

Lycée Jean Jaurès – Argenteuil

Formulaire

Physique appliquée

BTS électrotechnique – 2^e année



Julien GUÉRET

Les formules essentielles du cours, chapitre par chapitre

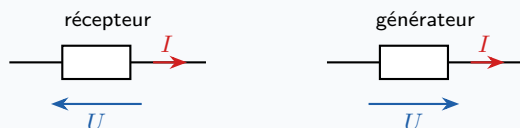
Sommaire

1	Électricité de base	3
2	Systèmes triphasés équilibrés	5
3	Transformateur monophasé	6
4	Transformateur triphasé	7
5	Qualité de l'énergie électrique	8
6	Convertisseurs électromécaniques : MCC, MAS, MS	9
7	Électromagnétisme	11
8	Électronique de puissance	13
9	Mécanique des fluides	15
10	Mécanique du solide	16
11	Chimie et thermodynamique	17
12	Transferts thermiques	18
13	Photométrie et éclairagisme	19
14	Chaîne de mesure	20
15	Systèmes linéaires du 1 ^{er} et du 2 ^e ordre	21
16	Régulation et asservissement	22
17	Mesure et incertitudes	24

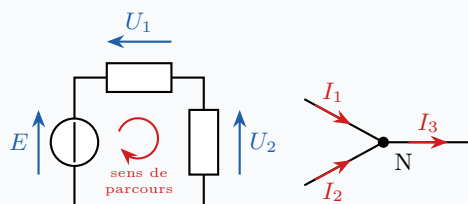
Mode d'emploi et conventions de notation

- ▷ Chaque formule est suivie de la signification de ses symboles et de leur unité SI, puis, en orange, de ses **conditions de validité**.
- ▷ ★ **formule encadrée** : formule incontournable, à connaître par cœur.
- ▷ Grandeurs fonction du temps en minuscules : $u(t)$, $i(t)$, $v(t)$, $p(t)$.
- ▷ Valeurs efficaces et puissances en majuscules : U , I , P , Q , S ; valeurs moyennes notées $\langle u \rangle$.
- ▷ Grandeurs complexes soulignées : $\underline{Z}$, $\underline{U}$, $\underline{I}$.
- ▷ Vecteurs de Fresnel : $\vec{u}$, $\vec{i}$; déphasage Φ (majuscule), orienté de $\vec{i}$ vers $\vec{u}$.

Lois générales en courant continu



☞ Convention récepteur : flèches de U et de I en sens opposés ; convention générateur : même sens.



☞ Maille : $E = U_1 + U_2$; nœud N : $I_1 + I_2 = I_3$.

$$\star \sum U_{\text{sens de parcours}} = \sum U_{\text{sens inverse}}$$

Loi des mailles : sur une boucle fermée, la somme algébrique des tensions est nulle (flèche dans le sens de parcours : +, sinon -).

$$\star \sum I_{\text{arrivant}} = \sum I_{\text{partant}}$$

Loi des nœuds.

$$\star U = R \times I$$

U : tension (V) ; R : résistance (Ω) ; I : intensité (A).

Validité : conducteur ohmique, convention récepteur.

Résistances équivalentes

$$\star \text{série : } R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Même courant dans chaque résistance.

$$\star \text{parallèle : } \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

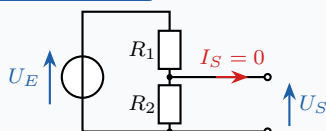
Même tension aux bornes de chaque résistance.

$$\star R_{\text{eq}} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

Deux résistances en parallèle uniquement.

☞ n résistances identiques : nR en série, R/n en parallèle.

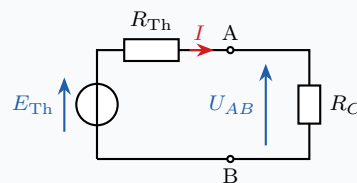
Pont diviseur de tension



$$\star U_S = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times U_E$$

Validité : pont à vide ($I_S = 0$). Chargé par R_C : remplacer R_2 par $R_2 R_C / (R_2 + R_C)$, U_S diminue.

Modèle de Thévenin



$$\star U_{AB} = E_{Th} - R_{Th} \times I \quad I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C}$$

E_{Th} : tension de Thévenin (V) ; R_{Th} : résistance de Thévenin (Ω) ; convention générateur.

☞ $E_{Th} = U_{AB0}$: tension à vide (charge débranchée) ; R_{Th} : résistance vue de A et B, sources éteintes (tension $\rightarrow$ fil, courant $\rightarrow$ circuit ouvert).

Validité : réseau linéaire (sources et résistances).

Puissance, énergie, effet Joule

$$\star P = U \times I$$

P : puissance (W) (en continu).

$$\star E = P \times \Delta t$$

E : énergie (J) si Δt : durée (s) ; en $W \cdot h$ si Δt est en heures.

☞ $1 W \cdot h = 3\,600 J$; $1 kW \cdot h = 3,6 MJ$.

Signaux sinusoïdaux

$$\star u(t) = U_{\text{max}} \sin(\omega t + \Phi_u) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega t + \Phi_u)$$

$$i(t) = I_{\text{max}} \sin(\omega t + \Phi_i) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega t + \Phi_i)$$

U_{max} : amplitude (V) ; Φ_u : phase à l'origine (rad) ;

$U_{\text{cc}} = 2 U_{\text{max}}$: valeur crête à crête.

$$\star f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f : fréquence (Hz) ; T : période (s) ; ω : pulsation ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

$$\star U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Valeur efficace : celle qu'affiche un voltmètre en position AC.

Validité : signal sinusoïdal uniquement.

☞ $\pi \text{ rad} = 180^\circ$; réseau : $f = 50 \text{ Hz}$, $T = 20 \text{ ms}$, $\omega \approx 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$, $U_{\text{max}} \approx 325 \text{ V}$.

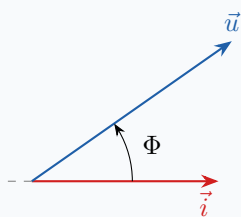
Déphasage

$$\star \Phi = \Phi_u - \Phi_i \quad |\Phi| = 2\pi \times \frac{\tau}{T}$$

$\tau = |t_u - t_i|$: décalage temporel, toujours positif (s) ; Φ en rad (ou $|\Phi| = 360^\circ \times \tau/T$ en degrés) ; le signe se lit sur les courbes.

☞ $\Phi > 0$: $u(t)$ en avance sur $i(t)$ (dipôle inductif) ; $\Phi < 0$: $u(t)$ en retard sur $i(t)$ (dipôle capacitif).

Représentation de Fresnel



longueur $\propto$ valeur efficace
angle = phase

☞ Un vecteur par signal ; l'angle Φ est toujours orienté de $\vec{i}$ vers $\vec{u}$ (sens trigonométrique). Les vecteurs s'additionnent comme les tensions (loi des mailles).

Impédance complexe

$$\star \underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I} \quad U = Z \times I$$

Loi d'Ohm généralisée (complexes, puis valeurs efficaces).

$$\underline{Z} = R + jX$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \Phi = \text{Arctan}\left(\frac{X}{R}\right)$$

R : résistance (Ω) ; X : réactance (Ω) ; $X > 0$: inductif ; $X < 0$: capacitif ; $X = 0$: résistif.

Dipôles élémentaires

	Résistance	Inductance	Condensateur
$\underline{Z}$	R	$jL\omega$	$-j\frac{1}{C\omega}$
Z	R	$L\omega$	$\frac{1}{C\omega}$
Φ	0°	$+90^\circ$	-90°
P	$RI^2 = \frac{U^2}{R}$	0	0
Q	0	$L\omega I^2 = \frac{U^2}{L\omega}$	$-C\omega U^2 = \frac{-I^2}{C\omega}$

L : inductance (H) ; C : capacité (F).

Associations

$$\star \text{ série : } \underline{Z}_{\text{eq}} = \sum \underline{Z} \quad \text{parallèle : } \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\text{RLC série : } \underline{Z}_{\text{eq}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\text{RL : } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad \Phi = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) > 0$$

$$\text{RC : } Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \Phi = \text{Arctan}\left(\frac{-1}{RC\omega}\right) < 0$$

Puissances en régime sinusoïdal

$$\star P = UI \cos \Phi$$

P : puissance active (W) ; U, I : valeurs efficaces.

$$\star Q = UI \sin \Phi = P \tan \Phi$$

Q : puissance réactive (VAR) ; $Q > 0$: inductif ; $Q < 0$: capacitif.

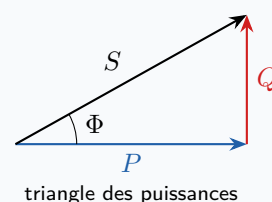
$$\star S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

S : puissance apparente (VA).

$$\star f_p = \cos \Phi = \frac{P}{S}$$

Facteur de puissance (sans unité) ; $\Phi = \arccos(f_p)$.

Validité : $f_p = \cos \Phi$ uniquement pour des signaux sinusoïdaux (sinon voir chapitre 5).



triangle des puissances

Théorème de Boucherot

$$\star P_{\text{tot}} = \sum_i P_i \quad Q_{\text{tot}} = \sum_i Q_i$$

Les puissances actives et réactives s'additionnent.

$$\star S_{\text{tot}} = \sqrt{P_{\text{tot}}^2 + Q_{\text{tot}}^2} \quad f_p = \frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}}$$

Validité : récepteurs linéaires alimentés à la même fréquence. On n'additionne **jamais** les puissances apparentes.

Relèvement du facteur de puissance

$$Q_c = Q_{\text{après}} - Q_{\text{avant}}$$

Théorème de Boucherot : les condensateurs fournissent la différence de puissance réactive.

$$Q_c = P (\tan \Phi_{\text{après}} - \tan \Phi_{\text{avant}})$$

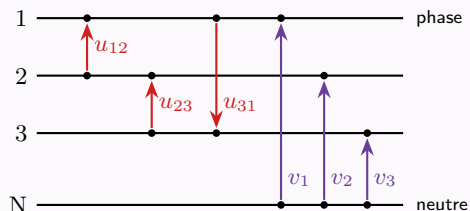
Puissance réactive à apporter ($Q_c < 0$) ; P inchangée car $P_c = 0$; $\Phi = \arccos(f_p)$.

$$\star C = \frac{-Q_c}{\omega U_{\text{eff}}^2}$$

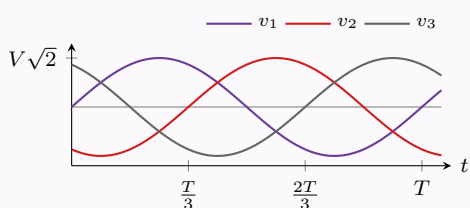
C : capacité du condensateur (F) ; U_{eff} : tension d'alimentation.

☞ Régler la calculatrice en degrés ou en radians selon l'unité de Φ .

Réseau triphasé



☞ Tensions **simples** v : entre une phase et le neutre ; tensions **composées** u : entre deux phases.



$$v_1(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t) \quad v_2(t) = V\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

V : tension simple efficace (V).

$$u_{12} = v_1 - v_2 \quad u_{23} = v_2 - v_3 \quad u_{31} = v_3 - v_1$$

Relations entre tensions composées et tensions simples.

$$\star V_1 = V_2 = V_3 = V \quad U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$$

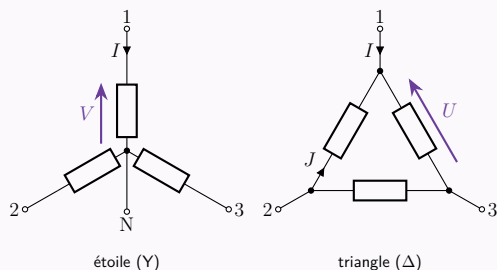
Valeurs efficaces : V : tension simple (V) ; U : tension composée (V). Réseau 230 V / 400 V, 50 Hz.

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$$

À chaque instant.

Validité : système équilibré : trois tensions de même valeur efficace, déphasées de 120° .

Couplages étoile et triangle

Couplage étoile : couple (V, I)

$$\star V = Z \times I \quad U = \sqrt{3} V$$

Chaque récepteur est soumis à V et traversé par le courant de ligne I .

Couplage triangle : couple (U, J)

$$\star U = Z \times J \quad I = \sqrt{3} J$$

J : courant dans un récepteur (A) ; I : courant de ligne (A).

Choix du couplage d'un récepteur

☞ La plus petite tension de la plaque est celle que supporte un enroulement.

