimensionnement de la motorisation
2013 · N.-Calédonie Partie A Étude du banc de test boggie
2014 · N.-Calédonie Partie A Contraintes en couple et vitesse imposées par l'enrouleur
2015 · Polynésie Partie C Pinces d'amenage
2016 · Polynésie Partie C Arrêt des agitateurs des chambres basses
2018 · Polynésie Partie A Dimensionnement du moteur par rapport aux contraintes hydrauliques et mécaniques
2020 · Polynésie Partie A Choisir les moteurs-réducteurs adaptés aux cuves de 80 hl
2024 · Métropole Partie C Motorisation du dérouleur 1
2026 · Métropole Partie C Capacité du data center à basculer sur l'alimentation de secours

Aussi : 2008 Mét. B ; 2010 N.-Cal. A ; 2015 Pol. B ; 2016 Mét. C ; 2016 Pol. A ; 2018 N.-Cal. A ; 2019 Pol. D ; 2022 N.-Cal. A

Chapitre 11 · Un peu de chimie et de thermodynamique — 10 parties

2015 · Métropole Partie B Consommation d'un moteur diesel
2018 · Métropole Partie A Étude thermique
2018 · N.-Calédonie Partie B Intérêt de la PAC pour la production de froid
2019 · Métropole Partie A Dimensionnement des groupes électrogènes de secours et des batteries des ASI
2019 · Métropole Partie C Étude thermique du chauffage du bâtiment et eau chaude sanitaire
2019 · N.-Calédonie Partie B Étude de l'échange thermique
2019 · Polynésie Partie D Batteries des chariots élévateurs électriques
2020 · Métropole Partie B Autonomie du parc de batteries de secours
2022 · Métropole Partie D Alimentation sans interruption et compteurs d'énergie
2023 · Métropole Partie A Rendement énergétique de la cogénération

Aussi : 2012 Mét. A ; 2012 N.-Cal. A ; 2014 Pol. B ; 2017 N.-Cal. C ; 2020 N.-Cal. A

Chapitre 12 · Transferts thermiques — 2 parties

2011 · N.-Calédonie Partie B Étude de l'isolation de la trémie
2016 · Polynésie Partie E Étude thermique

Aussi : 2013 N.-Cal. B

Chapitre 13 · Photométrie et éclairagisme — 4 parties

2012 · N.-Calédonie Partie A Dimensionnement de l'installation photovoltaïque pour la basse saison
2013 · Métropole Partie C Éclairage : étude du réglage d'un projecteur
2020 · N.-Calédonie Partie A Étude de l'installation autonome (solaire + batteries)
2021 · Polynésie Partie A Choix de l'éclairage et son influence sur l'alimentation électrique

Chapitre 14 · Chaîne de mesure — 3 parties

2015 ·	Polynésie	Partie A	Capteur télémétrique à ultrasons
2019 ·	N.-Calédonie	Partie A	Capteur de température
2022 ·	Métropole	Partie A	Cuverie primaire

Aussi : 2009 Mét. C ; 2016 N.-Cal. B ; 2017 Pol. A ; 2018 Mét. C ; 2024 Mét. D

Chapitre 15 · Systèmes linéaires et fonction de transfert — aucune partie dominante

Aussi : 2011 Mét. C ; 2015 N.-Cal. 4 ; 2017 Pol. C ; 2018 Mét. C

Chapitre 16 · Régulation et asservissement — 9 parties

2008 ·	Métropole	Partie B	Solution retenue pour maintenir un niveau constant
2009 ·	Métropole	Partie C	Régulation du débit
2011 ·	Métropole	Partie C	Réglage du courant d'excitation
2015 ·	N.-Calédonie	Partie 4	Régulation de la pression dans la chambre d'essais
2017 ·	Métropole	Partie D	Régulation de pression
2017 ·	Polynésie	Partie C	Régulation fine de l'apport d'oxygène dans les cuves
2018 ·	Métropole	Partie C	Contrôle de la température des plaques
2022 ·	N.-Calédonie	Partie D	Régulation de la tension du câble d'entraînement
2024 ·	Métropole	Partie D	Régulation de la position de la tige du vérin du « pantin »

Aussi : 2019 Mét. B

Chapitre 17 · Mesure et incertitudes — aucune partie dominante

Index

Les numéros renvoient à la page du cours où la notion est définie ou expliquée.