▷ $U_{\text{réseau}}$ = plus **grande** tension de la plaque : couplage **étoile**.

▷ $U_{\text{réseau}}$ = plus **petite** tension de la plaque : couplage **triangle**.

☞ Ex. : moteur 230 V / 400 V sur réseau 400 V : étoile ; moteur 400 V / 690 V : triangle.

Puissances (récepteur équilibré)

$$\star P = \sqrt{3} U I \cos \Phi$$

Quel que soit le couplage, avec U et I grandeurs de ligne ; Φ : déphasage entre la tension et le courant d'un **récepteur**.

$$\star Q = \sqrt{3} U I \sin \Phi \quad S = \sqrt{3} U I$$

P en W ; Q en VAR ; S en VA.

étoile : $P = 3 V I \cos \Phi$ triangle : $P = 3 U J \cos \Phi$
(de même pour Q avec $\sin \Phi$ et pour S sans $\cos \Phi$)

Trois dipôles identiques

	R	L	C
étoile	$P = 3 R I^2$	$Q = 3 L \omega I^2$	$Q = -3 C \omega V^2$
triangle	$P = 3 R J^2$	$Q = 3 L \omega J^2$	$Q = -3 C \omega U^2$

Théorème de Boucherot en triphasé

$$\star P_{\text{tot}} = \sum_i P_i \quad Q_{\text{tot}} = \sum_i Q_i$$

$$\star S_{\text{tot}} = \sqrt{P_{\text{tot}}^2 + Q_{\text{tot}}^2}$$

$$\star I = \frac{S_{\text{tot}}}{\sqrt{3} U} \quad f_p = \frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}}$$

I : courant de ligne de l'installation.

Validité : régime sinusoïdal, installation équilibrée.

Relèvement du facteur de puissance

$$Q_c = Q_{\text{après}} - Q_{\text{avant}}$$

Théorème de Boucherot : les condensateurs fournissent la différence de puissance réactive.

$$Q_c = P (\tan \Phi_{\text{après}} - \tan \Phi_{\text{avant}})$$

$\Phi = \arccos(f_p)$; $Q_c < 0$ (puissance réactive fournie par les condensateurs).

$$\star C_Y = \frac{-Q_c}{3 \omega V^2} \quad C_\Delta = \frac{-Q_c}{3 \omega U^2}$$

Capacité de **chacun** des trois condensateurs, couplés en étoile ou en triangle.

☞ En triangle, $C_\Delta = C_Y/3$: c'est le couplage habituel des batteries de condensateurs.

Transformateur parfait

☞ Hypothèses : pas de pertes ($P_{\text{fer}} = 0$, $P_{\text{Joule}} = 0$), pas de fuites magnétiques.

$$\star m = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

m : rapport de transformation ; N_1 , N_2 : nombres de spires du primaire et du secondaire.

☞ $m > 1$: élévateur ; $m < 1$: abaisseur ; $m = 1$: transformateur d'isolement (isolation galvanique).

$$P_1 = P_2 \quad S_1 = U_1 I_1 = U_2 I_2 = S_2 \quad \eta = 100\%$$

Validité : régime alternatif uniquement : une tension continue ne crée pas de flux variable.

Puissance nominale et rendement

$$\star S_n = U_{1n} I_{1n} = U_{2n} I_{2n}$$

S_n : puissance apparente nominale (choix du transformateur) (VA).

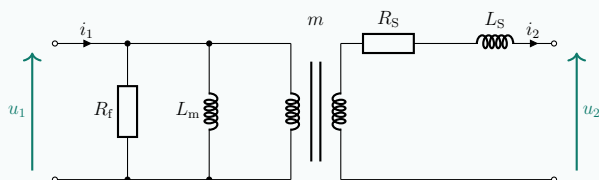
$$\star \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{fer}} + P_{\text{Joule}}}$$

$$\eta = \frac{U_2 I_2 \cos \Phi_2}{U_2 I_2 \cos \Phi_2 + P_{\text{fer}} + R_S I_2^2}$$

$P_2 = S_2 \cos \Phi_2$: puissance fournie à la charge (W) ; P_{fer} : pertes fer (constantes à U_1 fixée) ; $P_{\text{Joule}} = R_S I_2^2$.

☞ Ordre de grandeur : $\eta \approx 95$ à 98% pour quelques dizaines de kVA.

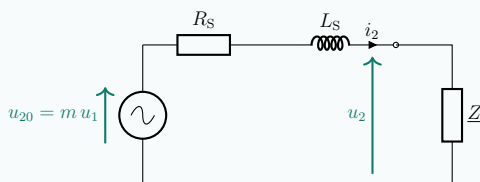
Modèle du transformateur réel



R_f : pertes fer (Ω) ; L_m : inductance magnétisante (H) ; R_S : pertes Joule ramenées au secondaire (Ω) ; L_S : fuites magnétiques ramenées au secondaire (H).

$$\star u_{20} = m u_1$$

Vu du secondaire : source de tension u_{20} (tension à vide) en série avec R_S et L_S .



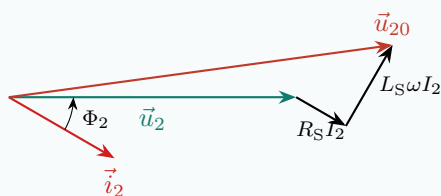
☞ Modèle équivalent vu du secondaire (charge Z) :

$$u_{20} = u_2 + (R_S + jL_S \omega) i_2.$$

Chute de tension et diagramme de Kapp

$$\vec{u}_{20} = \vec{u}_2 + \vec{u}_{R_S} + \vec{u}_{L_S}$$

Loi des mailles vue du secondaire (vecteurs de Fresnel).



$$\star \Delta U_2 = U_{20} - U_2 \approx R_S I_2 \cos \Phi_2 + L_S \omega I_2 \sin \Phi_2$$

Φ_2 : déphasage de i_2 par rapport à u_2 , imposé par la charge (rad).

Validité : formule approchée, valable pour un transformateur industriel (R_S et $L_S \omega$ faibles).

Essai à vide (secondaire ouvert)

$$\star m = \frac{U_{20}}{U_{10}} \quad P_{10} = P_{\text{fer}}$$

Indice 0 : grandeurs mesurées à vide, sous $U_{10} \leq U_{1n}$.

$$\star R_f = \frac{U_{10}^2}{P_{10}} \quad L_m = \frac{U_{10}^2}{\omega Q_{10}}$$

$$Q_{10} = \sqrt{S_{10}^2 - P_{10}^2} = \sqrt{(U_{10} I_{10})^2 - P_{10}^2}$$

Validité : à vide, les pertes Joule sont négligeables devant les pertes fer.

Essai en court-circuit (secondaire en court-circuit)

$$\star m = \frac{I_{1cc}}{I_{2cc}} \quad P_{1cc} = R_S I_{2cc}^2 \Rightarrow R_S = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2}$$

$$Z_S = \frac{U_{2cc}}{I_{2cc}} = \frac{m U_{1cc}}{I_{2cc}} = \sqrt{R_S^2 + (L_S \omega)^2}$$

$U_{2cc} = m U_{1cc}$: tension secondaire à vide correspondant à l'essai (V).

$$\star L_S = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{m U_{1cc}}{I_{2cc}}\right)^2 - R_S^2}$$

Validité : essai sous tension réduite (quelques % de U_{1n}), pour $I_{2cc} \leq I_{2n}$: les pertes fer sont alors négligeables.

Exemples d'utilisation

☞ **Transport et distribution** : élévation en sortie de centrale (jusqu'à 400 kV) pour réduire les pertes en ligne ($P_J = R I^2$), puis abaissement par étapes jusqu'à 400 V/230 V (postes HTA/BT).

☞ **Isolement** : transformateur de séparation ($m = 1$) pour la sécurité des personnes (salles d'opération, schéma IT).

☞ **Alimentation** : chargeurs et alimentations (abaisseur 230 V $\rightarrow$ 12 V/24 V), transformateur de commande des armoires.

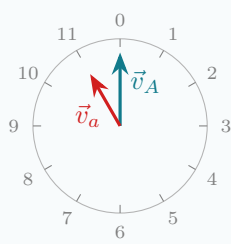
☞ **Mesure** : transformateurs de courant (TC) et de tension (TT) pour les compteurs et les protections ; soudage (fort courant au secondaire).

Couplages et indice horaire

☞ Couplage HT en majuscule (D, Y), couplage BT en minuscule (d, y, z); « n » si le neutre BT est sorti (ex. Dyn11). Bornes HT : A, B, C; bornes BT : a, b, c.

$$\star I = \frac{\theta}{30^\circ} \quad 0 \leq I \leq 11$$

I : indice horaire ; θ : angle orienté de v_A vers v_a (ou de u_{AB} vers u_{ab}), compté dans le sens horaire ($^\circ$).



Dy11 : $\theta = 330^\circ$

Couplage	I
Yy0, Dd0	0
Dy5	5
Yy6	6
Dy11, Yd11, Yz11	11

☞ Méthode de l'horloge : tension HT sur 12 h, la tension BT de même nom indique l'heure I (30° par heure).

Rapports de transformation

$$\star m = \frac{V_{20}}{V_1} = \frac{U_{20}}{U_1}$$

Rapport entre grandeurs de même nature (simples ou composées), secondaire à vide.

$$m_C = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{couplage Dy : } m_C = \frac{V_{20}}{U_1}$$

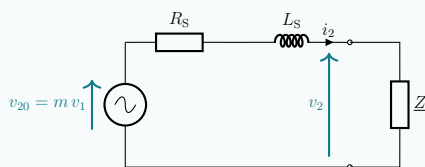
m_C : rapport par colonne : tensions aux bornes des deux bobinages d'une même colonne.

☞ Dyn 20 kV / 400 V : $m = 0,02$ et $m_C = 231/20\,000 \approx 0,0115$.

Modèle équivalent par phase

☞ Le transformateur triphasé équivaut à trois transformateurs monophasés couplés en étoile-étoile : modèle (phase-neutre) avec R_f , L_m au primaire et R_S , L_S au secondaire.

$$V_{20} = m V_1$$



☞ Modèle équivalent par phase vu du secondaire (tensions simples, entre phase et neutre).

$$\star \Delta U_2 = \sqrt{3} \Delta V_2 = \sqrt{3} (R_S I_2 \cos \Phi_2 + L_S \omega I_2 \sin \Phi_2)$$

I_2 : courant de ligne secondaire (A) ; Φ_2 : déphasage imposé par la charge.

Validité : formule approchée (R_S et $L_S \omega$ faibles).

Puissance nominale et rendement

$$\star S_n = \sqrt{3} U_{1n} I_{1n} = \sqrt{3} U_{2n} I_{2n}$$

U : tensions composées ; I : courants de ligne.

$$\star \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{fer}} + P_{\text{Joule}}}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3} U_2 I_2 \cos \Phi_2}{\sqrt{3} U_2 I_2 \cos \Phi_2 + P_{\text{fer}} + 3 R_S I_2^2}$$

Essai à vide

$$\star P_{10} = P_{\text{fer}} = \frac{3 V_{10}^2}{R_f} \Rightarrow R_f = \frac{3 V_{10}^2}{P_{10}} = \frac{U_{10}^2}{P_{10}}$$

$$\star L_m = \frac{3 V_{10}^2}{\omega Q_{10}} = \frac{U_{10}^2}{\omega Q_{10}}$$

car $U_{10} = \sqrt{3} V_{10}$; $Q_{10} = \sqrt{S_{10}^2 - P_{10}^2}$ avec $S_{10} = \sqrt{3} U_{10} I_{10}$.

Essai en court-circuit

$$\star P_{1cc} = 3 R_S I_{2cc}^2 \Rightarrow R_S = \frac{P_{1cc}}{3 I_{2cc}^2}$$

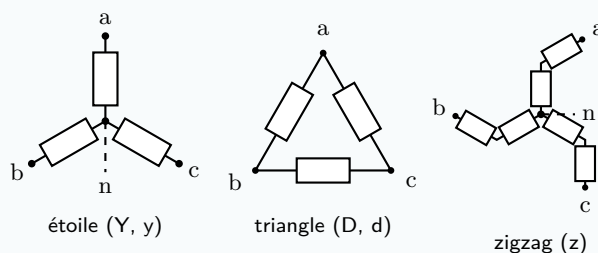
$$Z_S = \frac{V_{2cc}}{I_{2cc}} = \frac{m V_{1cc}}{I_{2cc}} = \frac{m U_{1cc}}{\sqrt{3} I_{2cc}} = \sqrt{R_S^2 + X_S^2}$$

$$\star X_S = L_S \omega = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$$

X_S : réactance de fuites ramenée au secondaire (Ω).

Validité : essai sous tension réduite, $I_{2cc} \leq I_{2n}$.

Couplages des enroulements



☞ **Étoile** : chaque enroulement est soumis à la tension simple V ; neutre disponible.

☞ **Triangle** : chaque enroulement est soumis à la tension composée U ; pas de neutre, les harmoniques de rang 3 circulent dans le triangle sans remonter sur le réseau.

☞ **Zigzag** (côté BT) : chaque phase comporte deux demi-enroulements placés sur deux colonnes différentes ; neutre disponible, bonne tenue aux charges déséquilibrées.

Décomposition en série de Fourier

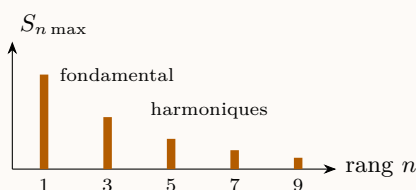
$$s(t) = \langle s \rangle + \sum_{n \geq 1} S_{n \max} \sin(n \omega_0 t + \Phi_n)$$

$\langle s \rangle$: valeur moyenne ; rang 1 : fondamental (fréquence f_0) ;
rangs $n \geq 2$: harmoniques.

$$\star f_n = n \times f_0 \quad S_{n \text{ eff}} = \frac{S_{n \max}}{\sqrt{2}}$$

f_n : fréquence de l'harmonique de rang n (Hz).

☞ Sur les réseaux triphasés, les harmoniques significatifs sont de rangs impairs (3, 5, 7...).



☞ Spectre en amplitude : une raie par rang, de hauteur $S_{n \max}$.

Valeur efficace d'un signal périodique

$$\star S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s \rangle^2 + S_{1 \text{ eff}}^2 + S_{2 \text{ eff}}^2 + S_{3 \text{ eff}}^2 + \dots}$$

Relation de Parseval : toutes les composantes interviennent (mesure avec un appareil TRMS).

$$\text{carré} \pm S_{\max} : S_{\text{eff}} = S_{\max} \quad \text{triangle} : S_{\text{eff}} = \frac{S_{\max}}{\sqrt{3}}$$

Signaux alternatifs symétriques.

Taux de distorsion harmonique

$$\star \text{THD}_i = \frac{\sqrt{I_{\text{eff}}^2 - I_{1 \text{ eff}}^2}}{I_{1 \text{ eff}}} \times 100$$

THD_i : taux de distorsion du courant (noté aussi $T_{\text{DHi}} \%$)
(%) ; $I_{1 \text{ eff}}$: fondamental.

$$\star \text{THD}_u = \frac{\sqrt{U_{\text{eff}}^2 - U_{1 \text{ eff}}^2}}{U_{1 \text{ eff}}} \times 100$$

Même définition pour la tension.

$$\text{THD}_i \approx \frac{\sqrt{I_{3 \text{ eff}}^2 + I_{5 \text{ eff}}^2 + I_{7 \text{ eff}}^2 + \dots}}{I_{1 \text{ eff}}} \times 100$$

$$\text{THD}_u \approx \frac{\sqrt{U_{3 \text{ eff}}^2 + U_{5 \text{ eff}}^2 + U_{7 \text{ eff}}^2 + \dots}}{U_{1 \text{ eff}}} \times 100$$

Formes équivalentes avec les seuls harmoniques de rangs impairs : moins précise, car on ne prend généralement pas en compte tous les harmoniques (seulement les premiers rangs relevés).

Validité : signal sans valeur moyenne ($I_{\text{eff}}^2 = I_{1 \text{ eff}}^2 + I_{2 \text{ eff}}^2 + \dots$).

Puissances en régime déformé

☞ Seuls les termes de **même fréquence** produisent de la puissance : les harmoniques du signal déformé n'interviennent ni dans P ni dans Q .

Cas 1 : courant sinusoïdal, tension déformée

$$\star P = U_{1 \text{ eff}} I_{\text{eff}} \cos \Phi_1 \quad Q = U_{1 \text{ eff}} I_{\text{eff}} \sin \Phi_1$$

Cas 2 (réseau) : tension sinusoïdale, courant déformé

$$\star P = U_{\text{eff}} I_{1 \text{ eff}} \cos \Phi_1 \quad Q = U_{\text{eff}} I_{1 \text{ eff}} \sin \Phi_1$$

Φ_1 : déphasage entre $u(t)$ et le fondamental de $i(t)$ (rad).

Puissance apparente et puissance déformante

$$\star S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

S en VA, avec les valeurs efficaces vraies ; D : puissance déformante (VAD).

☞ En triphasé : $P = \sqrt{3} U I_1 \cos \Phi_1$, $Q = \sqrt{3} U I_1 \sin \Phi_1$,
 $S = \sqrt{3} U I$ (U tension composée).

Facteur de puissance et facteur de déplacement

$$\star f_p = \frac{P}{S}$$

Définition générale (sans unité).

$$\star f_d = \cos \Phi_1$$

f_d : facteur de déplacement (DPF) : cosinus du déphasage entre $u(t)$ et le fondamental de $i(t)$.

$$\star f_p = \frac{f_d}{\sqrt{1 + \text{THD}_i^2}} = \frac{\cos \Phi_1}{\sqrt{1 + \text{THD}_i^2}}$$

THD_i en valeur décimale.

Validité : cas 2 (tension sinusoïdale). En régime déformé, $f_p \neq \cos \Phi_1$.

☞ Améliorer f_p : réduire Q (condensateurs) et réduire D (filtrage des harmoniques).

Filtrage des harmoniques

☞ Avec une batterie de condensateurs, on ajoute des selfs anti-harmoniques en série (risque de résonance).

Filtre passif LC accordé

$$\star f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

f_0 : fréquence d'accord (Hz) ; rang filtré : $n = f_0/50$ Hz.

Neutre et harmoniques de rang 3

$$I_N = 3 I_{3 \text{ eff}}$$

Les harmoniques de rang 3 (et multiples) des trois phases sont en phase : ils s'additionnent dans le neutre.

☞ Un couplage Dy ou Yz arrête les harmoniques de rang multiple de 3 ; inductances de ligne et filtres actifs réduisent les autres.

Grandeurs mécaniques et rendement

$$\star P_m = C \times \Omega \quad \Omega = \frac{\pi}{30} \times N = \frac{2\pi N}{60}$$

C : moment du couple ($N \cdot m$) ; Ω : vitesse angulaire ($rad \cdot s^{-1}$) ; N : fréquence de rotation ($tr \cdot min^{-1}$).

$$C = F \times r$$

F : force tangentielle (N) ; r : distance à l'axe (m).

$$\star \text{moteur : } \eta = \frac{P_u}{P_a} \quad \text{génératrice : } \eta = \frac{P_e}{P_m}$$

$$P_e = U I \text{ (continu)} \quad P_e = \sqrt{3} U I \cos \Phi \text{ (triphasé)}$$

Démarrage et point de fonctionnement

$$\star \text{démarrage : } C_d > C_r \quad \text{régime établi : } C_u = C_r$$

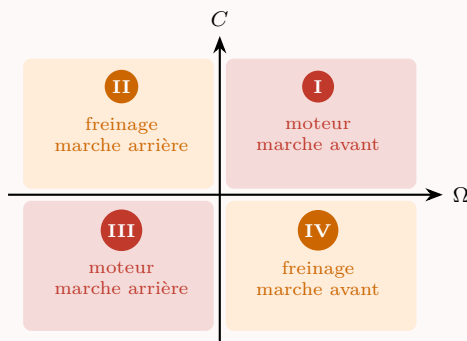
C_d : couple de démarrage (à $\Omega = 0$) ($N \cdot m$) ; C_r : couple résistant de la charge.

Comparatif des moteurs

	Avantages	Inconvénients
MCC	large plage de vitesse (réglée par U), fort couple de démarrage	balais et collecteur (entretien, coût), limitée à 1 MW environ
MAS	robuste, peu coûteuse, peu d'entretien, démarrage direct possible	fort courant de démarrage, vitesse liée à la charge, absorbe du réactif
MS	$N = N_s$ fixe, très bon rendement, f_p réglable par I_{exc}	ne démarre pas seule, risque de décrochage, coût

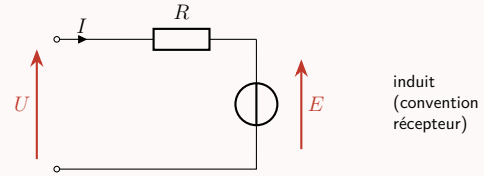
Réversibilité et quatre quadrants

☞ Une machine électrique est **réversible** : elle peut fonctionner en moteur (énergie électrique $\rightarrow$ mécanique) ou en génératrice / frein (énergie mécanique $\rightarrow$ électrique). Le signe de $P_m = C \Omega$ indique le mode.



☞ Quadrants I et III : $C \Omega > 0$, fonctionnement **moteur**. Quadrants II et IV : $C \Omega < 0$, **freinage** (génératrice, récupération d'énergie si le convertisseur est réversible).

Machine à courant continu (excitation indépendante)



$$\star E = k \Omega \quad C_{em} = k I$$

E : f.é.m. (V) ; k : constante de la machine ($V \cdot s \cdot rad^{-1}$) (ou $N \cdot m \cdot A^{-1}$) ; I : courant d'induit (A).

$$\star U = E + R I \quad \Omega = \frac{U - R I}{k}$$

R : résistance de l'induit (Ω) ; au démarrage ($E = 0$) : $I_d = U/R$.

Validité : flux inducteur constant (I_{exc} constant ou aimants permanents), régime établi.

☞ I est imposé par la charge mécanique ; U règle la vitesse.

MCC : bilan de puissances (moteur)

$$\text{absorbée : } P_a = U I + U_{exc} I_{exc}$$

$$P_{j1} = R I^2 \text{ (induit)} \\ P_{j2} = r I_{exc}^2 = U_{exc} I_{exc}$$

$$\text{électromagnétique : } P_{em} = E I = C_{em} \Omega$$

$$P_c = P_{fer} + P_{méca} = C_p \Omega \\ \text{(pertes collectives)}$$

$$\text{utile : } P_u = C_u \Omega$$

$$P_u = P_a - P_{j1} - P_{j2} - P_c \quad C_{em} = C_u + C_p$$

$$\star \eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{C_u \Omega}{U I + U_{exc} I_{exc}}$$

r : résistance de l'inducteur (Ω) ; C_p : couple de pertes.

Machine asynchrone (MAS) : vitesses

$$\star N_s = \frac{60 f}{p} \quad \Omega_s = \frac{2\pi f}{p}$$

N_s : vitesse de synchronisme ($tr \cdot min^{-1}$) ; f : fréquence des courants statoriques (Hz) ; p : nombre de paires de pôles.

$$\star g = \frac{N_s - N}{N_s} \quad N = (1 - g) N_s$$

g : glissement (souvent quelques %) ; $N < N_s$ en moteur.

☞ Couplage sur le réseau : comme pour tout récepteur triphasé (chapitre 2). Démarrage direct : $I_d \approx 5 \text{ à } 8 I_n$.

MAS : bilan de puissances et rendement

$$\text{absorbée : } P_a = \sqrt{3} UI \cos \Phi$$

$$\rightarrow \text{satur : } P_{js} = \frac{3}{2} R_a I^2 \text{ et } P_{fs}$$

$$\text{transmise : } P_{tr} = C_{em} \Omega_s$$

$$\rightarrow \text{rotor : } P_{jr} = g P_{tr}$$

$$\text{mécanique : } P_M = (1 - g) P_{tr} = C_{em} \Omega$$

$$\rightarrow \text{mécaniques : } P_{méca}$$

$$\text{utile : } P_u = C_u \Omega$$

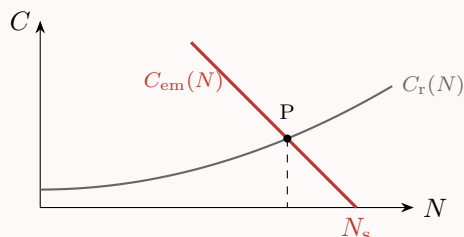
$$\star P_{jr} = g P_{tr} \quad P_{tr} = P_a - P_{js} - P_{fs}$$

R_a : résistance mesurée entre deux bornes du stator (Ω) ; I : courant de ligne ; pertes fer rotor négligées.

$$\star \eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{C_u \Omega}{\sqrt{3} UI \cos \Phi}$$

MAS : caractéristique mécanique

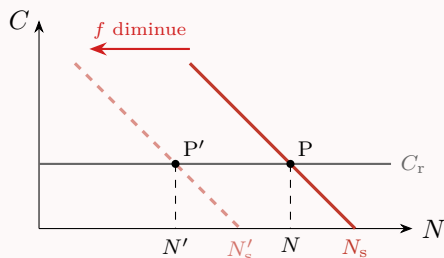
Partie utile de $C_{em}(N)$: droite passant par $(N_s; 0)$ et $(N_n; C_{un})$. Point de fonctionnement P : $C_{em} = C_r$.



$$\star C_{un} = \frac{P_{un}}{\frac{\pi}{30} N_n}$$

N_n , P_{un} : vitesse et puissance utile nominales (plaque signalétique).