A

Accumulateur 383
Action dérivée 576
Action intégrale 576
Action proportionnelle 576
Ailette 424
Aimant permanent 235
Alimentation sans interruption (ASI) ... 159
Alternateur 195
Ampère (théorème d') 233
Ampèremètre 2
Ampères-tours (compensation des) 77
Amplificateur d'instrumentation 500
Amplification statique 532
Analogie électrique, mécanique, thermique 531
Analyseur de réseau 46, 160
Angle de retard à l'amorçage 266
Angle interne 199
Angle solide 458
Anti-retour 355
Anti-windup 577
Archimède (poussée d') 342
Armoire électrique
  bilan thermique 429
  climatisation 430
  ventilation forcée 430
Asservissement 566
Association de résistances 5
Autopilotage 198

B

Balais-collecteur 187
Ballast 463
Bande passante 539
Batterie d'accumulateurs 383
  association série-parallèle 385
Batterie de condensateurs 48
  couplage 49
Behn-Eschenburg (modèle de) 196
Bernoulli (relation de) 312
  généralisée 317
Betz (limite de) 320
Bilan de puissances 48
Black (formule de) 571
Blocs en cascade 533
BMS 385
Bode (diagramme de) 538
Bornes homologues 76
Boucherot (formule de) 75, 239
Boucherot (théorème de) 12
  en triphasé 47
Boucle 4-20 mA 502
Boucle fermée 567
Bras de levier 344
Broïda (méthode de) 578
Bus continu 269

C

Calibre 610
Calorimétrie 394
Caméra thermique 426
CAN 504
Candela 458
Capacité d'un accumulateur 386
Capacité thermique 394, 420
Capacité thermique massique 391
Capteur
  actif 493
  passif 493
  piézoélectrique 498
  sensibilité 494
Caractéristique mécanique 189, 353
Caractéristique statique 494
Cavitation 319
Cellule de charge 498
Chaîne cinématique 350
Chaîne de mesure 492
Chaîne ouverte 567
Chaleur 390
Chaleur latente 393
Champ électrique 230
Champ magnétique 231
Champ rémanent 234

Champ tournant 38, 190
Changement d'état 393
Charge linéaire 151
Charge non linéaire 151
Château d'eau 309
Chiffre significatif 614
Chute de tension 117
    en ligne 4
    transformateur 82
Circuit magnétique 74, 236
    feuilleté 74, 235
Circuit magnétique à flux forcés 108
Circuit RC 531
Circuit RL 531
Circuit RLC série 11, 535
Claquage 231
Classe d'isolation 84, 429
Classe d'un appareil 611
Codeur incrémental 498
Coefficient d'amortissement 535
Coefficient d'échange convectif 424
Coefficient de détermination 617
Coefficient de transmission thermique .. 423
Comburant 388
Combustible 388
Combustion 388
    incomplète 388
Commande à U/f constant 193, 280
Compatibilité 615
Compatibilité électromagnétique (CEM) 159
Compensation de pôle 577
Composition des incertitudes 612
Condensateur 10
Conduction thermique 421
Conductivité thermique 422
Conformité 616
Conservation du débit 311
Consigne 566
Constante de temps 495, 531
Constante de temps thermique 432
Convection 421
    forcée 421
    naturelle 421
Convention générateur 2
Convention récepteur 2
Convertisseur analogique-numérique 504
Convertisseur électromécanique 184
Convertisseur statique 264
COP 395
Couplage d'un moteur 44
Couplage étoile 41, 109
Couplage triangle 41, 109
Couplage zigzag 109
Couple 344
Couple d'accélération 354
Couple moteur 345
Couple résistant 186, 345
Coupure brève 158
Courant de circulation 120
Courant de court-circuit 8, 116
Courant de Foucault 74, 239
Courant de ligne 42
Courant de neutre 42
Courant de phase 43
Courant magnétisant 78
Creux de tension 158
Cyclabilité 387
Cycle d'hystérésis 234

D

Daniell (pile) 383
Darcy (formule de) 316
Débit massique 310
Débit volumique 310
Déclassement 155, 429
Démarrage étoile-triangle 193
Démarreur progressif 193
Densité de flux thermique 420
Dépannage d'une chaîne de mesure 506
Dépassement 537, 572
Déperditions thermiques 431
Déphasage 9
Déséquilibre de tension 159
Détecteur de proximité 498
Dilemme stabilité-précision 574
Diode 265
    en antiparallèle 266
Diode de roue libre 240, 272
Dipôle
    capacitif 10
    inductif 10
    résistif 10
Dissipateur thermique 279, 424
Double vitrage 431
Driver de LED 463
Dyn11 (couplage) 119
Dynamo tachymétrique 580