Variation de vitesse à U/f constant



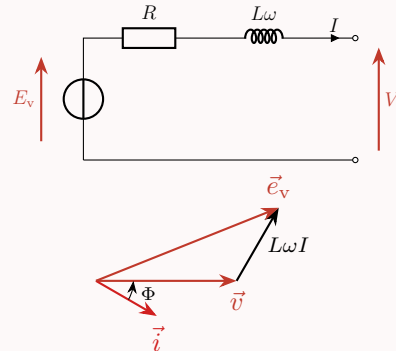
En diminuant f (avec U/f constant), $N_s = \frac{60f}{p}$ diminue : la partie utile de $C_{em}(N)$ glisse **vers la gauche**, parallèlement à elle-même (même pente, même couple maximal). À C_r fixe, le point de fonctionnement passe de P à P' : la vitesse diminue de $N_s - N'_s$, le glissement en vitesse $N_s - N$ restant le même.

Machine synchrone (MS)

$$\star N = N_s = \frac{60f}{p}$$

La vitesse est rigoureusement liée à la fréquence (inducteur : rotor ; induit : stator).

Modèle de Behn-Eschenburg (alternateur, étoile, par phase)



$$\star e_v = v + R i + j L \omega i$$

E_v : f.é.m. à vide (V) ; V : tension simple (V) ; $L\omega$: réactance synchrone (Ω) ; R souvent négligée (diagramme ci-dessus).

Validité : machine non saturée ; en convention moteur, on inverse le sens de I .

Essais à vitesse nominale

$$\star E_v = k_1 I_{exc} \quad I_{cc} = k_2 I_{exc}$$

À vide : $E_v = V$; en court-circuit : I_{cc} proportionnel à I_{exc} .

$$\star Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{E_v}{I_{cc}} = \frac{k_1}{k_2}$$

Z : impédance synchrone (Ω), à même courant d'excitation.

$$L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

Bilan de puissances (alternateur)

$$\text{absorbée (mécanique) : } P_m = C_m \Omega$$

$$\rightarrow P_{jr} = U_{exc} I_{exc} \text{ (rotor) ; } P_c \text{ (collectives)}$$

$$\rightarrow P_{js} = 3RI^2 \text{ (stator)}$$

$$\text{utile : } P_e = \sqrt{3} UI \cos \Phi$$

$$P_m = C_m \Omega = P_e + P_{js} + P_{jr} + P_c$$

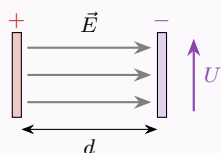
$$P_{js} = 3RI^2 \text{ (stator) ; } P_{jr} = U_{exc} I_{exc} = r I_{exc}^2 \text{ (rotor) ; } P_c = P_{fer} + P_{méca}.$$

$$\star \eta = \frac{P_e}{P_m} = \frac{\sqrt{3} UI \cos \Phi}{\sqrt{3} UI \cos \Phi + P_{js} + P_{jr} + P_c}$$

Champ électrique

$$\star F = qE$$

F : force électrique (N) ; q : charge (C) ; E : champ électrique ($V \cdot m^{-1}$).



$$\star E = \frac{U}{d}$$

Champ uniforme entre deux plaques parallèles ; U : tension (V) ; d : distance entre les plaques (m).

☞ $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C (charge élémentaire) ;
1 kV/mm = 10^6 V/m.

Rigidité diélectrique

$$\star U_c = E_c \times d$$

U_c : tension de claquage (V) ; E_c : rigidité diélectrique de l'isolant ($V \cdot m^{-1}$) ; d : épaisseur (m).

Isolant	air sec	papier kraft	huile de transfo.	PVC
E_c (kV/mm)	3	8	12	25

Validité : au-delà de E_c , l'isolant devient conducteur (arc électrique).

Induction électromagnétique

Principe de l'induction

☞ Une bobine placée dans un champ magnétique **variable** (aimant en mouvement, courant alternatif dans une autre bobine, bobine qui tourne) voit apparaître une tension induite à ses bornes : c'est le principe de l'alternateur et du transformateur. Un aimant immobile n'induit rien.

Loi de Faraday

☞ La tension induite est d'autant plus grande que le champ varie **vite** (fréquence, vitesse de rotation) et que la bobine comporte de **spires**. Elle est alternative si le champ est alternatif.

Loi de Lenz

☞ Le courant induit (circuit fermé) a un sens tel qu'il **s'oppose à la cause** qui lui donne naissance : il freine le mouvement ou repousse l'aimant. Circuit ouvert : tension induite mais pas de courant.

Courants de Foucault

☞ Dans une pièce métallique massive soumise à un champ variable, des courants induits circulent en boucles dans la masse : échauffement (pertes) et freinage. Utilisations : plaque à induction, freins de poids lourds, compteurs ; à éviter dans les circuits magnétiques (tôles feuilletées et isolées).

Champ magnétique

☞ $\vec{B}$: direction et sens donnés par une aiguille aimantée (du sud vers le nord de l'aiguille) ; B en tesla (T), mesuré au teslamètre (sonde à effet Hall). Les lignes de champ sortent par le pôle nord d'un aimant.



$$\star B = k \times I$$

Champ créé par un courant : proportionnel à l'intensité, change de sens avec elle.

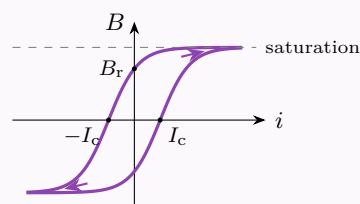
☞ Un noyau de fer multiplie le champ par plusieurs centaines (électroaimant, champ « forcé »).

Ordres de grandeur

Source	B
champ terrestre (France)	$\approx 47 \mu T$
bobine sans noyau (500 spires, 1 A)	$\approx 3 mT$
aimant ferrite / néodyme (au contact)	0,08 T / 0,45 T
électroaimant à noyau de fer	0,6 T à 1,5 T
entrefer d'une machine électrique	$\approx 1 T$
IRM médicale	1,5 T à 3 T

Matériaux ferromagnétiques et pertes fer

☞ **Définition** : un matériau ferromagnétique (fer, nickel, cobalt, ferrites) s'aimante fortement dans un champ magnétique : il canalise les lignes de champ et multiplie le champ par plusieurs centaines.



☞ Cycle d'hystérésis $B(i)$: saturation ($\approx 1,5$ T pour le fer) ; champ rémanent B_r (à $i = 0$) ; intensité de démagnétisation I_c (pour $B = 0$). Matériau **doux** : cycle étroit (circuits magnétiques) ; matériau **dur** : cycle large (aimants).

$$\star P_{\text{fer}} = P_{\text{hyst}} + P_{\text{Foucault}}$$

P_{fer} : pertes fer (magnétiques) (W).

$$P_{\text{hyst}} \propto f \times (\text{aire du cycle})$$

☞ Remèdes : matériau doux (tôles fer-silicium) contre l'hystérésis ; circuit feuilleté (tôles isolées de 0,3 mm à 0,5 mm) ou ferrites contre les courants de Foucault. À tension constante, P_{fer} est constante (mesurée par l'essai à vide).

Énergie et rayonnement

Modélisation du rayonnement

☞ **Dualité onde-corpuscule** : un même rayonnement se décrit par deux modèles complémentaires. Le **modèle ondulatoire** (onde électromagnétique) s'utilise pour la propagation : antennes, réflexion, diffraction, interférences. Le **modèle corpusculaire** (photons, grains d'énergie sans masse) s'utilise pour les échanges d'énergie entre lumière et matière : raies des spectres, effet photoélectrique, cellules photovoltaïques.

$$\star \lambda = \frac{c}{f} = c \times T$$

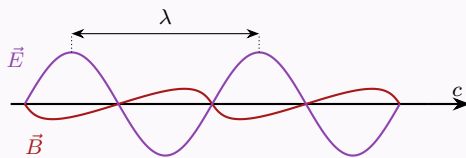
λ : longueur d'onde (m) ; f : fréquence (Hz) ; $c = 3,00 \times 10^8$ m/s (vide, air).

$$\star E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

E : énergie d'un photon (J) ; $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J · s (constante de Planck).

☞ $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19}$ J.

Structure d'une onde électromagnétique



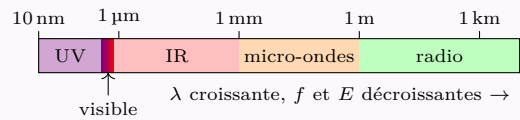
☞ $\vec{E}$ (V/m) et $\vec{B}$ (T) : même fréquence, en phase, perpendiculaires entre eux et à la propagation (onde transversale).

$$E \approx \frac{\sqrt{30 \cdot P}}{d}$$

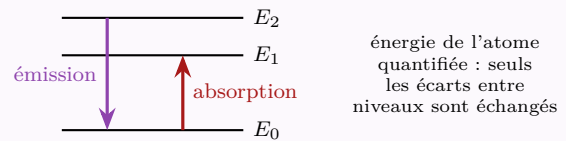
Champ à la distance d (m) d'une source de puissance P (W) : E augmente avec $\sqrt{P}$, diminue en $1/d$ (ordre de grandeur, loin de l'antenne).

Domaines des ondes électromagnétiques

Domaine	λ (vide)	f	photon
ondes radio	$> 1 \text{ m}$	$< 300 \text{ MHz}$	$< 1,2 \text{ peV}$
micro-ondes	$1 \text{ mm à } 1 \text{ m}$	$0,3 \text{ à } 300 \text{ GHz}$	$\approx 10^{-5} \text{ eV}$
infrarouge	$780 \text{ nm à } 1 \text{ mm}$	$0,3 \text{ à } 385 \text{ THz}$	$0,001 \text{ à } 1,6 \text{ eV}$
visible	$380 \text{ nm à } 780 \text{ nm}$	$385 \text{ THz à } 790 \text{ THz}$	$1,6 \text{ eV à } 3,3 \text{ eV}$
ultraviolet	$10 \text{ nm à } 380 \text{ nm}$	$> 790 \text{ THz}$	$> 3,3 \text{ eV}$



Photon, énergie d'un photon



$$\star \Delta E = E_{\text{haut}} - E_{\text{bas}} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Chaque transition donne une raie de longueur d'onde précise : spectre de raies, « signature » de l'élément. Raies d'émission et d'absorption d'un élément : mêmes λ .

Les quatre familles de convertisseurs

Convertisseur	Conversion	Grandeur de réglage
redresseur	alternatif → continu	angle α (thyristors)
hacheur	continu → continu	rapport cyclique α
onduleur	continu → alternatif	fréquence, indice m
gradateur	alternatif → alternatif	angle α ou T_{on}

☞ Rendement élevé (95 % à 99 %) : les interrupteurs ne dissipent presque rien.

Valeur moyenne et valeur efficace

$$\star \langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Mesurée au voltmètre en position DC.

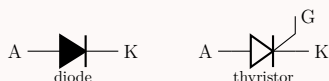
$$\star U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$$

Mesurée avec un appareil TRMS en position AC+DC.

Signal	$\langle u \rangle$	U_{eff}
sinusoïde	0	$U_{max}/\sqrt{2}$
simple alternance	U_{max}/π	$U_{max}/2$
double alternance	$2U_{max}/\pi$	$U_{max}/\sqrt{2}$
créneau 0 / E (rapport α)	αE	$\sqrt{\alpha} E$

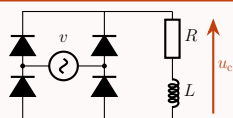
Interrupteurs

☞ Interrupteur parfait : fermé ($v = 0$) ou ouvert ($i = 0$), donc $p = v i = 0$.