E

Éblouissement 459
Écart statique 572

Écart-type . . . 608
Échantillonnage . . . 505
Échelon . . . 530
Éclairement . . . 459
  en un point . . . 461
  moyen maintenu . . . 464
Écoulement stationnaire . . . 311
Écriture d'un résultat . . . 614
Effet de peau . . . 155
Effet Joule . . . 4
Efficacité lumineuse . . . 457
Électroaimant . . . 241
Émissivité . . . 425
EN 50160 . . . 160
Énergie cinétique . . . 348
Énergie électrique . . . 3
Énergie interne . . . 391
Énergie magnétique . . . 240
Énergie mécanique . . . 348
Énergie réactive . . . 48
Énergie spécifique . . . 386
Engrenage . . . 351
Enroulement . . . 74
Entrefer . . . 237
Éolienne . . . 320
Équation différentielle . . . 530
Équilibre thermique . . . 394
Erreur aléatoire . . . 606
Erreur de mesure . . . 606
Erreur systématique . . . 606
Essai à vide . . . 80, 115
Essai en court-circuit . . . 81, 116
Étalon . . . 607
Étalonnage . . . 494
Étendue de mesure . . . 494
Étoile (couplage) . . . 41
Excitation magnétique . . . 233

F

Facteur d'élargissement . . . 614
Facteur de déplacement . . . 153
Facteur de maintenance . . . 466
Facteur de puissance . . . 12, 153
  en triphasé . . . 45
  mesure . . . 619
Facteur de qualité . . . 541
Facteur de réflexion . . . 466
Facteur K . . . 155
Faraday (loi de) . . . 238
Fidélité . . . 607
Filtre accordé . . . 157
Filtre actif . . . 158
Filtre hybride . . . 158
Filtre passe-bande . . . 541
Filtre passe-bas . . . 501, 534
Filtre passe-haut . . . 540
Filtre passif . . . 157
Flicker . . . 159
Fluide . . . 306
  incompressible . . . 306
  parfait . . . 312
Flux lumineux . . . 457
Flux magnétique . . . 236
Flux thermique . . . 420
Fonction de transfert . . . 532, 569
Fondamental . . . 148
Force . . . 342
Force électromotrice . . . 7, 384
Force électromotrice induite . . . 238
Force magnétomotrice . . . 236
Force portante . . . 241
Fourier (loi de) . . . 422
Fourier (série de) . . . 148
Freinage avec récupération . . . 274
Fréquence . . . 8
Fresnel (représentation de) . . . 9
  en triphasé . . . 39
Frottement . . . 342
FTBF . . . 571
FTBO . . . 571
Fuites magnétiques . . . 78

G

Gain en décibels . . . 538
Génératrice asynchrone . . . 194
Génératrice tachymétrique . . . 498
Glissement . . . 190
Gradateur . . . 277
  commande par angle de phase . . . 277
  commande par train d'ondes . . . 278
Gradation de l'éclairage . . . 468
Grandeur réglante . . . 566
Grandeur réglée . . . 566
Grandeurs ramenées à l'arbre moteur . . . 352

H

Hacheur . . . 272
  de freinage . . . 280
  en pont . . . 274
  série . . . 272
Harmonique . . . 148
  de rang 3 . . . 154

Hauteur manométrique totale (HMT) . . 317
Hooke (loi de) 342
Hopkinson (loi d') 236
HTA 119
Hystérésis 576

I

IGBT 266
Impédance 10
Impédance synchrone 195
Incertitude
absolue 612
de type A 607
de type B 607
élargie 614
relative 612
Incertitude de mesure 606
Incertitude-type 607
Indicatrice 461
Indice de modulation 276
Indice de rendu des couleurs 463
Indice du local 465
Indice horaire 111
Inductance 10, 240
Inductance de ligne 156
Inductance magnétisante 114
Inducteur 184
Induction électromagnétique 238
Induction magnétique 233
Induit 184
Intégrateur 570
Intensité du courant 2
Intensité lumineuse 458
Interrupteur parfait 265
IRC 463
Isolant thermique 422
Isolement galvanique 77