☞ Diode : passante si $i_{AK} > 0$, bloquée si $v_{AK} < 0$.
Thyristor : amorcé par la gâchette si $v_{AK} > 0$, bloqué quand i s'annule. IGBT, MOSFET : entièrement commandés. Diode réelle : pertes $p \approx V_{seuil} I$ ($V_{seuil} \approx 0,7 \text{ V}$ à 1 V).

Redressement monophasé (pont PD2)



$$\star \text{ diodes : } \langle u_c \rangle = \frac{2V_{max}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V \approx 0,9 V$$

V : tension efficace du réseau (V) ; $u_c(t) = |v(t)|$; fréquence de u_c : $2f$.

$$\star \text{ thyristors : } \langle u_c \rangle = \frac{2V_{max}}{\pi} \cos \alpha$$

α : angle de retard à l'amorçage (rad).

Validité : conduction continue (charge très inductive).

$\alpha < 90^\circ$: redresseur ; $\alpha > 90^\circ$: $\langle u_c \rangle < 0$, onduleur assisté.

Redressement triphasé (pont PD3)

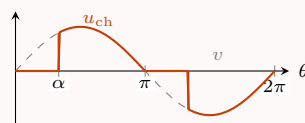
$$\star \langle u_c \rangle = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} U \cos \alpha \approx 1,35 U \cos \alpha$$

U : tension composée efficace (V) ; diodes : $\alpha = 0$ ($\approx 540 \text{ V}$ sur le réseau 400 V) ; ondulation à $6f = 300 \text{ Hz}$.

Validité : conduction continue.

Gradateur

Commande par angle de phase (charge résistive)



$$\star U_{ch} = V \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}} \quad P = \frac{U_{ch}^2}{R}$$

U_{ch} : tension efficace aux bornes de la charge (V) ; V : tension efficace du réseau ; α en radians.

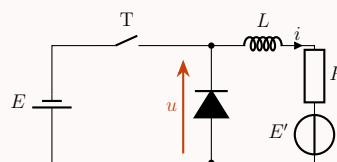
Commande par train d'ondes

$$\star P = \frac{T_{on}}{T_c} \times P_{max}$$

T_{on} : durée de conduction (périodes entières) (s) ; T_c : durée du cycle (s).

Validité : charges à forte inertie thermique (chauffage).

Hacheur série (abaisseur)



$$\star \alpha = \frac{t_{fermeture}}{T} \quad \langle u \rangle = \alpha E$$

α : rapport cyclique ($0 \leq \alpha \leq 1$) ; $T = 1/f$: période de découpage (s).

$$\langle u \rangle = E' + R \langle i \rangle$$

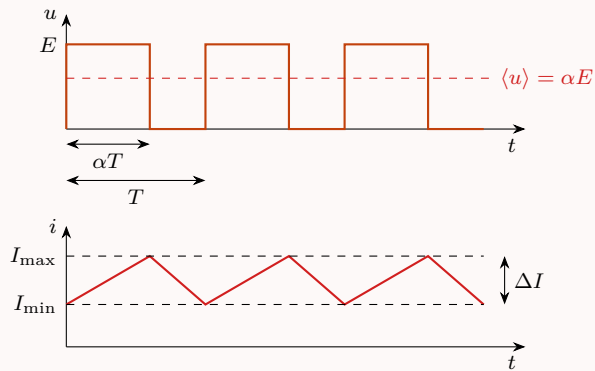
car $\langle u_L \rangle = 0$ en régime établi ; moteur : $E' = k\Omega \approx \alpha E$.

$$\star \Delta I = I_{max} - I_{min} = \frac{\alpha(1-\alpha)E}{Lf}$$

ΔI : ondulation crête à crête du courant (A) ; f : fréquence de découpage (Hz).

$$\Delta I_{max} = \frac{E}{4Lf} \quad \text{pour } \alpha = 0,5$$

Validité : conduction continue, résistance négligée pour le calcul de ΔI .

Hacheur série : chronogrammes

☞ T fermé ($0 < t < \alpha T$) : $u = E$ et i croît ; D conduit (roue libre) : $u = 0$ et i décroît.

Onduleur**Commande pleine onde (créneau $\pm E$)**

$$\star U_{\text{eff}} = E \quad U_{1\text{ eff}} = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \approx 0,9 E$$

$U_{1\text{ eff}}$: valeur efficace du fondamental.

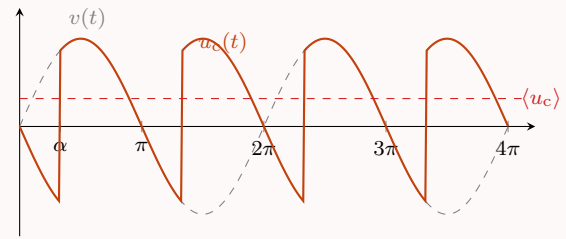
$$U_n = \frac{U_1}{n} \quad (n \text{ impair})$$

Harmoniques importants : THD $\approx 48\%$.

Commande MLI

$$\star U_{1\text{ max}} = m \times E \quad m = \frac{V_{\text{ref,max}}}{V_{\text{p,max}}}$$

m : indice de modulation (0 à 1) ; harmoniques rejetés autour de $f_{\text{déc}}$ et de ses multiples.

Pont PD2 à thyristors : chronogramme

☞ Abscisse : $\theta = \omega t$. Conduction continue : chaque paire de thyristors conduit de α à $\alpha + \pi$; u_c devient négative après le passage par zéro de v . Ici $\alpha = 60^\circ$: $\langle u_c \rangle = \frac{2V_{\text{max}}}{\pi} \times 0,5$.

Puissance transmise à la charge

$$\star P = \langle u_c \rangle \times I_c$$

Charge parcourue par un courant constant I_c (bien lissé) ; P : puissance moyenne (W).

$$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} \quad P = R I_{\text{eff}}^2$$

Charge résistive : on utilise les valeurs **efficaces**.

Validité : ne jamais calculer P avec $\langle u \rangle$ $\langle i \rangle$ si le courant n'est pas constant.

Masse volumique et pression

$$\star \rho = \frac{m}{V}$$

ρ : masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ; m : masse (kg) ; V : volume (m^3).

☞ $\rho_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 1 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$; $\rho_{\text{air}} \approx 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
liquides incompressibles (ρ constante), gaz compressibles.

$$\star p = \frac{F_p}{S}$$

p : pression (Pa) ; F_p : force pressante (N) ; S : surface (m^2).

$$\star p_{\text{abs}} = p_{\text{atm}} + p_{\text{rel}}$$

$p_{\text{abs}} > 0$ toujours ; $p_{\text{rel}} < 0$: dépression ;

$p_{\text{atm}} \approx 1\,013,25 \text{ hPa} \approx 1 \text{ bar}$.

☞ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$; $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Statique des fluides

$$\star p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$$

z : altitude (axe vertical ascendant) (m) ; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
 $\rho g z$: énergie potentielle volumique ($\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$).

Validité : fluide incompressible au repos.

$$p_B - p_A = \rho g (z_A - z_B) = \rho g h$$

h : profondeur de B sous A (la pression augmente de $\approx 1 \text{ bar}$ tous les 10 m d'eau).

Transmission de pression (vérin, pont élévateur)

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_1 = F_2 \times \frac{S_1}{S_2}$$

Pistons à la même altitude.

Débits et conservation du débit

$$\star Q_v = S \times v \quad Q_m = \rho \times Q_v$$

Q_v : débit volumique ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) ; Q_m : débit massique ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$) ; v : vitesse moyenne ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Section d'une conduite circulaire de diamètre D .

$$\star v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad v_2 = v_1 \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

Diviser le diamètre par 2 multiplie la vitesse par 4.

Validité : écoulement stationnaire d'un fluide incompressible.

☞ $1 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1} = \frac{1}{3600} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$;

$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Éoliennes

$$\star P_{\text{vent}} = \frac{1}{2} \rho S v^3 \quad P_m = C_p P_{\text{vent}}$$

$S = \pi D^2/4$: surface balayée par les pales (m^2) ; v : vitesse du vent en amont ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ; C_p : coefficient de puissance.

Validité : limite de Betz : $C_p \leq 0,59$ (en pratique 35 % à 45 %).

Relation de Bernoulli

$$\star p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Conservation de l'énergie volumique ($\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$) : pression + potentielle + cinétique.

Validité : fluide parfait (non visqueux), incompressible, écoulement stationnaire, sans machine entre A et B.

Tube de Pitot ($v_B = 0$, point d'arrêt)

$$v_A = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}} = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

Tube de Venturi (section S , col de section s)

$$v_A = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho \left(\frac{S^2}{s^2} - 1 \right)}}$$

Fluide réel : viscosité, Reynolds, pertes de charge

☞ **Viscosité** : résistance d'un fluide à l'écoulement, due aux frottements internes entre ses couches (le miel est plus visqueux que l'eau). Elle est à l'origine des pertes de charge ;
 η : viscosité dynamique ($\text{Pa} \cdot \text{s}$) (eau : $\approx 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$).

$$\star R_e = \frac{\rho v L}{\eta}$$

Nombre de Reynolds (sans unité) ; L : longueur caractéristique (diamètre de la conduite).

☞ $R_e < 2\,000$: laminaire ; $2\,000 < R_e < 3\,000$: transitoire ;
 $R_e > 3\,000$: turbulent.

$$\star \Delta p_{\text{pertes}} = \Delta p_{\text{rég}} + \Delta p_{\text{sing}} \quad H_{\text{pertes}} = \frac{\Delta p_{\text{pertes}}}{\rho g}$$

Pertes régulières (longueur droite) et singulières (coudes, vannes...) ; H_{pertes} en m.

Bernoulli généralisée, pompes

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \frac{P_h}{Q_v} - \Delta p_{\text{pertes}} = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

P_h : puissance hydraulique échangée (W) : > 0 pour une pompe, < 0 pour une turbine.

$$\star HMT = \frac{p_B - p_A}{\rho g} + (z_B - z_A) + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} + H_{\text{pertes}}$$

HMT : hauteur manométrique totale (m).

$$\star P_h = Q_v \rho g HMT \quad P_{\text{abs}} = \frac{P_h}{\eta}$$

P_{abs} : puissance absorbée par la pompe (W) ; η : rendement.

☞ Pompes en série : les HMT s'ajoutent ; en parallèle : les débits s'ajoutent.

Dimensionnement d'une pompe

☞ 1. Débit Q_v voulu ; 2. HMT à ce débit (Bernoulli généralisée) ; 3. point de fonctionnement (courbe pompe $\cap$ courbe réseau) proche du rendement maximal ; 4. moteur de puissance $\geq P_{\text{abs}}$.

Forces usuelles

$$\star P = m \times g$$

P : poids (N) ; m : masse (kg) ; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\Pi = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{im}} \times g$$

Poussée d'Archimède (verticale, vers le haut) ; V_{im} : volume immergé (m^3).

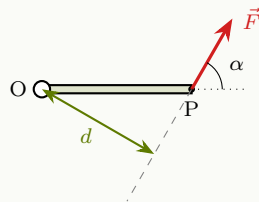
$$F = k \times \Delta l$$

Loi de Hooke (dynamomètre) ; k : raideur ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) ; Δl : allongement (m).

Moment d'une force, couple

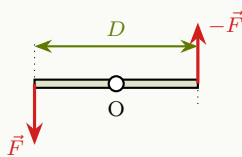
$$\star M_{\Delta}(\vec{F}) = d \times F = OP \times F \times \sin \alpha$$

d : bras de levier (distance axe – ligne d'action) (m) ;
 α : angle entre OP et $\vec{F}$;
 M en $\text{N} \cdot \text{m}$.



$$\star C = D \times F$$

Couple de deux forces opposées, de même intensité F , dont les lignes d'action sont distantes de D (indépendant du point O).



Cinématique de translation

$$\star \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

v : vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ; a : accélération ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Mouvement rectiligne uniforme

$$a = 0 \quad d = v \times \Delta t$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$\star v(t) = at + v_0 \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

v_0, x_0 : vitesse et position initiales.

Principe fondamental de la dynamique

$$\star \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \times \vec{a}$$

En translation. Si le mouvement est rectiligne uniforme ou si le solide est immobile : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

$$\star J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r$$

En rotation ; J : moment d'inertie ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$) ; C_m, C_r : couples moteur et résistant ($\text{N} \cdot \text{m}$).

☞ $C_m = C_r$: rotation uniforme ; $C_m > C_r$: accélération.

Cinématique de rotation

$$\star \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{30} \times N \quad v = r \times \Omega$$

Ω : vitesse angulaire ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ; N : vitesse de rotation ($\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$) ; v : vitesse d'un point à la distance r de l'axe ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

$$\Gamma = \frac{d\Omega}{dt}$$

Γ : accélération angulaire ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$) ; démarrage à Γ constante : $\Omega = \Gamma t$.

Énergie, travail et puissance en rotation

$$\star E_c = \frac{1}{2} J \Omega^2$$

E_c : énergie cinétique de rotation (J).

$$\text{disque plein : } J = \frac{1}{2} m R^2 \quad \text{anneau : } J = m R^2$$

R : rayon (m).

$$\star W = C \times \theta \quad P = C \times \Omega$$

θ : angle de rotation (rad) ; C : moment du couple ($\text{N} \cdot \text{m}$).

Charges mécaniques et transmission

Charge	Couple résistant	Allure de $C_r(\Omega)$
levage	$C_r = \text{cste}$	horizontale
ventilation, pompe	$C_r = k \Omega^2$	parabole
vis d'Archimède	$C_r = k \Omega$	droite
fraisage, enroulement	$C_r = k/\Omega$	hyperbole

Réducteur de vitesse

$$\star k = \frac{1}{r} = \frac{\Omega_m}{\Omega_{\text{charge}}} = \frac{C_{\text{charge}}}{C_m}$$

$k > 1, r < 1$; la puissance se conserve :

$$C_m \Omega_m = C_{\text{charge}} \Omega_{\text{charge}}$$

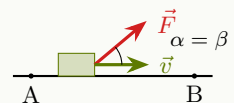
Validité : réducteur sans pertes ; sinon $P_{\text{charge}} = \eta P_m$.

Énergies, travail, puissance

$$\star E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad E_p = m g h \quad E_m = E_c + E_p$$

Énergies cinétique, potentielle de pesanteur et mécanique (J) ;
 h : altitude (m).

Validité : E_m se conserve en l'absence de frottements.



$$\star W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos \alpha$$

W : travail (J) ; α : angle entre $\vec{F}$ et $\vec{AB}$; $W > 0$: moteur ; $W < 0$: résistant.

$$\star P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \times v \times \cos \beta$$

P : puissance (W) ; β : angle entre $\vec{F}$ et $\vec{v}$.

Piles et accumulateurs

☞ **Pile** : non rechargeable. **Accumulateur** : pile rechargeable (réaction chimique réversible). **Batterie** : association de plusieurs accumulateurs en série et/ou en parallèle (dans le langage courant, on dit souvent « batterie » pour un accumulateur).

☞ Borne – : oxydation (le réducteur cède des électrons) ; borne + : réduction (l'oxydant capte des électrons). Hors de la pile, le courant va de + vers –, les électrons de – vers +.

$$\star U = E - r \times I$$

E : f.é.m. (tension à vide) (V) ; r : résistance interne (Ω) ; I : courant débité (A).

$$\star Q_{\max} = I \times \Delta t_{\max}$$

$Q_{\max}$: capacité (A · h) si $\Delta t_{\max}$ est en heures.

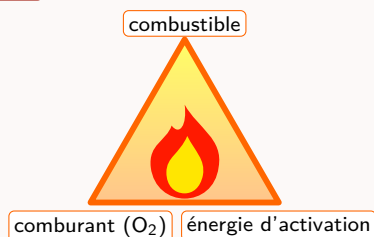
$$\star E_e = Q_{\max} \times E \quad \mathcal{E}_m = \frac{Q_{\max} \times E}{m}$$

E_e : énergie stockée (W · h) ; $\mathcal{E}_m$: énergie spécifique (W · h · kg⁻¹) ; m : masse (kg).

☞ **Cyclabilité** : nombre de cycles charge/décharge que l'accumulateur supporte avant de perdre environ 20 % de sa capacité.

Technologie	Tension	$\mathcal{E}_m$ (W · h · kg ⁻¹)	Cycles
plomb-acide	2 V	30 à 40	300 à 800
Ni-MH	1,2 V	60 à 100	500 à 1 000
Li-ion (NMC)	3,7 V	150 à 250	1 000 à 2 000
LiFePO ₄	3,2 V	90 à 160	2 000 à 5 000

Combustion



☞ **Triangle du feu** : une combustion n'a lieu qu'en présence simultanée d'un combustible, d'un comburant (le dioxygène de l'air) et d'une énergie d'activation (flamme, étincelle, chaleur). Supprimer un des trois côtés éteint le feu.

☞ **Réaction exothermique** : elle libère de l'énergie (chaleur) vers le milieu extérieur : c'est le cas de toute combustion. **Réaction endothermique** : elle absorbe de l'énergie (ex. : électrolyse de l'eau, décomposition du calcaire dans un four à chaux).

Utilisations

☞ Chauffage (chaudières, fours industriels), production d'électricité (centrales thermiques, cogénération, groupes électrogènes), moteurs thermiques (transport).

Dangers et moyens de protection

☞ Combustion incomplète (manque de O₂) : monoxyde de carbone CO, gaz toxique et inodore ⇒ ventilation, entretien des appareils, détecteur de CO. Incendie et explosion (gaz, poussières) ⇒ détecteurs de fumée et de gaz, extincteurs adaptés, stockage séparé des combustibles. Rejet de CO₂ (effet de serre).

Pouvoir calorifique : PCI et PCS

$$\star Q = m \times PCI \quad m = \frac{W}{PCI}$$

Q : chaleur dégagée (J) ; m : masse de combustible (kg) ; PCI : pouvoir calorifique inférieur (J · kg⁻¹) ; W : énergie thermique à produire.

☞ $PCS > PCI$: le PCS inclut la chaleur de condensation de la vapeur d'eau des fumées (chaudière à condensation).

Combustible	bois	éthanol	gazole	méthane
PCI (MJ · kg ⁻¹)	15	29	45	50

☞ 1 kW · h = 3 600 kJ = 3,6 MJ ; propane : $PCI = 12,78 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Température et chaleur

$$\star T = \theta + 273,15$$

T : température absolue (K) ; θ : température (°C) ; un écart de 1 K vaut un écart de 1 °C.

$$\theta_{\text{°F}} = 1,8 \times \theta_{\text{°C}} + 32$$

☞ Chaleur Q : énergie (J) transférée spontanément du corps chaud vers le corps froid.

Énergie interne d'une phase condensée

$$\star \Delta U = Q = m \times c \times (T_f - T_i)$$

c : capacité thermique massique (J · kg⁻¹ · K⁻¹) ; T_i , T_f : températures initiale et finale (K ou °C).

Validité : solide ou liquide, sans changement d'état. $Q > 0$: le corps reçoit de la chaleur.

☞ $c_{\text{eau}} = 4 185 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $c_{\text{glace}} = 2 060 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $c_{\text{vapeur}} = 2 010 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

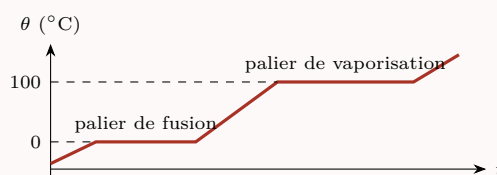
Changement d'état

$$\star \Delta U = Q = m \times L$$

L : énergie massique (chaleur latente) de changement d'état (J · kg⁻¹).

Validité : à pression et température constantes (palier de température).

☞ Eau : $L_{\text{fusion}} = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $L_{\text{vap}} = 2 257 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Fusion, vaporisation : $Q > 0$; solidification, liquéfaction : $Q < 0$.



☞ Sur un palier, θ reste constante : l'énergie reçue sert à changer d'état.

Flux thermique

$$\star \quad \Phi = \frac{Q}{\Delta t} \quad \varphi = \frac{\Phi}{S}$$

Φ : flux thermique (puissance transférée) (W) ; Q : chaleur (J) ; φ : flux surfacique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$).

☞ Trois modes : conduction (sans déplacement de matière), convection (fluide en mouvement), rayonnement (infrarouge, même dans le vide). La chaleur va toujours du chaud vers le froid.

Conduction : loi de Fourier

$$\star \quad \Phi = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{e}$$

λ : conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) ; S : surface (m^2) ; e : épaisseur (m) ; $T_1 > T_2$.

Validité : paroi plane, régime permanent.

Matériau cuivre alu acier béton verre PVC laine de verre

λ 390 220 50 1,75 1 0,17 0,035

λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; air immobile : $\lambda \approx 0,025$.

Résistance thermique

$$\star \quad R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{e}{\lambda S}$$

R_{th} : résistance thermique (K/W) ; analogie : $\Delta T \leftrightarrow U$, $\Phi \leftrightarrow I$, $R_{th} \leftrightarrow R$.

$$\star \quad R = \frac{e}{\lambda}$$

R : résistance surfacique (pour 1 m^2) ($\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$).

Paroi composée (couches en série)

$$R = R_{si} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \dots + R_{se} \quad \varphi = \frac{T_i - T_e}{R}$$

$R_{si} \approx 0,13$ et $R_{se} \approx 0,04 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$: échanges superficiels intérieur et extérieur.

$$U = \frac{1}{R} \quad \Phi = U S \Delta T$$

U : coefficient de transmission de la paroi ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$).

☞ Résistances en série : elles s'additionnent ; en parallèle : $\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_k}$.

Classes d'isolation (CEI 60085)

Classe	A	E	B	F	H
θ_{max} (°C)	105	120	130	155	180

☞ Règle de Montsinger : au-delà, la durée de vie de l'isolant est divisée par 2 tous les 10°C . Puissance nominale garantie pour $\theta_{ambiante} \leq 40^\circ\text{C}$.

Convection

$$\star \quad \Phi = h S (T_s - T_f) \quad R_{th} = \frac{1}{h S}$$

h : coefficient d'échange ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$) ; T_s : surface ; T_f : fluide.

Situation	h ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$)
air, convection naturelle	5 à 15
air, convection forcée (ventilateur)	20 à 150
eau, convection forcée	500 à 10 000

Rayonnement thermique

$$\star \quad \Phi = \varepsilon \sigma S T^4$$

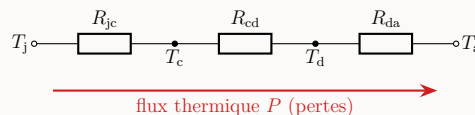
Loi de Stefan-Boltzmann ; $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$; T en K ; ε : émissivité (0 à 1 ; peinture mate $\approx 0,95$, aluminium brut $\approx 0,1$).

$$\star \quad \lambda_{max} T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Loi de Wien ; λ_{max} : longueur d'onde du maximum d'émission.

☞ Une caméra thermique mesure un rayonnement : il faut régler l'émissivité de la surface visée.

Refroidissement d'un composant



$$\star \quad T_j = T_a + P (R_{jc} + R_{cd} + R_{da})$$

T_j : jonction ($^\circ\text{C}$) ; T_a : air ambiant ; P : pertes du composant (W) ; R_{jc} : jonction-boîtier ; R_{cd} : boîtier-dissipateur ; R_{da} : dissipateur-air (K/W).

$$R_{da} \leq \frac{T_{j,max} - T_a}{P} - R_{jc} - R_{cd}$$

Choix du dissipateur ($T_{j,max} \approx 150^\circ\text{C}$ à 175°C).

Armoire électrique et ventilation

☞ **Problème** : les appareils de l'armoire dissipent une puissance P ; si les parois ne suffisent pas à évacuer cette chaleur, on cherche le **débit d'air de ventilation** qui maintient la température intérieure sous $T_{i,max}$ (régulation de la température).

$$T_i - T_e = R_{th} P \quad P_{parois} = \frac{T_{i,max} - T_e}{R_{th}}$$

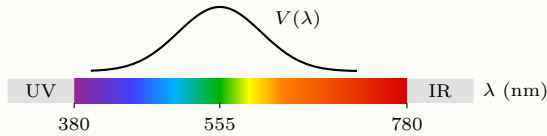
P : puissance dissipée dans l'armoire (W) ; T_i , T_e : températures intérieure et extérieure.

$$\star \quad P_{vent} = P - P_{parois} \quad D_v = 3,1 \frac{P_{vent}}{\Delta T}$$

D_v : débit d'air de ventilation (m^3/h) ; P_{vent} en W ; ΔT en K.

Validité : formule de débit valable au niveau de la mer.