J

Jauge de déformation 497
Justesse 607

K

Kapp (diagramme de) 82, 117
Kapp (formule de) 82
Kirchhoff (lois de) 2

L

Lampe
à décharge 463
à incandescence 463
Laplace (force de) 237
Laplace (transformée de) 533
LED 463
Lenz (loi de) 238
Levage 355
Ligne de champ 231
Linéarité 494
Loi d'Ohm 4
généralisée 10
Loi de l'inverse du carré de la distance . 460
Loi des mailles 2
Loi des nœuds 3
Loi du cosinus 460
Loi normale 608
Loi uniforme 609
Lumen 457
Luminance 459
Lux 459
Luxmètre 459

M

Machine à courant continu 187
démarrage 188
excitation indépendante 187
Machine asynchrone 189
caractéristique mécanique 192
choix du couplage 191
démarrage 193
glissement 190
Machine frigorifique 395
Machine synchrone 194
moteur synchrone 198
Marge de gain 576
Marge de phase 576
Masse volumique 306
Matériau ferromagnétique 234
doux 235
dur 235
Mesurande 492, 606
Méthode de l'horloge 111
Méthode des deux wattmètres 46
Méthode des flux 465
Méthode des pertes séparées 84
Méthode point par point 467
Mise en parallèle de transformateurs . . . 119
répartition de la charge 121
MLI 275
Moment d'inertie 347
Moment d'une force 344
Montsinger (règle de) 429
MOSFET 266

Mouvement
uniformément accéléré 345
Moyenne 608
MSAP 198

N

Neutre 38
courant dû aux harmoniques 154
Newton (loi de) 424
NF EN 12464-1 464
Notation complexe 532

O

ONAN 119
Ondulation de courant 273
Onduleur 274
commande pleine onde 275
Onduleur assisté 270
Ordre d'un système 532
Ordre des phases 40
Oxydant 382
Oxydation 382
Oxydoréduction 382

P

Paires de pôles 190
Paroi composée 423
Parseval (relation de) 150
Pascal (théorème de) 309
Pâte thermique 428
PCI 389
Période 8
Perméabilité
relative 233
Perte de charge 315
régulière 315
singulière 315
Pertes à vide 118
Pertes collectives 185
Pertes en conduction 278
Pertes fer 78, 114, 185, 235
par courants de Foucault 235
par hystérésis 235
Pertes Joule 4, 117, 185
transformateur 78
Pertes mécaniques 185
Pertes par commutation 278
Perturbation 566
PFC 158
Phase (conducteur de) 38
PID 576
structures 577
Pile à combustible 383
Pile électrochimique 383
Pince ampèremétrique 611
Pitot (tube de) 313
Plan incliné 343
Plaque à bornes 44
Plaque signalétique
d'un moteur 44
d'un transformateur 77
transformateur triphasé 118
Poids 342
Point critique 575
Point de fonctionnement 186, 354
d'une pompe 318
Point neutre 42
Pompe
centrifuge 318, 355
courbe caractéristique 318
volumétrique 318
Pompe à chaleur 395
Pont diviseur de tension 6
Pont PD2 268
Pont PD3 269
Pont thermique 431
Poste de transformation 119
Poulies et courroie 351
Pouvoir calorifique 389
Pouvoir de coupure 116
Précision 494, 572
Premier ordre retardé 578
Premier principe de la thermodynamique 391
Pression 306
absolue 307
relative 307
Principe d'inertie 343
Principe de superposition 530
Principe fondamental de la dynamique
en rotation 347
en translation 347
Principe fondamental de la statique des fluides 308
Prise de réglage 119
Profil de vitesse trapézoïdal 346
Profondeur de décharge 386
Propagation des incertitudes 613
Pseudo-période 536
Pt100 496
montage 2, 3 ou 4 fils 496
Puissance active 12

en triphasé 45
régime non sinusoïdal 153
Puissance apparente 12
en triphasé 45
nominale 77
régime non sinusoïdal 153
Puissance apparente nominale 114
Puissance de court-circuit 152
Puissance déformante 153
Puissance hydraulique 317
Puissance instantanée 46
Puissance mécanique 349
Puissance réactive 12
en triphasé 45
régime non sinusoïdal 153
Puissance thermique 392
Pulsation 8
Pulsation de coupure 539
Pulsation propre 535