Lumière et sensibilité de l'œil



☞ Domaine visible : 380 nm (violet) < λ < 780 nm (rouge) ; UV en dessous, IR au-dessus. Sensibilité $V(\lambda)$ maximale à 555 nm (jaune-vert).

$$\Phi = 683 \times V(\lambda) \times P_{\text{ray}}$$

Φ : flux lumineux (lm) ; $V(\lambda)$: sensibilité relative de l'œil (0 à 1) ; P_{ray} : puissance rayonnée (W).

☞ Température de couleur T_c : 2 700 K blanc chaud, 4 000 K neutre, 6 500 K froid (bleuté). IRC (R_a) : fidélité des couleurs, de 0 à 100.

Grandeurs photométriques

$$\star \eta = \frac{\Phi}{P}$$

η : efficacité lumineuse (lm/W) ; P : puissance électrique absorbée (W).

$$\Phi = 4\pi I$$

I : intensité lumineuse (cd) ; source émettant uniformément dans tout l'espace.

$$\star E = \frac{\Phi}{S}$$

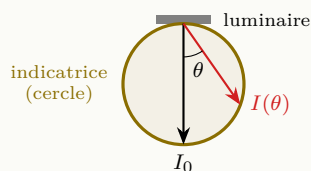
E : éclairement moyen (lx) ; 1 lx = 1 lm/m² ; S : surface éclairée (m²).

$$E = \frac{I \cos \theta}{d^2}$$

Source ponctuelle (loi en 1/d²) ; d : distance source-point (m) ; θ : angle entre le rayon et la normale au plan.

☞ Luminance L (cd/m²) : intensité émise par unité de surface apparente ; c'est ce que voit l'œil (éblouissement, indice UGR).

Indicatrice d'un luminaire



$$\star I(\theta) = I_0 \cos \theta$$

Source lambertienne (diffuseur opale) ; I_0 : intensité dans l'axe (cd).

$$I = I_{\text{lue}} \times \frac{\Phi}{1000}$$

Indicatrice catalogue donnée en cd/klm ; Φ : flux du luminaire (lm).

Sources lumineuses

Technologie	η (lm/W)	Durée de vie (h)	IRC
incandescence	10 à 15	1 000	100
halogène	15 à 25	2 000	100
fluorescente	60 à 100	10 000 à 20 000	80 à 90
LED	100 à 200	25 000 à 50 000	70 à 95

Vérification d'une installation

$$\star E_{\text{moy}} = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_n}{n} \quad U_0 = \frac{E_{\text{min}}}{E_{\text{moy}}}$$

Mesures au luxmètre au centre de n zones de même surface, sur le plan de travail (0,85 m) ; U_0 : uniformité.

Exigences (NF EN 12464-1, extraits)

Local	E_{moy} (lx)	U_0	UGR	R_a
circulations	100	0,40	28	40
salle de classe	300	0,60	19	80
bureau	500	0,60	19	80
atelier (montage moyen)	500	0,60	22	80
travaux fins, contrôle	750 à 1 000	0,70	19	80

Méthode des flux

☞ **But** : déterminer le **nombre de luminaires** à installer dans un local pour obtenir l'éclairement moyen exigé E_{moy} .

$$\star N = \frac{E_{\text{moy}} \times S}{\Phi_L \times U \times M}$$

N : nombre de luminaires ; S : surface du local (m²) ; Φ_L : flux d'un luminaire (lm) ; U : utilance (0,4 à 0,8) ; M : facteur de maintenance ($\approx 0,8$).

$$K = \frac{a b}{h_u (a + b)}$$

K : indice du local (pour lire U dans les tables) ; a, b : dimensions du local ; h_u : hauteur utile luminaires-plan de travail (m).

☞ Arrondir N à l'entier supérieur, puis répartir régulièrement les luminaires.

Consommation d'énergie

$$\star E_e = P \times \Delta t$$

E_e : énergie électrique consommée (kW · h) avec P en kW et Δt (durée d'utilisation) en h.

☞ Économies : LED, détection de présence, gradation selon la lumière du jour (DALI, 1-10 V). Drivers de LED : charges non linéaires (harmoniques de rang 3) ; choisir $f_p > 0,9$.

Architecture



☞ x : grandeur physique mesurée (température, pression, débit...).

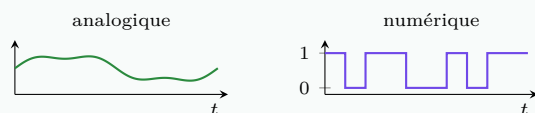
☞ **Capteur** : transforme la grandeur physique en grandeur électrique (résistance, tension...), signal faible et non normalisé.

☞ **Transmetteur** : conditionne ce signal et le convertit en signal **normalisé** transmissible à distance.

Signal analogique ou numérique

☞ **Analogique** : peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, de façon continue ; l'information est dans la **valeur** du signal (ex. 4–20 mA).

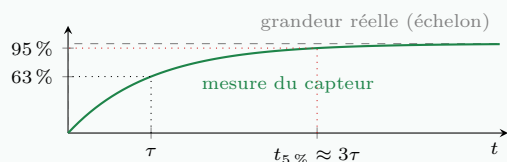
☞ **Numérique** : ne prend qu'un nombre fini de valeurs (codes binaires 0 ou 1) ; l'information est dans la **suite de bits** (ex. bus de terrain).



Temps de réponse d'un capteur

$$\star t_{5\%} \approx 3\tau$$

Réponse à un échelon ; τ : constante de temps (63 %) (s) ; $t_{5\%}$: temps de réponse à 5 %.



☞ Gaine ou tube de protection, masse de l'élément sensible, mauvais contact avec le milieu : τ augmente.

Boucle de courant 4–20 mA

☞ Le transmetteur impose dans la boucle (alimentée en 24 V) un courant proportionnel à la mesure : 4 mA en début d'échelle $x_{\min}$, 20 mA en fin d'échelle $x_{\max}$.

$$\star I = 4 + 16 \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

I : courant de boucle (mA).

$$x = x_{\min} + \frac{I - 4}{16} (x_{\max} - x_{\min}) \quad U = 250 I$$

Lecture par l'automate ; résistance de 250Ω : 1 V à 5 V.

☞ **Zéro vivant** : $I = 0$ signale une coupure de boucle ; hors de 3,8 mA à 20,5 mA : mesure en défaut.

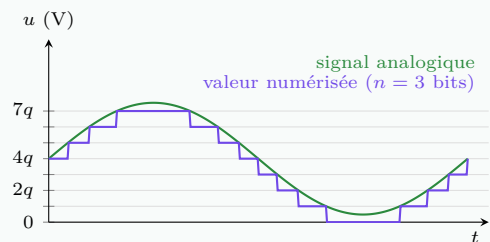
☞ Signaux normalisés : analogiques 4–20 mA, 0–20 mA, 0–10 V ; numériques : HART (superposé au 4–20 mA), bus de terrain (Modbus, Profibus, Profinet, IO-Link).

Numérisation : CAN

☞ Le convertisseur analogique-numérique associe à chaque tension d'entrée un code entier écrit sur n bits. Le quantum est la plus petite variation de tension qu'il peut distinguer.

$$\star q = \frac{PE}{2^n}$$

PE : pleine échelle (V) ; n : nombre de bits (2^n codes).



☞ Ex. : 12 bits, 0 V à 5 V : $q = 5/4096 \approx 1,22 \text{ mV}$.

Échantillonnage : critère de Shannon

☞ Le CAN ne mesure pas en continu : il prélève un échantillon du signal à intervalles réguliers, toutes les T_e secondes.

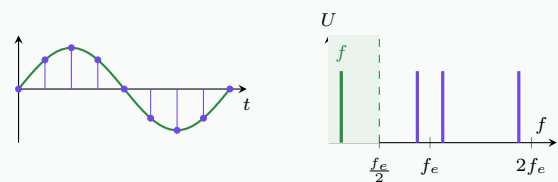
$$f_e = \frac{1}{T_e}$$

f_e : fréquence d'échantillonnage (Hz) ; T_e : période d'échantillonnage (s).

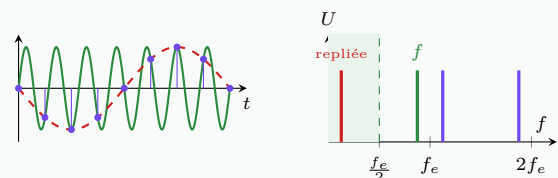
$$\star f_e > 2f_{\max}$$

$f_{\max}$: plus haute fréquence du spectre du signal.

Sans repliement : $f = 1 \text{ Hz}$, $f_e = 8 \text{ Hz} > 2f$



Avec repliement : $f = 7 \text{ Hz}$, $f_e = 8 \text{ Hz} < 2f$

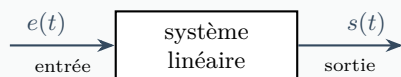


En vert : signal réel ; en violet : échantillons et copies du spectre autour de f_e , $2f_e$; en rouge : signal fictif à $f_e - f = 1 \text{ Hz}$ vu par le CAN.

☞ Sinon, **repliement de spectre** : une raie apparaît à $|f_e - f| < f_e/2$, fausse mesure indétectable. Remède : filtre passe-bas anti-repliement avant le CAN.

Fonction de transfert

$$\star \underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} \quad \underline{T}(p) = \frac{\underline{s}(p)}{\underline{e}(p)} \quad \text{avec } p = j\omega$$



Lois des dipôles et passage en complexe

$$u_R = Ri \quad i = C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\star \frac{ds}{dt} \rightarrow j\omega \underline{s} \quad \frac{d^2s}{dt^2} \rightarrow (j\omega)^2 \underline{s} = -\omega^2 \underline{s}$$

En complexe, la grandeur s est soulignée : $\underline{s}$.

☞ Méthode : 1) loi des mailles ; 2) lois des dipôles ; 3) équation différentielle sous forme canonique ; 4) passage en complexe pour obtenir $T(p)$; 5) réponse temporelle $s(t)$.

Système du 1^{er} ordre

☞ Filtre **passe-bas** du 1^{er} ordre (circuit RC ou RL) : laisse passer les basses fréquences, atténue les hautes.

$$\star T(p) = \frac{T_0}{1 + \tau p}$$

T_0 : amplification statique ; τ : constante de temps (s).

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{T_0 E}{\tau}$$

Forme canonique (échelon d'amplitude E).

$$\star RC : \tau = RC \quad RL : \tau = \frac{L}{R}$$

Sortie aux bornes de C (RC) ou de R (RL) : $T_0 = 1$.

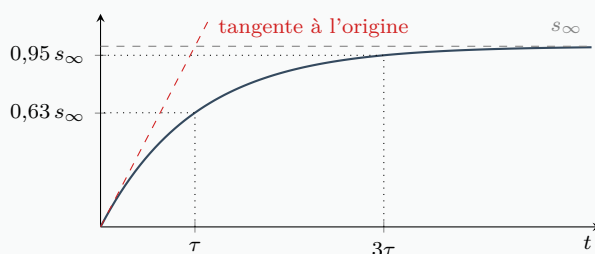
Réponse à un échelon

$$\star s(t) = s_\infty + (s_0 - s_\infty) e^{-t/\tau} \quad s_\infty = T_0 E$$

s_0 : valeur initiale ; s_∞ : valeur finale (régime permanent).

$$s(\tau) = s_0 + 0,63(s_\infty - s_0) \quad t_{5\%} = 3\tau$$

À $t = \tau$: 63 % de la variation ; à $t = 3\tau$: 95 %.



Validité : échelon appliqué à $t = 0$; figure tracée pour $s_0 = 0$.

Système du 2^e ordre

☞ Filtre **passe-bas** du 2^e ordre (circuit RLC série, sortie aux bornes de C).

$$\star T(p) = \frac{T_0}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

ω_0 : pulsation propre ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ; m : coefficient d'amortissement.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 T_0 E$$

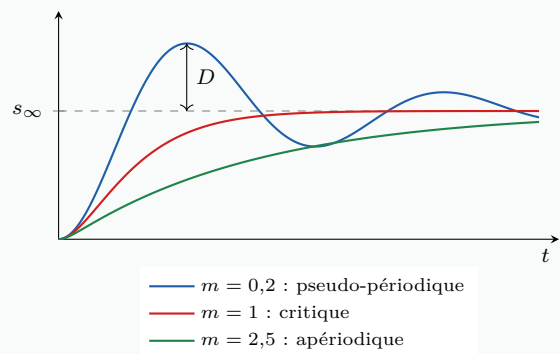
Forme canonique.

Circuit RLC série (sortie aux bornes de C)

$$\star \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$f_0 = \omega_0/2\pi$; $T_0 = 1$; régime critique pour $R = 2\sqrt{L/C}$.

Régimes de la réponse indicielle



☞ $m < 1$: oscillations amorties avec dépassement D ; $m = 1$: réponse la plus rapide sans dépassement ; $m > 1$: pas d'oscillation, montée lente. $m \approx 0,7$: compromis rapidité-dépassement (5 %).

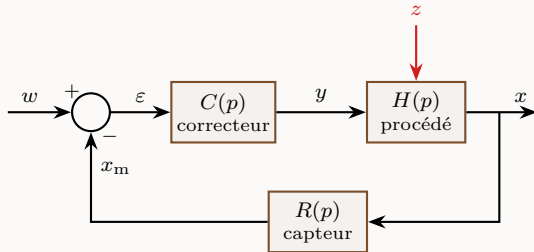
$$\star D_{\%} = \frac{s_{\max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100$$

$s_{\max}$: valeur maximale (premier dépassement) ; s_∞ : valeur finale.

$$D_{\%} = 100 e^{-\pi m / \sqrt{1-m^2}} \quad T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

Dépassement relatif et pseudo-période (pour $m < 1$).

Boucle de régulation



w : consigne (SP) ; x : grandeur réglée, mesure (PV) ; y : commande en % (OUT) ; z : perturbation.

$$\star \quad \varepsilon = w - x$$

Écart calculé par le régulateur.

☞ Régulation : consigne fixe, on compense les perturbations.
Asservissement : la sortie suit une consigne variable.

Fonctions de transfert de la boucle

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Blocs en série : $F(p) = F_1(p) \times F_2(p)$; blocs en parallèle : $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$.

$$\star \quad \text{FTBO}(p) = \frac{X_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) H(p) R(p)$$

Boucle ouverte (on coupe le retour avant le comparateur).

$$\star \quad \text{FTBF}(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{C(p) H(p)}{1 + C(p) H(p) R(p)}$$

Formule de Black : chaîne directe sur $1 + \text{FTBO}(p)$.

$$R(p) = 1 \Rightarrow \text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

Retour unitaire.

Procédé du 1^{er} ordre corrigé

☞ Procédé $H(p) = \frac{K}{1 + T p}$, retour unitaire : $R(p) = 1$.

Correcteur proportionnel $C(p) = K_p$

$$\star \quad \text{FTBO}(p) = \frac{K K_p}{1 + T p}$$

$$\star \quad \text{FTBF}(p) = \frac{K K_p}{1 + T p + K K_p} = \frac{K_{BF}}{1 + T_{BF} p}$$

$$K_{BF} = \frac{K K_p}{1 + K K_p} \quad T_{BF} = \frac{T}{1 + K K_p}$$

☞ Écart statique non nul, d'autant plus petit que K_p est grand.

Correcteur PI $C(p) = K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p}$ avec $T_i = T$

$$\star \quad \text{FTBO}(p) = \frac{K K_p}{T p} \quad \text{FTBF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{T}{K K_p} p}$$

$K_{BF} = 1$: écart statique nul (intégrateur dans la $\text{FTBO}(p)$).

Critères de performance (échelon de consigne)

$$\star \quad \varepsilon_s = w - x_\infty$$

Précision : écart statique (unité de x ou % de la variation de consigne).

$$\star \quad D_1 = \frac{x_{\max} - x_\infty}{x_\infty - x_0} \times 100$$

Amortissement : premier dépassement (%).

☞ Rapidité : $t_5\%$, instant à partir duquel x reste dans $x_\infty \pm 0,05(x_\infty - x_0)$. Stabilité : x tend vers une valeur finale.
Dilemme stabilité-précision.

Identification du procédé

$$\star K = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Gain statique (pente de la caractéristique statique $x = f(y)$), en unité de x par % de commande ; Δy : variation de la commande (échelon appliqué) ; Δx : variation de la grandeur réglée qui en résulte.

☞ Procédé direct ($K > 0$) $\Rightarrow$ régulateur inverse ; procédé inverse ($K < 0$) $\Rightarrow$ régulateur direct.

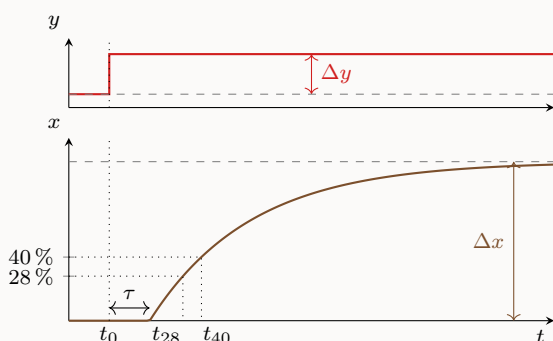
Méthode de Broïda (essai en boucle ouverte)

$$\star H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{1 + T p}$$

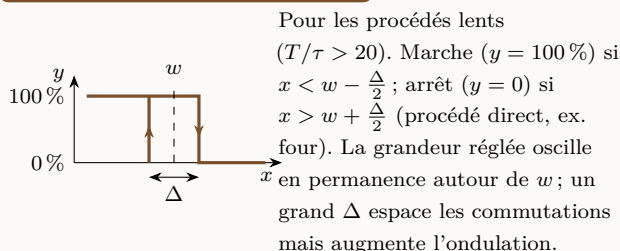
T : constante de temps (s) ; τ : retard pur (s).

$$\star T = 5,5(t_{40} - t_{28}) \quad \tau = 2,8 t_{28} - 1,8 t_{40}$$

t_{28} , t_{40} : instants où $x = x_0 + 0,28 \Delta x$ et $x_0 + 0,40 \Delta x$, comptés depuis l'instant t_0 de l'échelon de commande.



Régulation tout ou rien (TOR)



Correcteur PID

☞ Le correcteur PID élabore la commande y à partir de l'écart ϵ en combinant trois actions : **P**roportionnelle (réagit à l'écart), **I**ntégrale (annule l'écart statique) et **D**érivée (anticipe les variations). Deux structures usuelles :

$$\text{mixte : } C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

$$\text{série : } C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$$

K_p : gain ; T_i : temps d'intégrale (s) ; T_d : temps de dérivée (s).

Action	Stabilité	Rapidité	Précision
P ($K_p \nearrow$)	diminue	augmente	augmente
I ($T_i \searrow$)	diminue	augmente un peu	$\epsilon_s = 0$
D ($T_d \nearrow$)	augmente	augmente	sans effet

Choix et réglage du correcteur (Broïda)

T/τ	> 20	$10 \text{ à } 20$	$5 \text{ à } 10$	$2 \text{ à } 5$	< 2
correcteur	TOR	P	PI	PID	cascade...
Correcteur	K_p	T_i	T_d		
P	$\frac{0,8 T}{K \tau}$	—	—		
PI (série)	$\frac{0,8 T}{K \tau}$	T	—		
PID série	$\frac{0,85 T}{K \tau}$	T	$0,4 \tau$		
PID mixte	$\frac{T/\tau + 0,4}{1,2 K}$	$T + 0,4 \tau$	$\frac{T \tau}{2,5 T + \tau}$		

K_p en % par unité de x (inverse de l'unité de K) ; T_i , T_d en s.

Chaîne ouverte ou boucle fermée

	Chaîne ouverte	Boucle fermée
mesure de x	non	oui (capteur)
perturbations	non corrigées	corrigées
précision	dépend du réglage manuel	bonne ($\epsilon_s = 0$ avec action intégrale)
instabilité	aucun risque	possible si le correcteur est mal réglé

Avantages et inconvénients des correcteurs

	Avantages	Inconvénients
TOR	très simple, peu coûteux	oscillations permanentes autour de w , usure des contacts
P	améliore la rapidité ; réglage simple (un seul paramètre)	écart statique non nul ; trop de gain $\Rightarrow$ dépassement, instabilité
PI	annule l'écart statique (précision)	ralentit la réponse ; risque de dépassement si T_i trop petit
PID	rapide, précis et stable (anticipe grâce à D)	réglage délicat (3 paramètres) ; D amplifie le bruit de mesure

Incertitude de type A (série de mesures)

$$\star \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$\bar{x}$: moyenne : meilleure estimation du mesurande ; n : nombre de mesures.

$$\star s = \sqrt{\frac{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

s : écart-type expérimental (même unité que x) : touche s_x (Casio), S_x (TI), « écart type échantillon » (NumWorks), et non σ_x .

$$\star u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Incertaince-type de la moyenne : 4 fois plus de mesures divisent u par 2.

☞ Environ 68 % des mesures dans $\bar{x} \pm s$ et 95 % dans $\bar{x} \pm 2s$.

Incertitude de type B (mesure unique)

$$\star u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad \Delta = p\% \text{ de la lecture} + n \text{ UR}$$

Appareil numérique ; Δ : précision donnée par le constructeur ; UR : unité de représentation (dernier digit sur le calibre utilisé).

$$\star u = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}} = \frac{\text{demi-graduation}}{\sqrt{3}}$$

Lecture sur une échelle graduée ; double lecture (départ et arrivée) : $u = \sqrt{2} \times \frac{1 \text{ grad.}}{\sqrt{12}}$.

Incertitudes composées

$$\star u(a \pm b) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$$

Somme ou différence : on compose les incertitudes **absolues**.

$$\star \frac{u(q)}{q} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$$

Produit $q = ab$ ou quotient $q = a/b$: on compose les incertitudes **relatives**.

☞ Ex. : $P = UI$: $\frac{u(P)}{P} = \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I}\right)^2}$. La grandeur de plus forte incertitude relative pèse le plus.

Écrire un résultat

$$\star x = \bar{x} \pm u(x) \quad (\text{unité})$$

Incertaince arrondie **par excès** à 1 ou 2 chiffres significatifs ; valeur arrondie au même rang ; même unité et même puissance de 10.

$$\frac{u(x)}{|x|}$$

Incertaince relative (sans unité, en %).

☞ Ex. : $R = (220,18 \pm 0,27) \Omega$.

Comparer à une référence : z-score

$$\star z = \frac{|x - x_{\text{réf}}|}{u(x)}$$

Écart normalisé (sans unité).

$$z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Comparaison de deux mesures.

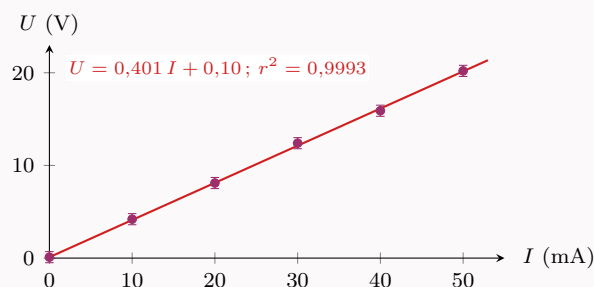
Validité : $z \leq 2$: résultat compatible ; $z > 2$: écart significatif (erreur systématique ou incertitude sous-estimée).

Régression linéaire

☞ **But** : trouver la droite qui passe au plus près d'une série de points de mesure, pour vérifier qu'une loi est linéaire (ex. loi d'Ohm) et déterminer ses coefficients (ex. la résistance R = coefficient directeur).

$$y = ax + b$$

a : coefficient directeur ; b : ordonnée à l'origine ; r^2 : coefficient de détermination.



☞ Modèle validé si la droite passe par les barres d'incertitude, si les points sont répartis de part et d'autre sans courbure, et si r^2 est proche de 1 (insuffisant seul). Si b est compatible avec 0 : modèle linéaire $y = ax$.

Exemple complet : mesure d'une résistance

☞ Huit mesures de la même résistance (en Ω) : 219,4 ; 220,8 ; 220,1 ; 219,0 ; 221,2 ; 220,5 ; 219,8 ; 220,6.

$$\bar{R} = \frac{1761,4}{8} = 220,175 \Omega \quad s \approx 0,742 \Omega$$

Moyenne et écart-type expérimental (calculatrice, s_x).

$$u(\bar{R}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,742}{\sqrt{8}} \approx 0,262 \Omega$$

Incertaince-type (type A), arrondie par excès à 0,27 Ω .

$$\star R = (220,18 \pm 0,27) \Omega$$

Écriture du résultat : valeur arrondie au même rang que l'incertaince.

$$\frac{u(R)}{R} = \frac{0,27}{220,18} \approx 0,12 \%$$

Incertaince relative.

$$z = \frac{|220,18 - 220,0|}{0,27} \approx 0,7 \leq 2$$

Comparaison à la valeur annoncée $R_{\text{réf}} = 220 \Omega$: résultat compatible.