Q

Quantification 504
Quantum 504
Quatre quadrants 186, 274

R

Rapport cyclique 272
Rapport de transformation 76, 110
Rapport par colonne 110
Rayonnement thermique 421
Réactance 10
Réactance de fuites 79
Réactance synchrone 196
Réaction exothermique 389
Récepteur déséquilibré 41
Récepteur triphasé équilibré 41
Redresseur
commandé 270
Redresseur à condensateur 151
Réducteur (chimie) 382
Réducteur de vitesse 350
Réduction (chimie) 382
Régime apériodique 536
Régime continu 2
Régime critique 536
Régime laminaire 314
Régime permanent 534
Régime pseudo-périodique 536
Régime sinusoïdal 8
Régime transitoire 534
Régime turbulent 314
Réglabilité 578
Règle de la main droite 232
Règle des trois doigts 237
Régression linéaire 617
Régulateur 568
Régulation 566
Régulation en cascade 580
Relais thermique 433
Relèvement du facteur de puissance 12
en triphasé 48
Réluctance 236
Rendement
en cascade 352
maximal 85
transformateur 84
transformateur triphasé 117
transmission mécanique 352
Rendement maximal 118
Répétabilité 607
Repliement de spectre 505
Réponse fréquentielle 530
Réponse indicielle 530
Reproductibilité 607
Réseau de distribution 41
Réseau triphasé 38
Résistance équivalente 4
Résistance interne 384
Résistance thermique 422
en parallèle 426
en série 426
superficielle 423
surfacique 422
Résistivité 4
Résolution 494, 610
Résonance 540
Résonance parallèle 156
Retard pur 570
Réversibilité 264
Reynolds (nombre de) 314
Rigidité diélectrique 231
Rotor 184

S

Saturation magnétique 234
Schéma bloc 568
Schéma équivalent par phase 113
Schéma monophasé équivalent 42
Seebeck (effet) 496
Self anti-harmonique 156
Sens d'action 569
Sens de rotation

inversion 40
Sensibilité de l'œil 456
Shannon (critère de) 505
Signal analogique 492
Signal numérique 492
Soudure froide 497
Source isotrope 458
Source lambertienne 461
Spectre de raies 456
Spectre en amplitude 149
Spectre visible 456
Stabilité 572
Stator 184
Stefan-Boltzmann (loi de) 425
STEP 320
Surcharge 433
Système du deuxième ordre 535
Système du premier ordre 531
Système linéaire 530
Système triphasé équilibré 39
Système vis-écrou 351

T

Taux de distorsion harmonique 150
Température 390
Température de couleur 462
Température de jonction 428
Temps de réponse 495, 534, 572
Tension à vide 77
Tension composée 38
relation avec la tension simple 40
Tension de court-circuit 81, 116
Tension électrique 2
Tension simple 38
Terme dominant 613
THD 150, 275
Théorème de l'énergie cinétique 349
Thermocouple 496
Thévenin (modèle de) 7
Thyristor 266
Tolérance 616
Torricelli (formule de) 313
Tout ou rien (TOR) 576
Transformateur
abaisseur 76
chute de tension 82
élévateur 76
essai à vide 80
essai en court-circuit 81
modèle équivalent 79
modèle vu du secondaire 79
parfait 75
primaire 74
puissance nominale 77
rapport de transformation 76
rendement 84
secondaire 74
Transformateur d'isolement 77
Transformateur de distribution 119
Transformateur immergé 109
Transformateur monophasé 74
Transformateur parfait 75
Transformateur sec enrobé 109
Transformateur triphasé 108
désignation du couplage 109
modèle par phase 113
rapport de transformation 110
Transmetteur 492
Transport de l'énergie électrique 75
Travail d'un couple 349
Travail d'une force 349
Treuil 345
Triac 266
Triangle (couplage) 41
Triangle des puissances 12
Triangle du feu 388
TRMS 150, 267, 611
Tube fluorescent 463
Turbine 319

U

UGR 459
Uniformité 464
Unité de représentation (UR) 610
Utilance 466

V

Valeur efficace 8, 150, 267
Valeur moyenne 267
Valeur vraie 606
Variateur de vitesse 193, 279
Ventilateur 355
Venturi (tube de) 313
Vérin 309
Viscosité 314
cinématique 314
dynamique 314
Vitesse angulaire 346
Vitesse de synchronisme 190
Voltmètre 2

W

Wattmètre 46
méthode des deux wattmètres 46
Wheatstone (pont de) 499
Wien (loi de) 425

Z

z-score 615
Zéro vivant 503